

## СЕКЦИЯ 4. ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

<b>Метод псевдодифференциальных параболических уравнений вычисления волновых полей в неоднородных средах</b> <i>К.В. Авилов</i> .....	3
<b>Влияние калибровочных деформационных полей на эволюцию предельно короткого электромагнитного импульса в графеновых лентах</b> <i>М.Б. Белоненко, О.С. Ляпкосова, Н.Г. Лебедев</i> .....	8
<b>Дисперсия поверхностных магнитостатических волн в слоистых структурах, содержащих касательно намагниченную ферритовую плёнку</b> <i>С.А. Вяткина, Н.П. Нистратов, В.Н. Иванов, Р.К. Бабичев</i> .....	10
<b>Влияние постоянного квантующего электрического поля на плазменные волны в двумерной сверхрешетке</b> <i>С.Ю. Глазов, Е.С. Кубракова</i> .....	15
<b>Генерация высших гармоник переменным электрическим полем в сверхрешетках на основе графена</b> <i>С.Ю. Глазов, Н.Е. Мещерякова</i> .....	19
<b>Осреднение краевых задач электроупругости пьезокомпозитов</b> <i>В.И. Горбачев</i> .....	24
<b>Микроволновый отжиг дефектов в сегнетоэлектрике триглицинсульфат</b> <i>С.В. Данилова, Г.И. Овчинникова, Ю.А. Пирогов</i> .....	25
<b>Собственные электромагнитные волны в замагниченных 1D сверхрешетках на основе полупроводника и ферромагнетика</b> <i>С.В. Елисеева, Д.Г. Санников, Д.И. Семенцов</i> .....	29
<b>О возможности проявления циклотронного эха в графене</b> <i>Д.В. Завьялов, В.И. Конченков, С.В. Крючков</i> .....	33
<b>Упругие свойства одномерной гранулированной неконсолидированной среды</b> <i>А.И. Коробов, Ю.А. Бражкин, Н.В. Ширгина</i> .....	36

<b>Эффект увлечения в сверхрешетке на основе графена в условиях постоянного электрического поля</b> <i>С.В. Крючков, Е.И. Кухарь, М.Н. Золотых</i> .....	40
<b>Предельнокороткий оптический импульс в среде углеродных нанотрубок с адсорбированным атомарным водородом</b> <i>Н.Г. Лебедев, А.С. Попов, А.В. Пак, М.Б. Белоненко</i> .....	43
<b>Устойчивости стержня с переменными параметрами под действием переменной нагрузки</b> <i>О.Б. Москаленко</i> .....	47
<b>Рефракция пучка на индуцированной неоднородности в приближении геометрической оптики</b> <i>Р.Ю. Пена, А.П. Сухоруков, А.А. Калинович</i> .....	49
<b>Ультракороткий оптический импульс в среде углеродных нанотрубок с сеткой из металлических неоднородностей</b> <i>А.С. Попов, М.Б. Белоненко, Н.Г. Лебедев</i> .....	52
<b>Воздействие фемтосекундных лазерных импульсов на металлические наночастицы в жидкости</b> <i>О.Г. Романов, Г.И. Желтов, Г.С. Романов</i> .....	56
<b>Преобразования распределения турбулентной вязкости под влиянием внутренних волн в системе стратифицированных течений</b> <i>Б.И. Самолюбов, И.Н. Иванова</i> .....	60

## МЕТОД ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

К.В. Авилов

Институт машиноведения РАН/Акустический институт им. акад. Н.Н. Андреева  
[k.v.avilov@list.ru](mailto:k.v.avilov@list.ru)

К настоящему моменту наиболее эффективным методом вычисления волновых полей в двумернонеоднородных моделях неоднородных сред следует признать метод псевдодифференциальных параболических уравнений (ПДПУ) [1,2,3,4,5], известный в работах западных авторов как метод дробных шагов Падэ [6,7]. Двумернонеоднородными будем называть те среды, свойства которых зависят от двух координат.

Метод ПДПУ основан на возможности разделения всего волнового поля на сумму совокупности локальных нормальных волн, бегущих по выделенной координате в разных направлениях и возможности вычисления суммарного поля этих волн в координатном базисе без отыскания собственного базиса локальных нормальных волн. Можно представлять его себе как особую численную реализацию метода поперечных сечений.

Рассмотрим обоснование метода ПДПУ на примере используемых в большинстве работ в качестве математической модели распространения звука в океане уравнений акустики жидкости, не учитывающих присутствия внешних полей, справедливых для покоящейся среды и баротропного уравнения состояния среды [8]. Запишем их для цилиндрически-симметричной среды и гармонической зависимости акустических величин  $P$ ,  $v_z$ ,  $v_r$  от времени

$$\begin{pmatrix} D_r & 0 & -i\omega(r, \rho) \\ D_z & -i\omega(r, \rho) & 0 \\ \frac{-i\omega}{\rho(r, z)c^2(r, z)} & D_z & r^{-1}D_r r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ v_z \\ v_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_z(r, z) \\ V(r, z) \end{pmatrix}$$

Здесь первые два уравнения суть уравнения Ньютона, третье – уравнение непрерывности с учетом линеаризованного уравнения состояния,  $D$  - символ дифференцирования,  $z$  - глубина, отсчитываемая обычно от поверхности моря к дну,  $r$  - дистанция от оси,  $\omega$  - круговая частота,  $\rho$  - плотность среды,  $c$  - скорость звука в среде,  $f$  - объёмная плотность сторонних сил,  $V$  - плотность сторонней объёмной скорости. Путём редукции этой системы линейных уравнений первого порядка стандартным образом [9] могут быть получены уравнения больших

порядков для отдельных акустических величин, например, уравнение Гельмгольца для акустического давления. Отметим также, что поля свойств морской среды можно представлять себе в виде некоторой суперпозиции крупномасштабной и мелкомасштабной компонент. Рассмотрим сначала случай слоистой среды, когда поля плотности и скорости звука зависят только от глубины. Непосредственной подстановкой в уравнения (1) при использовании известных соотношений между цилиндрическими функциями Ханкеля  $H_k^{(1)}$  [10] можно убедиться в том, что общее решение соответствующих однородных уравнений имеет вид

$$\begin{pmatrix} p(r, z) \\ v_z(r, z) \\ v_r(r, z) \end{pmatrix} = \sum_k \left( a_k^+ \begin{pmatrix} p_k(z) H_0^{(1)}(+\xi_k r) \\ v_z(z) H_0^{(1)}(+\xi_k r) \\ v_r(z) H_1^{(1)}(+\xi_k r) \end{pmatrix} \right)$$

при условии, что собственное значение  $\xi_k$  и собственный вектор  $(p_k \ v_{z k} \ v_{r k})^t$  удовлетворяют граничным условиям по  $z$  и уравнениям

$$\begin{pmatrix} -\xi_k & 0 & -i\omega(r, \varrho) \\ D_z & -i\omega(r, \varrho) & 0 \\ \frac{-i\omega}{\rho(r, z)c^2(r, z)} & D_z & \xi_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_k \\ v_{z k} \\ v_{r k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Далее, легко видеть, что если число  $\sigma_k$  и вектор  $(p_k \ v_{z k} \ w_{z k})^t$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{pmatrix} -\sigma_k & 0 & -i\omega(r, \varrho) \\ D_z & -i\omega(r, \varrho) & 0 \\ \frac{-i\omega}{\rho(r, z)c^2(r, z)} & D_z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_k \\ v_{z k} \\ w_{z k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

то числа  $\pm\sqrt{\sigma_k}$  и вектора  $(p_k \ v_{z k} \ \pm w_{z k} / \sqrt{\sigma_k})^t$  суть собственные значения и собственные вектора задачи (3) и общее решение (2) приобретает вид

$$\begin{pmatrix} p(r, z) \\ v_z(r, z) \\ v_r(r, z) \end{pmatrix} = \sum_k \left( a_k^+ \begin{pmatrix} p_k(z) H_0^{(1)}(\xi_k r) \\ v_z(z) H_0^{(1)}(\xi_k r) \\ v_r(z) H_1^{(1)}(\xi_k r) \end{pmatrix} + a_k^- \begin{pmatrix} p_k(z) H_0^{(2)}(\xi_k r) \\ v_z(z) H_0^{(2)}(\xi_k r) \\ -v_r(z) H_1^{(2)}(\xi_k r) \end{pmatrix} \right)$$

Условие излучения на бесконечности удовлетворяется, если  $a_k^- = 0$ , а  $a_k^+$  для точечного источника объемной скорости, находящегося на глубине  $z_s$ , находятся из условия  $\sum_k a_k^+ p_k(z_s) = \delta(z - z_s)$ .

Среду, свойства которой зависят от горизонтальной координаты, представим себе в виде набора цилиндрических слоев малой толщины  $h$  со слоистой по глубине структурой свойств среды. В предположении медленной зависимости свойств среды от горизонтальной координаты примем на границах слоев условие непрерывности акустического давления. В работе [5] показано, что это предположение эквивалентно пренебрежению отраженной от горизонтальных неоднородностей совокупностью сходящихся волн и предположению о равенстве единице нормы матричного коэффициента прохождения по горизонтали. Если  $p(r)$  есть акустическое давление на границе цилиндрического слоя, ближней к оси симметрии, а  $p(r+h)$  есть давление на другой границе, то из (5) следует, что

$$p(r+h, z) = \mathbf{P}(z, k) d \left\{ \frac{H_0^{(1)}(\xi_k(r+h))}{H_0^{(1)}(\xi_k(r))} \right\} \mathbf{P}^{-1}(g, k) p(r, z)$$

Применив простейшую асимптотическую аппроксимацию функции Ханкеля и приняв во внимание формулу для функции  $f$  от матрицы  $\mathbf{A}$ , имеющей диагональное представление  $\mathbf{A} = \mathbf{B} \mathbf{D} \mathbf{E}$ ,  $f(\mathbf{A}) = \mathbf{B} f(\mathbf{D}) \mathbf{B}^{-1}$ , получим

$$\begin{aligned} p(r+h, z) &= (r+h)^{-\frac{1}{2}} q(r+h, z), \\ q(r+h, z) &= e^{-\chi(i) \sqrt{h} \mathbf{T}} q(r, z), \\ q(0, z) &= \sqrt{2\pi i} \delta(z - z_s) \end{aligned}$$

где  $\mathbf{T}$  означает дифференциальный оператор, получаемый из (4) путем исключения акустических скоростей. Действие оператором  $e^{-\chi(i) \sqrt{h} \mathbf{T}}$  осуществляется прямо в координатном базисе без перехода в базис нормальных волн с помощью дробно-рациональных аппроксимаций Падэ [11]. Конечномерную аппроксимацию дифференциального оператора  $\mathbf{T}$  целесообразно осуществлять методом интегральных тождеств Марчука [12], обеспечивающим высокий порядок аппроксимации.

На основании аналогичных приемов могут быть решены задачи о распространении звука в моделях морской среды с течениями [13,14] и в моделях морской среды, содержащих изотропно-упругие включения [15]. Программная реализация метода ПДПУ, допускающая расчет широкополосных сигналов, описана в [16].

Очевидно, что модель неограниченного по горизонтальным координатам волновода с плоской поверхностью существенно отличается от волновода, расположенного на шаровой поверхности Земли. Последний имеет конечные размеры и его собственные значения оказываются собственными частотами, а поперечная дифференциальная краевая задача ставится на конечном интервале, не превышающем радиуса Земли, вследствие чего в такой модели принципиально отсутствуют боковые волны. Эти обстоятельства давно хорошо известны в сейсмологии [17]. Там же для случая относительно высоких частот показано, что собственные частоты могут быть объединены в группы, приблизительно соответствующие горизонтальным волновым числам бесконечной задачи. В результате для поля в сферическом волноводе оказывается справедливым представление в виде поля т.н. поверхностных волн

$$p = i\pi/2 \sqrt{\frac{\Delta}{s}} \sum_n a_n p_n(z) H_0^{(1)}(\xi_k X)$$

где  $\Delta$  есть широтное угловое расстояние между точками излучения и наблюдения,  $z$  - расстояние от точки наблюдения до центра Земли,  $X = z\Delta$  - горизонтальное расстояние,  $\xi_k$  и  $p_k(z)$  - собственное значение и собственная функция поперечной дифференциальной краевой задачи, имеющей, например, для жидкой среды вид ( $R$  - радиус Земли)

$$\frac{1}{z^2} \frac{\partial}{\partial z} z^2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \left( \frac{\omega^2}{\rho c^2} - \frac{\xi^2}{\rho} \right) p = 0, \quad p(0) < \infty, \quad p(R) = 0$$

численное решение которой по сложности не превосходит таковое для плоской модели морской среды.

## ЛИТЕРАТУРА

1. К.В. Авилов // Волны и дифракция-85, IX Всес. симп. по дифракции и распространению волн. Тбилиси: ТГУ, 1985, Т. 2 С. 236-239.
2. К.В. Авилов // в кн. Акустика океанской среды под ред. Л.М. Бреховских и И.Б. Андреевой, М., Наука, 1989, С. 10 - 19.
3. Aviloff, C.V. // Journal de Physique IV, Colloque C1, Supplement au Journal de Physique III, no. 4, Avril 1992, vol. 2, pp. C1-1023 - C1-1026.
4. Aviloff, C. V. Factorisation additive + approximation de Pade = modelisation efficace de la propagation acoustique sous-marine, dans Aspects recent de l'acoustique sous-marine russe, M. Galaktionov, Ed., Institut francais de recherche pour l'exploitation de la mer, Brest, 1994.
5. К.В. Авилов // Акуст. журн., т.41, вып.1, 1995, с.5-12.
6. Collins M.D. // J. Acoust. Soc. Am., V. 93, pp. 1736-1742, 1993.

7. M. D. Collins et al. // J. Acoust. Soc. Am. 100 (1), July 1996.
8. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн), М.: Наука, 1982, С. 335.
9. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М.: Наука, 1976, С. 576.
10. Справочник по специальным функциям под ред. М. Абрамовица и И. Стиган М.: Наука, 1979, С. 832.
11. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. Москва, Мир, 1980.
12. И. Бабушка, Э. Витасек, М. Прагер Численные процессы решения дифференциальных уравнений. М., "Мир", 1969, §4.3.
13. Авилов К.В. // Акустика в промышленности, 1 сессия Российского Акустического Общества, М., АКИН им. Н.Н. Андреева, 1992.
14. Joseph F. et al // J. Acoust. Soc. Am., V. 111, pp. 729-734, 2002.
15. Авилов К.В. // Доклады VIII школы-семинара акад. Л.М. Бреховских, Акустика океана. М.: Геос, 2000, 211 с.
16. К.В. Авилов, Н.А. Добряков, О.Е. Попов, // Доклады VIII школы-семинара акад. Л.М. Бреховских, Акустика океана. М.: Геос, 2000, 211 с.
17. К. Аки, П. Ричардс Количественная сейсмология. Т.1. М.: "Мир", 1983, гл. 8.

## ВЛИЯНИЕ КАЛИБРОВОЧНЫХ ДЕФОРМАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ НА ЭВОЛЮЦИЮ ПРЕДЕЛЬНО КОРОТКОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИМПУЛЬСА В ГРАФЕНОВЫХ ЛЕНТАХ

М.Б. Белоненко<sup>1</sup>, О.С. Ляпкосова<sup>2</sup>, Н.Г. Лебедев<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Волгоградский государственный педагогический университет

<sup>2</sup> Волгоградский государственный университет

lyarkosovaolga@mail.ru

Свойства графеновых нанолент [1] стимулировали их широкое изучение в рамках нелинейной оптики [2]. Одним из перспективных направлений в этой области является изучение процесса распространения ультракоротких импульсов света (оптических солитонов) в графеновых лентах.

Для простоты и определенности графеновые ленты считаются идеальными, имеющими "arm-chair" модификацию. Вектор напряженности электрического поля  $\mathbf{E}(x, t)$  направлен вдоль наноленты, а электромагнитная волна движется в поперечном направлении.

В работе использовалась методика, наглядно изложенная в работе [3]. Электромагнитное поле импульса описывается классически на основании уравнений Максвелла. Эволюция ансамбля Ферми частиц описывается классическим кинетическим уравнением Больцмана в приближении времен релаксации.

В результате всех преобразований было получено эффективное уравнение на вектор-потенциал  $\mathbf{A}$  электромагнитного импульса следующего вида:

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} + \frac{q}{\pi \hbar} \sum_m c_m \sin\left(\frac{maq}{c} A_z(t)\right) = 0, \quad (1)$$
$$c_m = \sum_s a_{ms} b_{ms}, b_{ms} = \int_{-q_0}^{q_0} dp_z \cos(map_z) F_0(p)$$

где  $q$  – заряд электрона,  $a_m$  определяется разложением в ряд Фурье скорости электрона,  $a = 3b/2\hbar$ ,  $b = 0.142$  nm – расстояние между соседними атомами углерода,  $q_0$  – импульс на границе зоны Бриллюэна.

В работе изучается влияние калибровочных полей, которые возникают в графеновых лентах под воздействием внешних линейных деформаций.

Компоненты эффективного калибровочного поля определяются следующими соотношениями [4]:

$$\begin{aligned} A_x &= c \frac{\beta\gamma}{a} (u_{xx} - u_{yy}), \\ A_y &= -c \frac{2\beta\gamma}{a} u_{xy}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $c$  – численный параметр, который полагался равным 1;  $\gamma$  – интеграл перескока электрона с одного узла на другой,  $u$  – тензор деформаций,  $\beta = -\frac{\partial \ln t}{\ln a} \square 2$  – электронный параметр Guinea [4].

Исследуемое уравнение решалось численно при помощи прямой разностной схемы типа "крест" [5]. Шаги по времени и координате определялись из стандартных условий устойчивости. Шаги разностной схемы уменьшались последовательно в 2 раза до тех пор, пока решение не изменялось в восьмом знаке после запятой.

В работе было проанализировано распространение ультракоротких оптических импульсов в деформированных графеновых лентах при разных значениях относительной деформации.

Показан эффект выпрямления для ультракороткого электромагнитного импульса при его прохождении через деформированные графеновые ленты.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы (проект № НК-16(3)).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лозовик Ю.Е., Меркулова С.П., Соколик А.А. // УФН, 2008, т. 178, № 7, с. 757 – 776.
2. Х. Гиббс “Оптическая бистабильность. Управление светом с помощью света” М.: Мир, 1988.
3. М.Б. Белоненко, Е.В. Демушкина, Н.Г. Лебедев // Изв. РАН. Сер. физ. 72. 28. 2008.
4. M. A. N. Vozmediano, M. I. Katsnelson, F. Guinea // arXiv:1003.5179v2 [cond-mat.mes-hall] 20 Jul 2010.
5. Н.С. Бахвалов “Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения)” М.: Наука, 1975.

## ДИСПЕРСИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ ВОЛН В СЛОИСТЫХ СТРУКТУРАХ, СОДЕРЖАЩИХ КАСАТЕЛЬНО НАМАГНИЧЕННУЮ ФЕРРИТОВУЮ ПЛЁНКУ

С.А. Вяткина, Н.П. Нистратов, В.Н. Иванов, Р.К. Бабичев  
Южный федеральный университет,  
vjatkinasval@rambler.ru

Одним из актуальных вопросов современной СВЧ микроэлектроники является использование магнитостатических волн (МСВ) в квазиоптических аналогах СВЧ элементов на МСВ [1]. Для проектирования таких устройств необходимо уметь рассчитывать дисперсионные характеристики МСВ в области малых волновых чисел, где магнитостатическое приближение использовать нельзя. Ранее было получено дисперсионное уравнение МСВ, справедливое в случае касательно намагниченной изолированной ферритовой пленке, окруженной однородной диэлектрической средой [2]. На практике важно исследовать дисперсионные свойства слоистых структур, которые содержат ферритовую пленку, граничащую с обеих сторон со средами с различной диэлектрической проницаемостью. В настоящей работе для такого, более общего случая получено дисперсионное уравнение, позволяющее точно рассчитывать дисперсионные характеристики поверхностных магнитостатических волн (ПМСВ) в области малых волновых чисел. На основе этого уравнения рассчитаны дисперсионные характеристики ПМСВ в слоистых структурах типа: диэлектрик – ферритовая плёнка из железо-иттриевого граната (ЖИГ) – подложка из галлий-гадолиниевого граната (ГГГ). В работе представлены также результаты проведенных нами измерений дисперсии на разработанной для этих целей экспериментальной установке.

Рассмотрим бесконечную плоскопараллельную ферритовую пленку, окруженную верхним полупространством с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1$  и нижним – с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_2$  (рис.1). Ось  $x$  направлена перпендикулярно поверхности пленки, а постоянное подмагничивающее поле  $H_i$  параллельно оси  $z$ . Пленка толщиной  $s$  бесконечна в направлениях осей  $y$  и  $z$ .

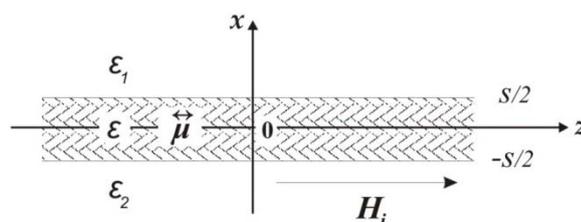


Рис. 1. Геометрия исследуемой структуры.

Используя уравнения Максвелла для областей внутри и вне ферритовой плёнки и записывая напряженность магнитного поля внутри плёнки в виде:

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^2 [C_i(1, \beta_i^+, \gamma_i^+) \exp(ik_{xi}x) + D_i(1, \beta_i^-, \gamma_i^-) \exp(-ik_{xi}x)], \quad (1)$$

получаем магнитное поле в области  $x > s/2$ :

$$\vec{H}_1 = [(i/\alpha_1)(k_y A + k_z B), A, B] \exp[-\alpha_1(x - s/2)], \quad (2)$$

и в области  $x < -s/2$ :

$$\vec{H}_2 = [-(i/\alpha_2)(k_y F + k_z G), F, G] \exp[\alpha_2(x + s/2)], \quad (3)$$

где  $k_y = k \sin \varphi$ ,  $k_z = k \cos \varphi$ .  $k$  – волновой вектор электромагнитной волны (ЭМВ) в плоскости  $y, z$ .  $k_{x1}$  и  $k_{x2}$  – фазовые постоянные ЭМВ вдоль оси  $x$  внутри ферритовой плёнки.  $\alpha_1 = (k_y^2 + k_z^2 - \varepsilon_1 \omega^2 / c^2)^{1/2}$  и  $\alpha_2 = (k_y^2 + k_z^2 - \varepsilon_2 \omega^2 / c^2)^{1/2}$  – фазовые постоянные ЭМВ вдоль оси  $x$  вне ферритовой плёнки в области верхнего и нижнего полупространства соответственно. Коэффициенты  $\beta_i^\pm$  и  $\gamma_i^\pm$  также рассчитываем из уравнений Максвелла.

В выражениях (1)-(3) в правой части выражений для векторов для краткости приведены их компоненты, также для простоты записи опущен множитель  $\exp[i(k_y y + k_z z)]$ , который является общим для всех полей.

Применив граничные условия на поверхностях плёнки, находим дисперсионное уравнение, приравнивая к нулю определитель  $M$  полученной системы линейных однородных уравнений [3]:

$$|M| = 0 \quad (4)$$

В случае ПМСВ, волновой вектор которой перпендикулярен направлению поля подмагничивания  $H_i$  ( $\varphi = 90^\circ$ ), отличны от нуля следующие элементы определителя:

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= 1, M_{13} = -\beta_1^+ E_1, M_{14} = -\beta_2^+ E_2, M_{15} = -\beta_1^- / E_1, M_{16} = -\beta_2^- / E_2, \\
 M_{22} &= 1, M_{23} = -\gamma_1^+ E_1, M_{24} = -\gamma_2^+ E_2, M_{25} = -\gamma_1^- / E_1, M_{26} = -\gamma_2^- / E_2, \\
 M_{32} &= i\varepsilon / (\alpha_1 \varepsilon_1), M_{33} = -k_{x1} \gamma_1^+ E_1, M_{34} = -k_{x2} \gamma_2^+ E_2, M_{35} = k_{x1} \gamma_1^- / E_1, \\
 M_{36} &= k_{x2} \gamma_2^- / E_2, M_{41} = (i\varepsilon / \varepsilon_1)(k^2 / \alpha_1 - \alpha_1), M_{43} = (k_{x1} \beta_1^+ - k) E_1, \\
 M_{44} &= (k_{x2} \beta_2^+ - k) E_2, M_{45} = -(k + k_{x1} \beta_1^-) / E_1, M_{46} = -(k + k_{x2} \beta_2^-) / E_2, \\
 M_{53} &= -\beta_1^+ / E_1, M_{54} = -\beta_2^+ / E_2, M_{55} = -\beta_1^- E_1, M_{56} = -\beta_2^- E_2, M_{57} = 1, \\
 M_{63} &= -\gamma_1^+ / E_1, M_{64} = -\gamma_2^+ / E_2, M_{65} = -\gamma_1^- E_1, M_{66} = -\gamma_2^- E_2, M_{68} = 1, \\
 M_{73} &= -k_{x1} \gamma_1^+ / E_1, M_{74} = -k_{x2} \gamma_2^+ / E_2, M_{75} = k_{x1} \gamma_1^- E_1, M_{76} = k_{x2} \gamma_2^- E_2, \\
 M_{78} &= (i\varepsilon / \varepsilon_2)(k^2 / \alpha_2 - \alpha_2), M_{83} = (k - k_{x1} \beta_1^+) / E_1, M_{84} = (k - k_{x2} \beta_2^+) / E_2, \\
 M_{85} &= (k + k_{x1} \beta_1^-) E_1, M_{86} = (k + k_{x2} \beta_2^-) E_2, M_{87} = (i\varepsilon / \varepsilon_2)(k^2 / \alpha_2 - \alpha_2),
 \end{aligned}$$

где  $E_i = \exp(ik_{xi}s/2)$ ,  $\alpha_i = (k^2 - \varepsilon_i \omega^2 / c^2)^{1/2}$ ,  $i=1, 2$ .

На основе (4) рассчитаем дисперсионные зависимости  $f(k)$  ПМСВ в структурах с разными диэлектриками, прилегающими к верхней поверхности ферритовой плёнки. Структура 1 – воздух ( $\varepsilon_1 = 1$ ) – ЖИГ ( $\varepsilon = 15,4$ ) – ГГГ ( $\varepsilon_2 = 11$ ); структура 2 – конденсаторная керамика ( $\varepsilon_1 = 100$ ) – ЖИГ – ГГГ. Для обеих структур толщина плёнки ЖИГ  $s = 14$  мкм, намагничённость насыщения  $4\pi M_0 = 1750$  Гс, постоянное поле подмагничивания  $H_i = 1400$  Э. При расчёте дисперсионных зависимостей учтена роль магнитной анизотропии плёнки, в соответствии с которой внутреннее магнитное поле в плёнке составило 1425 Э.

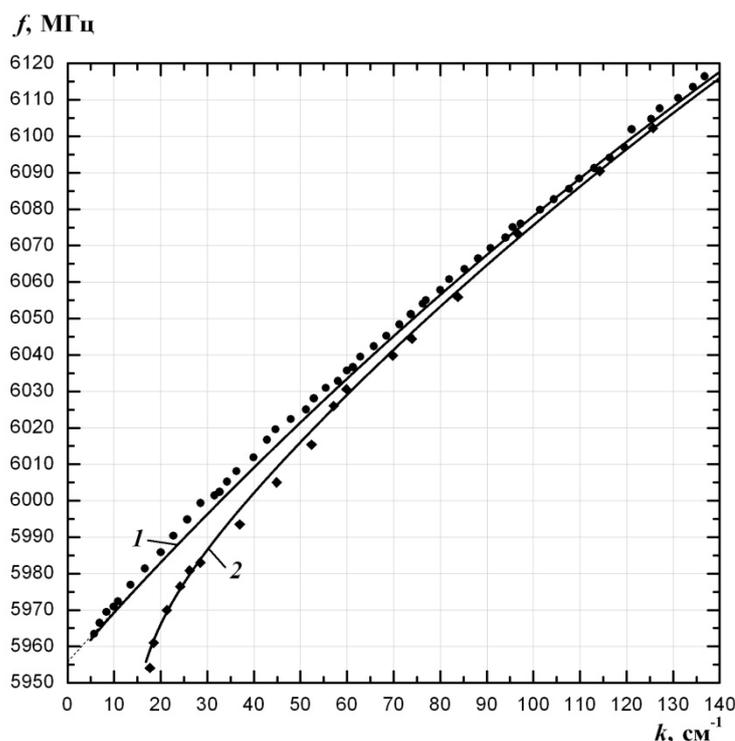


Рис. 2. Дисперсионные кривые ПЭМВ, распространяющихся в положительном направлении оси  $y$ . Сплошные кривые соответствуют дисперсионным характеристикам ПЭМВ, рассчитанным на основе (4): кривая 1 – в структуре 1 (воздух – ЖИГ – ГГГ); кривая 2 – в структуре 2 (конденсаторная керамика – ЖИГ – ГГГ); кружками обозначены экспериментальные дисперсионные характеристики ПЭМВ в структуре 1, ромбиками – экспериментальные дисперсионные характеристики ПЭМВ в структуре 2, пунктирная кривая – дисперсионная зависимость, рассчитанная в магнитостатическом приближении.

На рис. 2 сплошными кривыми 1 и 2 показаны дисперсионные характеристики ЭМВ, возбуждаемых в частотном диапазоне ПМСВ, в структурах 1 и 2 соответственно. В обоих случаях ЭМВ распространяются в положительном направлении оси  $y$  и представляют собой поверхностные электромагнитные волны (ПЭМВ), локализующиеся внутри плёнки ЖИГ вблизи её верхней поверхности ( $k_{x1}, k_{x2}$  – мнимые,  $\alpha_1, \alpha_2$  – действительные) [4]. При больших значениях волнового числа дисперсионные характеристики ПЭМВ асимптотически совпадают с дисперсионными кривыми ПМСВ Дэймона-Эшбаха.

Также на графике представлены экспериментальные дисперсионные характеристики ПЭМВ. Они были получены с помощью метода, использующего для определения длины волны интерференцию сигналов на приёмной антенне от поверхностной волны в ЖИГ и электромагнитной волны [5]. Экспериментальные исследования проводились на макете, в котором была использована плёнка ЖИГ размерами  $7 \times 0,014$  мм.

Расчётные и экспериментальные результаты находятся в хорошем соответствии.

Полученные графики показывают, что нижняя граница частотного диапазона ПЭМВ в случае структуры 1 равна  $f_{\min \text{ ПЭМВ}} = 5962,1$  МГц (в магнитостатическом приближении  $f_{\min \text{ ПМСВ}} = \omega_M \sqrt{\Omega_H^2 + \Omega_H} = 5955,8$  МГц), а минимальное волновое число  $k_{\min \text{ ПЭМВ}} = 4,91$  см<sup>-1</sup> (магнитостатическое приближение даёт  $k_{\min \text{ ПМСВ}} = 0$ , что физически невозможно). В случае структуры 2 нижняя граница диапазона частот совпадает с вычисленной в магнитостатическом приближении, а минимальное волновое число  $k_{\min \text{ ПЭМВ}}$  составляет 16,82 см<sup>-1</sup>.

Численный и экспериментальный анализ показал, что в касательно намагниченной ферритовой плёнке при малых волновых числах ПМСВ представляют собой поверхностные электромагнитные волны, которые рассчитываются на основе дисперсионного уравнения (4). В исследованных структурах при заданных значениях подмагничивающего поля и намагниченности насыщения феррита минимальное волновое число и нижняя граница частотного диапазона ПЭМВ зависят от диэлектрической проницаемости ферритовой плёнки  $\varepsilon$  и диэлектрических проницаемостей сред, окружающих плёнку,  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А.В. Вашковский, Э.Г. Локк // УФН. 2006. Т. 176. № 5. С. 557-562.
2. R. Ruppin // J. Appl. Phys. 1987. V. 62. No 1. P. 11.
3. С.А. Вяткина, Р.К. Бабичев, В.Н. Иванов // XVIII Международная конференция «Электромагнитные поля и материалы». 2010. С. 182-189.
4. С.А. Вяткина, Р.К. Бабичев, В.Н. Иванов // Труды XII Всероссийской школы-семинара «Волновые явления в неоднородных средах». 2010. С. 166-172.
5. Ю.Ф. Огрин, А.В. Луговской, А.Г. Темиряев // Радиотехника и электроника. 1983. Т. 28. № 8. С. 1664-1666.

## ВЛИЯНИЕ ПОСТОЯННОГО КВАНТУЮЩЕГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА ПЛАЗМЕННЫЕ ВОЛНЫ В ДВУМЕРНОЙ СВЕРХРЕШЕТКЕ

С.Ю. Глазов, Е.С. Кубракова

Волгоградский Государственный Педагогический Университет  
ser-glazov@yandex.ru

Изучение процессов распространения плазменных волн в двумерных полупроводниковых структурах в системе с периодическим потенциалом является важным направлением исследования коллективных явлений в низкоразмерных системах. Особый интерес представляет исследование различного рода эффектов, проявляющихся во внешних электрических полях в таких системах.

На основе квантовой теории плазменных волн в приближении случайных фаз с учетом процессов переброса получено выражение для нахождения закона дисперсии плазменных волн в двумерном электронном газе со сверхструктурой

$$\tilde{U}(\vec{k}, \omega) = \frac{2\pi e^2}{\chi k} S(\vec{k}) \sum_{s,l} J_s(\gamma) J_l(\gamma) \tilde{U}(\vec{k} + \vec{g}, \omega - \Omega(s-l)) \times \sum_{\vec{p}} \frac{\binom{n}{\vec{p} + \vec{k} + \vec{g}} \binom{-n}{\vec{p}} \exp[i(p_x d + k_x d/2)(s-l)] i^{s-l}}{\varepsilon(p_y + k_y) + \varepsilon(p_y) - \omega + l\Omega}, \quad (1)$$

где  $\tilde{U}(\vec{k}, \omega) = \sum_{n,m} M([\vec{k} + \vec{g}]_x) M([\vec{k} + \vec{g}]_y) \varphi(\vec{k} + \vec{g}, \omega)$ ,  $\vec{g} = (n2\pi/d, m2\pi/d)$ ,  $\varphi(\vec{k}, \omega)$  - фурье-компонента самосогласованного потенциала,

$$S(\vec{k}) = \sum_{n,m} \frac{|M([\vec{k} + \vec{g}]_x)|^2 |M([\vec{k} + \vec{g}]_y)|^2}{\sqrt{(k_x + g_x)^2 + (k_y + g_y)^2}}, \quad \varepsilon(\vec{p}) = \Delta - \frac{\Delta}{2} [\cos(p_x d) + \cos(p_y d)],$$

$$\gamma = \frac{\Delta}{\Omega} \sin[k_x d/2], \quad M(k_x) = \int_0^{N_x d} \varphi^*(x) \varphi(x) \exp(-ik_x x) dx, \quad N_x \text{ и } N_y - \text{число}$$

потенциальных ям, образующих сверхрешетку (СР), вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно,  $\chi$  - диэлектрическая проницаемость кристаллической решетки,  $\Delta$  - полуширина минизоны проводимости;  $d$  - период СС;  $p_x, p_y$  - компоненты квазиимпульса электрона в плоскости СС,  $\Omega = eEd$  - штарковская частота (здесь и далее  $\hbar = 1$ ). Вычисление множителя  $S(\vec{k})$  требует знания конкретного вида потенциальных ям, образующих СР. Вид потенциальных ям выбирался так же, как в [1].

Формула (1) представляет собой бесконечную систему уравнений для фурье-компонент  $\tilde{U}(\vec{k}, \omega)$ . Для случая высоких температур из (1) получается обычное уравнение, позволяющее определить дисперсионную зависимость  $\omega(\vec{k})$  [1]

$$F(\vec{k}, \omega) = 0, \quad (2)$$

где

$$F(\vec{k}, \omega) = \frac{2\pi e^2}{\chi} \Pi(\vec{k}, \omega) S(\vec{k}) - 1, \quad \Pi(\vec{k}, \omega) = \sum_{\vec{p}} \sum_l J_l^2(\gamma) \frac{n_{\vec{p}+\vec{k}} - n_{\vec{p}}}{E(p_y + k_y) - E(p_y) - \omega + i\Omega_{st}}.$$

По результатам численного анализа (1) построены графики зависимости  $\omega(\vec{k}, T)$ . Численные значения параметров взяты из [2].

Уже по виду графика  $F(\vec{k}, \omega)$  (рис.1) можно судить о возможности существования нескольких ветвей плазменных колебаний двумерного газа-основной и резонансных.

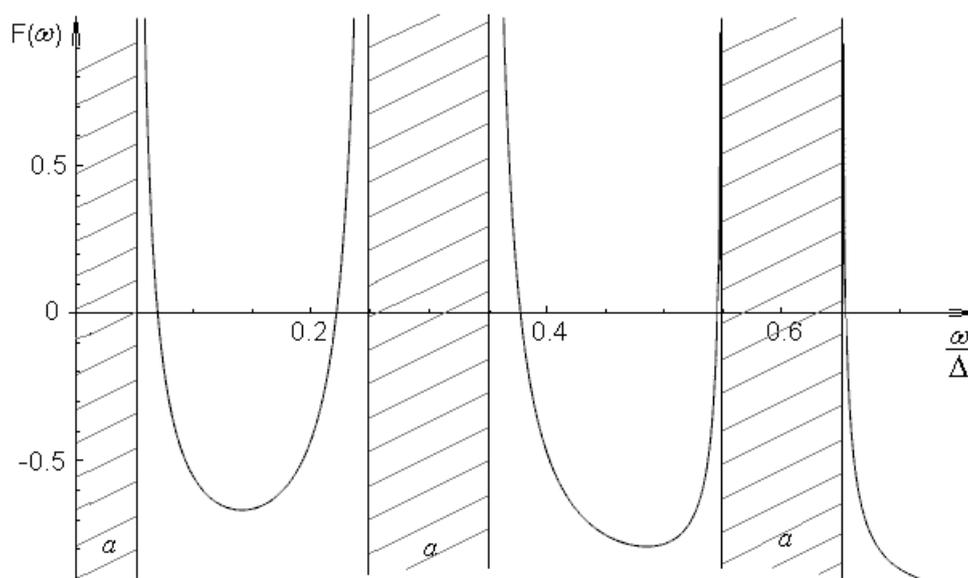


Рис.1. Зависимость  $F(\omega)$  при  $\gamma = 0.3; k_y d = 0.3; k_x d = 1$

При увеличении одной из составляющих волнового вектора  $k_y$  меняется ширина области одночастичных возбуждений, отмеченных на рисунке 1 буквой  $a$ . При определенных значениях волнового вектора корни функции могут находиться в области одночастичных возбуждений, где плазменные колебания будут перекрываться одночастичными.

В результате исследования закона дисперсии плазменных колебаний было установлено, что спектр плазменных колебаний, начиная с определенного значения волнового числа  $k_{xp}$  сливается с одночастичным

спектром, который определяется законом сохранения энергии для процессов поглощения (излучения) плазмона электроном

$$\omega = \varepsilon(p_y + k_y) - \varepsilon(p_y) \pm l\Omega. \quad (3)$$

В [1] было показано, что частота плазмонов в сильном электрическом поле зависит от величины напряженности поля и волнового числа осциллирующим образом ( $\Omega \gg \omega$ ,  $\Omega \gg \Delta \sin(k_y d/2)$ ). Для проявления осцилляционной зависимости  $\omega(k_x)$ , необходимо чтобы аргумент функции Бесселя  $\gamma$  был бы по крайней мере больше  $\gamma_0$  ( $\gamma_0 \approx 2.41$  – наименьший корень функции Бесселя). Первый минимум при  $\Delta = 10^{-2}$  eV,  $k_x \approx 8 \times 10^4$  см<sup>-1</sup> должен наблюдаться при  $E \lesssim 3 \times 10^3$  В/см. Оказывается, что в случае  $\Omega \leq \Delta$  существуют области определенных значений волнового числа  $k_x$ , в которых невозможно отделить коллективные колебания от одночастичных.

Отметим, что при уменьшении температуры при фиксированном значении волнового числа  $k$  увеличивается плазменная частота и значение порогового волнового числа  $k_{xp}$ . При увеличении напряженности постоянного электрического поля ( $\Omega \gg \Delta$ ) исчезает осцилляционная зависимость частоты от волнового числа  $k_x$ , и спектр плазменных колебаний становится четко выделенным.

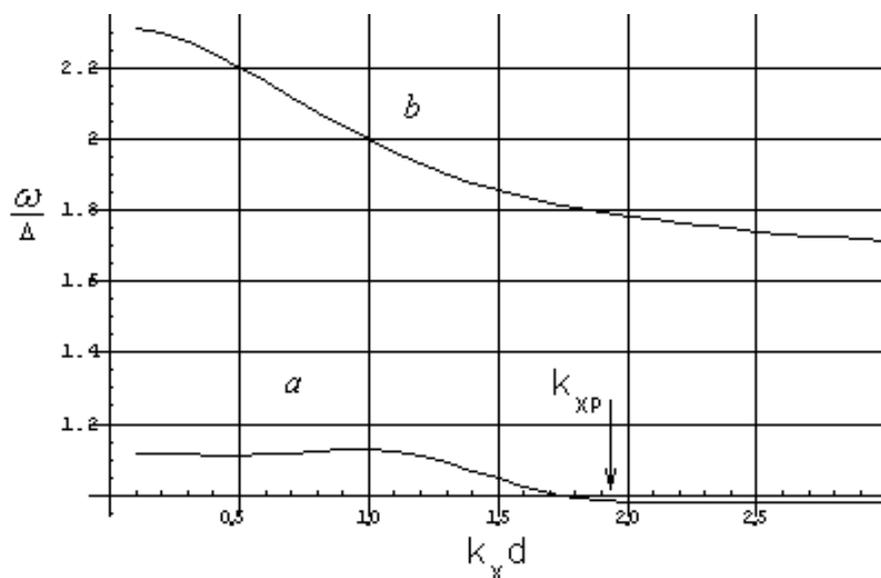


Рис.2 Дисперсионная зависимость  $\omega(\vec{k})$  при а)  $\Delta/T \approx 0.2$ ; б)  $\Delta/T \approx 1$

Для проявления штарковского квантования необходимо выполнение условия  $\Omega\tau \gg 1$  ( $\tau$  - среднее время свободного пробега электрона). Последнее неравенство может быть выполнено при  $\tau > 10^{-13}$  с (что является довольно жестким условием на чистоту образца).

Работа поддержана грантом РФФИ №10-02-97001-р\_поволжье\_a.

Литература

1. Глазов С.Ю., Крючков С.В. // ФТП 2001. Т. 35. В. 4. С.456.
2. Гусев Г.М., Квен З.Д., и др. // ФТП. 1992. Т.26. N3. С. 539.

## ГЕНЕРАЦИЯ ВЫСШИХ ГАРМОНИК ПЕРЕМЕННЫМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ В СВЕРХРЕШЕТКАХ НА ОСНОВЕ ГРАФЕНА

С.Ю. Глазов<sup>1</sup>, Н.Е. Мещерякова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Волгоградский государственный педагогический университет  
ser-glazov@yandex.ru*

<sup>2</sup>*Волгоградский Институт Бизнеса  
dandelion1@yandex.ru*

Графен, и новые структуры на его основе привлекают исследователей благодаря своим замечательным электронным свойствам и перспективам использования в электронике. В последнее время активно изучаются сверхрешетки (СР) на основе графена [1-5].

В работе [1] предложена модель СР на основе графена, образующаяся за счет периодической модуляции запрещенной зоны. Такая модуляция возможна в графене, осажденном на полосчатую подложку из периодически чередующихся полосок, например, SiO<sub>2</sub> и SiC. Материал SiO<sub>2</sub> не влияет на зонную структуру графена, в то время как SiC способствует возникновению запрещенной зоны в спектре графена, т.е. образованию щелевой модификации графена. Слои SiC расположены таким образом, что его гексагональная кристаллическая решетка располагается под гексагональной решеткой графена. При этом в областях графенового слоя над слоями SiC образуется энергетическая щель в зонной структуре графена, равная 0,26 эВ.

Отметим, что в такого рода структурах, характеризующихся существенной нелинейностью, возможно распространение уединенных оптических волн, генерация высших гармоник. Внимание к подобным нелинейным электромагнитным процессам вызвано возможностью их использования при исследовании физических свойств наноструктур, для управления характеристиками электромагнитного излучения, что находит свое применение в оптике и наноэлектронике.

Интерес к проблеме генерации высших гармоник обусловлен перспективой создания источников когерентного излучения для дальнего ультрафиолетового и мягкого рентгеновского диапазонов.

В данной работе исследуется генерация высших гармоник СР на основе графена, взаимодействующей с переменным электрическим полем.

Задача о генерации высших гармоник решена в рамках полуклассической модели без учета межминизонных переходов. Данное приближение накладывает ограничение на частоту переменного поля  $\omega$ .

Для СР на основе графена на полосчатой подложке закон дисперсии носителей хорошо описывается следующим выражением:

$$\varepsilon(\vec{p}) = \Delta \left( f_1 + \sqrt{f_2^2 + f_3^2 (p_y d / \hbar)^2 + f_4^2 (1 - \cos(p_x d / \hbar))} \right), \quad (1)$$

где  $\Delta$  - полуширина запрещённой зоны щелевой модификации графена,  $p_x$ ,  $p_y$ , - компоненты квазиимпульса электрона,  $d$  - период СР, а коэффициенты  $f_i$  подбираются численно с использованием дисперсионного соотношения из [1]. Спектр (1) периодичен по  $p_x$  и сохраняет неаддитивность, присущую спектру графена.

Плотность тока  $j_x$ , текущего вдоль оси СР определяется по формуле

$$j_x = \frac{2e}{(2\pi\hbar)^2} \int v_x(\vec{p}) f(\vec{p}) d^2 \vec{p}, \quad (2)$$

где  $e$  - заряд электрона,  $f(\vec{p})$ - неравновесная функция распределения носителей. Для нахождения функции распределения носителей рассмотрим классическое уравнение Больцмана в приближении постоянного времени релаксации

$$\frac{\partial f(\vec{p}, t)}{\partial t} + e\vec{E} \frac{\partial f(\vec{p}, t)}{\partial \vec{p}} = -\nu (f(\vec{p}, t) - f_0(\vec{p})), \quad (3)$$

где  $\nu$  - обратное время релаксации, определяемое всеми процессами,  $f_0(\vec{p})$  - фермиевская равновесная функция распределения

$$f_0(\vec{p}) = C [1 + \exp(\varepsilon(\vec{p}) / kT)]^{-1}, \quad (4)$$

где  $k$  - постоянная Больцмана,  $T$  - температура.

Скорость движения электронов вдоль оси СР имеет вид

$$v_x = \frac{\Delta f_4^2 d \sin(p_x d / \hbar)}{2\hbar \sqrt{f_2^2 + f_3^2 (p_y d / \hbar)^2 + f_4^2 (1 - \cos(p_x d / \hbar))}}. \quad (5)$$

Для удобства дальнейших вычислений разложим скорость носителей  $v_x(x)$  в ряд Фурье

$$v_x(p_x, p_y) = \sum_l a_l(p_y) \sin(l p_x d),$$

$$a_l(p_y) = \frac{d}{\pi\hbar} \int_{-\pi\hbar/d}^{\pi\hbar/d} v_x(p_x, p_y) \sin(l p_x d / \hbar) dp_x. \quad (6)$$

Решая (3) методом характеристик, подставляя результат и (6) в (2), после преобразований, получим выражение для плотности тока

$$j(t) = j_0 \sum_{k=0}^{\infty} (b_k \cos(2k+1)\omega t + c_k \sin(2k+1)\omega t), \quad (7)$$

где  $j_0 = 2en\Delta d f_4^2 / \pi\hbar$ ,  $n$  - концентрация электронов в зоне проводимости,

$$b_k = \sum_{l=1}^{\infty} B_l \sum_{n=0}^{2k+1} J_n \left( \frac{lE}{w} \right) J_{2k+1-n} \left( \frac{lE}{w} \right) \frac{(-1)^n}{n^2 w^2 + 1} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{n=1}^{\infty} J_n \left( \frac{lE}{w} \right) J_{2k+1+n} \left( \frac{lE}{w} \right) \left[ \frac{1}{n^2 w^2 + 1} - \frac{1}{(2k+n+1)^2 w^2 + 1} \right], \\
 c_k & = \sum_{l=1}^{\infty} B_l \sum_{n=1}^{2k+1} J_n \left( \frac{lE}{w} \right) J_{2k+1-n} \left( \frac{lE}{w} \right) \frac{(-1)^{n+1} n w}{n^2 w^2 + 1} + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} J_n \left( \frac{lE}{w} \right) J_{2k+1+n} \left( \frac{lE}{w} \right) \left[ \frac{n w}{n^2 w^2 + 1} + \frac{(n+2k+1) w}{(n+2k+1)^2 w^2 + 1} \right], \\
 B_l & = \frac{1}{A} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(z) \sin(lz) dz}{\sqrt{f_2^2 + f_3^2 y^2 + f_4^2 (1 - \cos(z))}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(lx)}{1 + \exp(\gamma(f_1 + \sqrt{f_2^2 + f_3^2 y^2 + f_4^2 (1 - \cos(x))}))} dx dy \\
 A & = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 1 + \exp(\gamma(f_1 + \sqrt{f_2^2 + f_3^2 y^2 + f_4^2 (1 - \cos(x))})) \right]^{-1} dx dy, \quad w = \omega / \nu, \quad E = e E_0 d / \hbar \nu.
 \end{aligned}$$

Непосредственно из анализа формулы (7) следует, что амплитуды четных гармоник тока ( $\sqrt{b_k^2 + c_k^2}$ ) равны нулю. Анализ формулы (7) в силу ее сложности производился численно. Были выбраны следующие параметры, удовлетворяющие условию одноминизонного приближения: температура  $T \approx 70$  К,  $(\hbar \nu_f) / (\Delta d) \leq 0.25$  ( $\nu_f \approx 10^8$  см/с),  $n \approx 10^{12}$  см<sup>-2</sup>,  $\nu \sim 10^{11}$  с<sup>-1</sup>,  $d \sim 5 \cdot 10^{-6}$  см,  $2\Delta \approx 0.26$  eV (SiC).

На рис.1 представлены графики зависимости амплитуды первой, третьей и пятой гармоники тока  $\sqrt{b_k^2 + c_k^2}$  от обезразмеренной величины амплитуды переменного поля  $E$ .

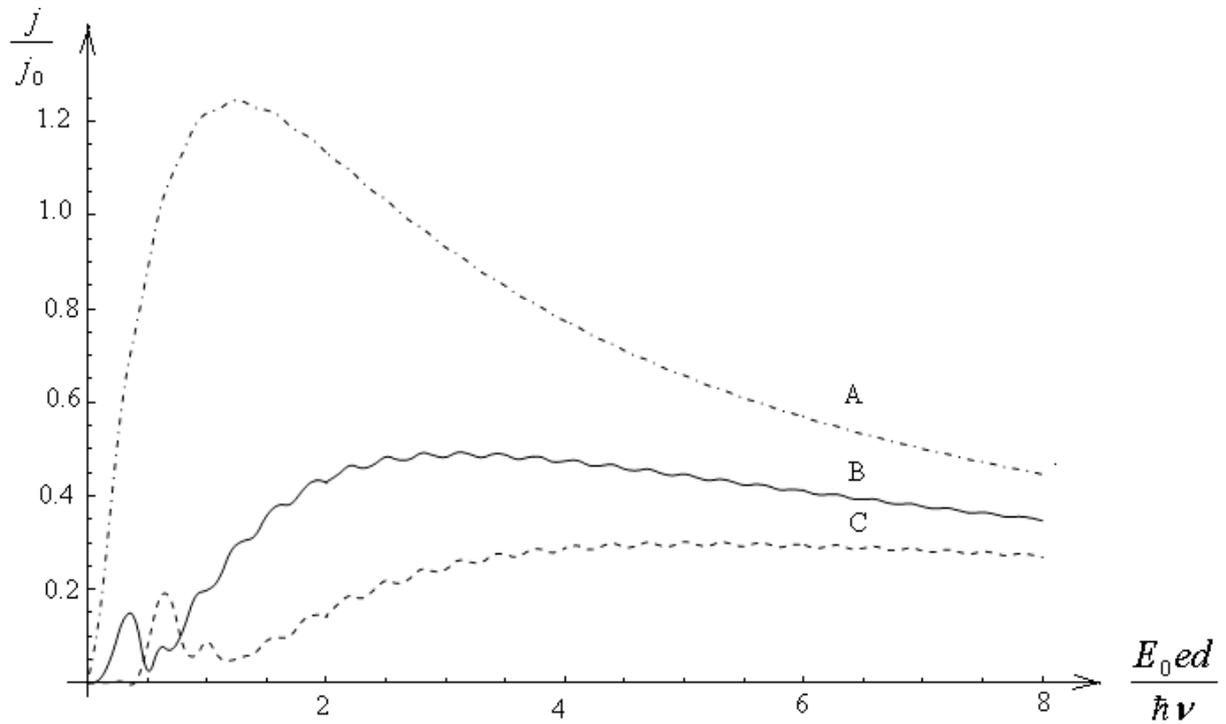


Рис. 1 Зависимость амплитуд первой (А), третьей (В) и пятой (С) гармоник от амплитуды напряженности переменного электрического поля в безразмерных единицах при  $\omega/\nu = 0.1$

Из графиков видно, что амплитуды гармоники тока с ростом амплитуды переменного поля испытывают сложные осцилляции. Это дает возможность в широком интервале значений управлять амплитудой данной гармоники с помощью переменного электрического поля.

На рис.2 представлены графики зависимости амплитуды третьей гармоники тока от амплитуды переменного поля для разных значений частоты  $\omega$ . Из графиков видно, что при фиксированном значении амплитуды переменного поля, изменяя частоту, можно добиться существенного подавления или усиления соответствующей гармоники.

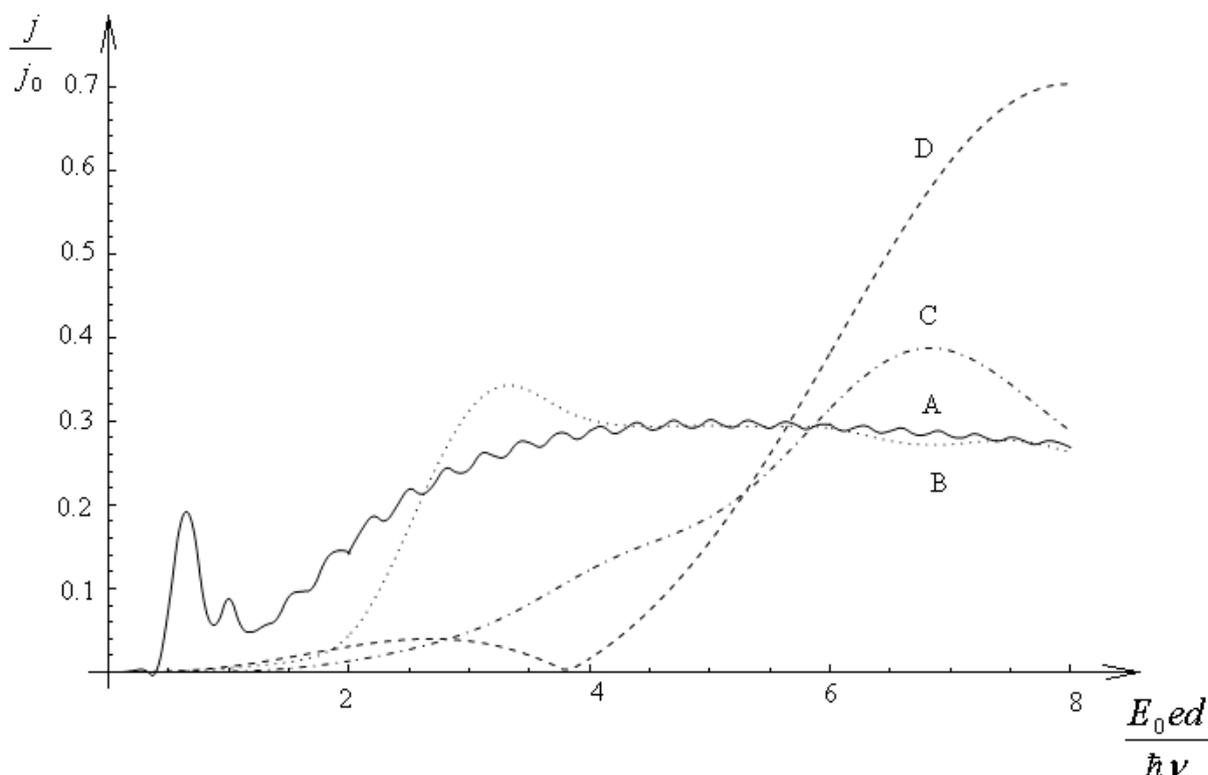


Рис. 2. Зависимость амплитуд третьих гармоник от амплитуды напряженности переменного электрического поля в безразмерных единицах при А)  $\omega/\nu = 0.1$ , В)  $\omega/\nu = 0.5$ , С)  $\omega/\nu = 1$ , D)  $\omega/\nu = 3$

Это позволяет управлять амплитудой данной гармоники с помощью частоты переменного электрического поля.

Работа поддержана грантом РФФИ №10-02-97001-р\_поволжье\_a.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ратников П. В. Письма в ЖЭТФ. 2009. Т.90. В.6. С.515.

2. Чернозатонский Л.А., Сорокин П.Б., Белова Е.Э. и др. Письма в ЖЭТФ. 2006. Т.84. В.3. С.141.
3. Чернозатонский Л.А., Сорокин П.Б., Белова Е.Э. и др. Письма в ЖЭТФ. 2007. Т.85. В.1. С.84.
4. Sevincli H., Topsakal M., Ciraci S. Phys. Rev. B. 2008. V.78. P.245402.
5. Крючков С.В., Кухарь Е.И., Яковенко В.А. Известия РАН. Серия физическая. 2010. Т.74. №.12. С.1759.

## ОСРЕДНЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ПЬЕЗОКОМПОЗИТОВ

В.И. Горбачев

*Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова.  
Механико-математический факультет, кафедра механики композитов  
[vigorby@mail.ru](mailto:vigorby@mail.ru)*

В работе рассматривается связанная краевая задача для упругого периодически неоднородного тела, обладающего пьезоэффектом – исходная задача.

Непосредственное численное решение уравнений исходной задачи затруднительно даже для современных быстродействующих ЭВМ. Поэтому и возникает вопрос о том, как заменить исходные уравнения с переменными коэффициентами более простыми уравнениями, решение которых было бы близко в некотором смысле к решению исходных уравнений. Такие более простые уравнения называются осредненными, или усредненными уравнениями. Как правило, они имеют постоянные коэффициенты. Те из постоянных коэффициентов, которые обеспечивают максимальную близость (опять же в некотором смысле) решений исходных и осредненных уравнений называются эффективными коэффициентами. Последнее можно принять за определение, что такое эффективные характеристики.

Наряду с исходной задачей рассматривается, так называемая, сопутствующая задача – задача для однородного тела той же формы и с теми же входными данными, что и в исходной задаче.

Получена интегральная формула представления решения исходной задачи через решение сопутствующей задачи. Интегральное представление формально решает задачу осреднения исходных уравнений. Из интегрального представления вытекает представление решения краевой задачи для неоднородного упругого тела в виде ряда по градиентам решения такой же краевой задачи для однородного (можно даже и изотропного) упругого тела. Коэффициенты ряда находятся из последовательности рекуррентных краевых задач с однородными граничными условиями в области занятой телом. Наилучшая сходимость рядов к точному решению исходных уравнений будет в том случае, когда в качестве коэффициентов сопутствующей задачи выбрать эффективные коэффициенты в смысле Хашина-Розена. Для нахождения эффективных коэффициентов неоднородного электроупругого тела дается постановка специальной краевой задачи. Показано, что в случае композита с регулярной структурой она сводится к нахождению периодического решения уравнений специальной краевой задачи на ячейке периодичности.

Подробно рассмотрен случай слоистого композита с чередующимися пьезоактивными компонентами.

## МИКРОВОЛНОВЫЙ ОТЖИГ ДЕФЕКТОВ В СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКЕ ТРИГЛИЦИНСУЛЬФАТ

С.В. Данилова<sup>1</sup>, Г.И. Овчинникова<sup>2</sup>, Ю.А. Пирогов<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup> *Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова*

<sup>1</sup> dsv\_msu@hotmail.com, <sup>2</sup> gio@physics.msu.ru, <sup>3</sup> yupi937@gmail.com

До недавнего времени проблема влияния электромагнитного излучения на физические свойства материалов и технологические характеристики приборов на их основе касалась в основном ионизирующего излучения. Радиационное воздействие стало и методом исследования и методом целенаправленного изменения структуры и свойств реальных материалов. Однако в последнее время появились работы [1,2], в которых сообщается об изменениях свойств материалов под воздействием микроволнового излучения. В [1] речь идет о микроволновой обработке полупроводниковых структур на частоте 2,45 ГГц, которая сопровождается в одних случаях деградацией, а в других улучшением параметров исследуемых структур. В [2] сообщается о подавлении низкочастотной аномалии диэлектрической проницаемости в одном из типичных водородсодержащих сегнетоэлектриков триглицинсульфате (ТГС) при длительном микроволновом облучении на частоте 40 ГГц. В обоих случаях ответственной за наблюдаемые эффекты считается релаксация внутренних дефектов и отмечается зависимость микроволновых эффектов от уровня структурного совершенства исследованных образцов. Подобные исследования пока носят единичный и разрозненный характер и для понимания процессов, происходящих при микроволновом облучении, необходимо дальнейшее изучение природы дефектов и их роли в каждом из наблюдаемых экспериментов.

В данной работе представлены результаты исследований микроволнового воздействия на сегнетоэлектрик ТГС, которые направлены на выяснение роли дефектов в отклике на микроволновое облучение и на определение условий, при которых воздействие приводит к деградации диэлектрических характеристик или к их улучшению. Улучшение характеристик при облучении, вызванное уменьшением степени дефектности кристалла, и будет рассматриваться как микроволновый отжиг дефектов.

Особенностью всех водородсодержащих сегнетоэлектриков является их подверженность процессам старения при долгом нахождении на воздухе. Старение образцов обычно связывают с миграцией естественных дефектов, с процессами диффузии и ориентационной реорганизации,

которые определяются физико-химическими явлениями на поверхности и в приповерхностном слое [3]. Для восстановления начальных характеристик образцов обычно производят отжиг накопившихся дефектов, нагревая образцы до определенных температур и выдерживая при этих температурах определенное количество времени. Благодаря высокой подвижности протонов структура кристаллов и связанные с поведением протонов свойства восстанавливаются за счет возвращения протонов на свои места. Это свойство водородсодержащих сегнетоэлектриков используется в работе для слежения за степенью дефектности кристаллов и для выяснения роли протонной подрешетки в самих процессах дефектообразования.

Все эксперименты были проведены на кристаллах ТГС, выращенных в сегнетоэлектрической фазе, и из монокристалла вырезались образцы в виде параллелепипеда с размерами сечения волновода, в котором производились измерения,  $5,2 \times 2,6 \text{ мм}^2$  и толщиной 4,5 мм. Полярная ось кристалла была ориентирована вдоль малого размера волновода и совпадала с направлением электрического вектора волны  $H_{10}$  в волноводе. Образцы помещались в короткозамкнутой секции волновода. Источником высокочастотного сигнала служил генератор Г4-141, работавший в непрерывном режиме. Удельная плотность мощности составляла  $\sim 10 \text{ мВт/см}^2$ . Изменялись температурные зависимости диэлектрической проницаемости в 8-мм диапазоне длин волн и в этом же частотном диапазоне проводились длительные (от 1-го до 5-ти часов) облучения кристаллов. Реакция на длительное микроволновое облучение фиксировалась по низкочастотным значениям диэлектрической проницаемости. В [2] было показано, что длительное облучение ТГС на частоте 40 ГГц приводит к подавлению аномалии низкочастотной диэлектрической проницаемости вблизи фазового перехода, измеряемой на частоте 1 кГц. Именно эта реакция на микроволновое облучение была использована для определения наличия или отсутствия отклика на облучение. Методики низкочастотных и высокочастотных измерений описаны в [2 и 4], соответственно.

В данной работе разная степень дефектности создавалась условиями отжига номинально чистых кристаллов. Отжигая образцы при разных температурах в течение одного и того же времени, мы достигали разной степени дефектности кристаллов при сохранении природы дефектов. Были приготовлены три образца, отожженные при температурах 115 °С, 90 °С и 80 °С, которые затем облучались длительное время (от 1-го до 5-ти часов) микроволнами.

На рис. 1 представлены зависимости низкочастотной диэлектрической проницаемости в точке максимума  $\epsilon_{\text{max}}$  от времени облучения (дозы) для трех кристаллов, отожженных перед облучением при разных

температурах. Облучение производилось при температуре образцов 40 °С. Заметим прежде всего, что начальная разная степень дефектности кристаллов определяется значениями диэлектрической проницаемости в максимуме до облучения кристаллов, а они отличаются более чем в два раза. Далее отметим, что характер отклика кристалла, отожженного при температуре 115 °С, который будем называть в дальнейшем совершенным кристаллом, качественно иной по сравнению с откликом дефектных кристаллов, отожженных при меньших температурах. В совершенном кристалле значения диэлектрической проницаемости уменьшаются, начиная с малых доз облучения, в то время как в дефектных кристаллах облучение приводит сначала к росту диэлектрической проницаемости, а затем к ее спаду. В дефектных кристаллах при больших дозах облучения  $\epsilon_{\max}$  уменьшается до значений, меньших уровня до облучения, но остается выше уровня, до которого падает значение  $\epsilon_{\max}$  в совершенных кристаллах.

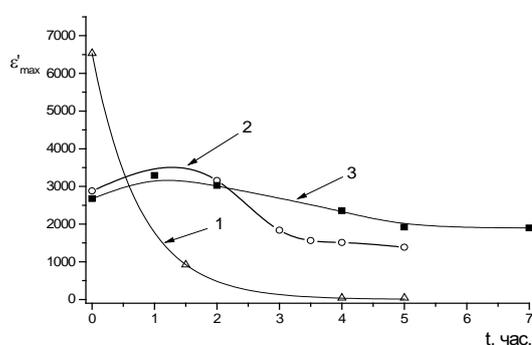


Рис. 1. Зависимость максимума действительной части диэлектрической проницаемости от времени облучения для кристаллов, отожженных в течение 3-х часов при температурах: (1) - 115°C, (2) - 90°C, (3) - 80°C.

Это означает, что чем менее дефектны исследуемые образцы, тем сильнее воздействие микроволн (подавление  $\epsilon_{\max}$ ) с увеличением времени облучения. В самом дефектном образце, отожженном при температуре 80°C, подавление составляет всего лишь 22% от начального уровня диэлектрической проницаемости (кривая 3) по сравнению с 99% в образце, отожженном при 115°C (кривая 1). Степень отжига дефектов микроволновым облучением можно оценить по отношению реального роста  $\Delta\epsilon_{\max}$  за счет облучения к разности значений совершенного и дефектных образцов. Для кристаллов, отожженных при 90°C, степень отжига составила 16%, для образцов, отожженных при 80°C - 12%.

Итак, рост диэлектрической проницаемости в более дефектных образцах (кривые 2 и 3 рис.3) соответствует отжигу дефектов, вызванному микроволновым облучением, в то время как ее подавление означает дополнительный рост дефектов. Оба процесса идут одновременно, но проявляются только в более дефектных кристаллах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.С. Болтовец и др.// Письма в ЖТФ 2002 Т.28. Вып. 4. С. 57-63.
2. В.К. Новик и др. // Изв. РАН сер.Физич. 2000 Т.64 № 4. С. 2452.
3. Е.В. Пешиков “Радиационные эффекты в сегнетоэлектриках”.  
Ташкент: ФАН. 1986 С.127.

## СОБСТВЕННЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ЗАМАГНИЧЕННЫХ 1D СВЕРХРЕШЕТКАХ НА ОСНОВЕ ПОЛУПРОВОДНИКА И ФЕРРОМАГНЕТИКА

С.В. Елисеева, Д.Г. Санников, Д.И. Семенов  
Ульяновский государственный университет  
sannikov-dg@yandex.ru

На протяжении последних лет ведутся активные исследования волновых свойств сверхрешеток (СР), состоящих из слоёв магнитных и немагнитных материалов [1,2]. Для СР на основе магнитных и полупроводниковых слоёв нахождение частотного спектра  $\omega(\vec{k})$  в случае произвольного соотношения периода СР и длины волны, а также при произвольных направлениях подмагничивающего поля  $\vec{H}_0$  и волнового вектора  $\vec{k}$  по отношению к оси периодичности  $\vec{n}$  представляет собой сложную аналитическую задачу, которая в настоящее время решена только для некоторых частных случаев. В этой связи для описания волновых процессов в СР используются приближенные методы, одним из которых является длинноволновое приближение, применяемое в тех случаях, когда период структуры намного меньше длины распространяющейся волны [3].

Настоящий доклад посвящен исследованию с помощью длинноволнового приближения дисперсионных свойств собственных волн, распространяющихся коллинеарно внешнему магнитному полю в различно ориентированных сверхрешетках «полупроводник-магнетик».

Рассмотрим 1D сверхрешётки, состоящие из чередующихся слоёв полупроводника и магнетика с толщинами  $l_s$  и  $l_f$ , так что период структуры  $l = l_s + l_f$ . Полагаем, что во внешнем статическом магнитном поле  $\vec{H}_0$  слои полупроводника и магнетика обладают одинаковыми тензорными диэлектрической (ДП) и магнитной проницаемостями (МП)

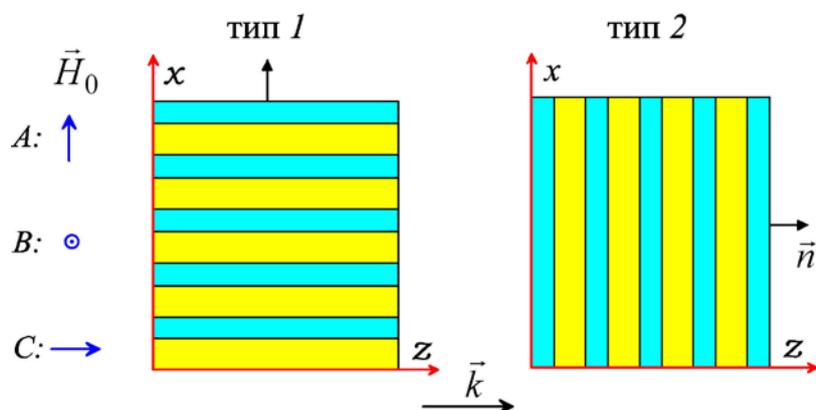


Рис.1. Два типа СР. Статическое магнитное поле  $\vec{H}_0$  приложено вдоль осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  (случаи  $A$ ,  $B$ ,  $C$  соответственно), волна распространяется вдоль оси  $z$ , вектор  $\vec{n}$

$\hat{\varepsilon}_s, \hat{\varepsilon}_f$  и  $\mu_s, \hat{\mu}_f$ . В зависимости от ориентации подмагничивающего поля  $H_0$ , которое может быть направлено вдоль каждой из координатных осей  $x, y, z$  (рис.1), меняется вид тензоров эффективных ДП и МП сверхрешетки  $\hat{\varepsilon}^{SL}$  и  $\hat{\mu}^{SL}$ . Ситуации  $A1, A2, B1, B2$  подробно рассмотрены в работе [4], поэтому далее будем анализировать наименее изученные случаи  $C1$  и  $C2$ , для которых поле  $H_0$  приложено вдоль оси  $z$ , а тензоры ДП и МП полупроводниковых и магнитных слоёв имеют вид

$$\hat{\varepsilon}_s = \begin{vmatrix} \varepsilon_s & \varepsilon_{sa} & 0 \\ -\varepsilon_{sa} & \varepsilon_s & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{s0} \end{vmatrix}, \hat{\mu}_s = \mu_s \hat{I}, \quad (1)$$

$$\hat{\varepsilon}_f = \begin{vmatrix} \varepsilon_f & \varepsilon_{fa} & 0 \\ -\varepsilon_{fa} & \varepsilon_f & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{f0} \end{vmatrix}, \hat{\mu}_f = \begin{vmatrix} \mu_f & \mu_{fa} & 0 \\ -\mu_{fa} & \mu_f & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{f0} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

В приведённых выражениях  $\hat{I}$  - единичный диагональный тензор с компонентами  $(\hat{I})_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ , где  $\delta_{\alpha\beta}$  - символ Кронекера.

Если электромагнитное излучение распространяется вдоль оси  $z$ , то электрическое и магнитное поля собственных волн в каждой из сред имеют вид  $\vec{E}, \vec{H} \propto \exp[i(\omega t - kz)]$ , где  $\omega$  - частота, а  $k$  - константа распространения волны в объёме материала. Для полупроводника компоненты тензора ДП

$$\varepsilon_s = \varepsilon_0 - \frac{\omega_p^2 (\omega + i\nu)}{\omega [(\omega + i\nu)^2 - \omega_c^2]}, \varepsilon_{sa} = -i \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega [(\omega + i\nu)^2 - \omega_c^2]}, \varepsilon_{s0} = \varepsilon_0 - \frac{\omega_p^2}{\omega (\omega + i\nu)}. \quad (3)$$

Здесь  $\varepsilon_0$  - решёточная часть ДП полупроводника,  $\omega_p = (4\pi n e^2 / m^*)^{1/2}$  - плазменная частота, где  $n, e$  и  $m^*$  - концентрация, заряд и эффективная масса носителей;  $\omega_c = eH_0 / m^* c$  - циклотронная частота;  $\nu$  - частота столкновений. Для магнетика компоненты  $\varepsilon_f, \varepsilon_{fa}, \varepsilon_{f0}$  определяются обычно эмпирическим путем, тогда как компоненты тензора МП

$$\mu_f = 1 + \frac{(\omega_H + i\alpha\omega)\omega_M}{(\omega_H + i\alpha\omega)^2 - \omega^2}, \mu_{fa} = -\frac{i\omega\omega_M}{(\omega_H + i\alpha\omega)^2 - \omega^2}, \mu_{f0} = 1 + \frac{i\alpha\omega_M}{\omega - i\alpha\omega_H}, \quad (4)$$

где  $\omega_H = \gamma H_0$ ,  $\omega_M = 4\pi\gamma M_0$ ,  $\alpha$  - параметр затухания [5].

Полагая, что длина волны распространяющегося в структуре излучения  $\lambda \gg l$ , СР можно характеризовать как однородную среду с эффективными материальными параметрами, которые находятся с

помощью процедуры усреднения, предложенной в [3]. В результате, для структуры первого типа (случай *C1*) отличные от нуля компоненты тензоров эффективной ДП и МП можно записать в виде:

$$\tilde{\varepsilon}_{xx} = \frac{\varepsilon_s \varepsilon_f l}{\varepsilon_f l_s + \varepsilon_s l_f}, \quad \tilde{\varepsilon}_{xy} = -\tilde{\varepsilon}_{yx} = \frac{\varepsilon_f \varepsilon_{sa} l_s + \varepsilon_s \varepsilon_{fa} l_f}{\varepsilon_f l_s + \varepsilon_s l_f}, \quad (5)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{yy} = \frac{1}{l} \left\{ \varepsilon_s^\perp l_s + \varepsilon_f^\perp l_f - \frac{[\varepsilon_{sa} l_s / \varepsilon_s + \varepsilon_{fa} l_f / \varepsilon_f]^2}{l_s / \varepsilon_s + l_f / \varepsilon_f} \right\}, \quad \tilde{\varepsilon}_{zz} = (\varepsilon_{s0} l_s + \varepsilon_{f0} l_f) / l,$$

$$\tilde{\mu}_{xx} = \frac{\mu_s \mu_f l}{\mu_f l_s + \mu_s l_f}, \quad \tilde{\mu}_{xy} = -\tilde{\mu}_{yx} = \frac{\mu_s \mu_{fa} l_f}{\mu_f l_s + \mu_s l_f}, \quad (6)$$

$$\tilde{\mu}_{yy} = \frac{1}{l} \left\{ \mu_s l_s + \mu_f^\perp l_f - \frac{(\mu_{fa} l_f / \mu_f)^2}{l_s / \mu_s + l_f / \mu_f} \right\}, \quad \tilde{\mu}_{zz} = (\mu_s l_s + \mu_{f0} l_f) / l.$$

Для структуры типа *C2* ненулевые компоненты тензоров эффективной ДП и МП имеют вид:

$$\tilde{\varepsilon}_{xx} = \tilde{\varepsilon}_{yy} = (\varepsilon_s l_s + \varepsilon_f l_f) / l, \quad \tilde{\varepsilon}_{xy} = -\tilde{\varepsilon}_{yx} = (\varepsilon_{sa} l_s + \varepsilon_{fa} l_f) / l, \quad \tilde{\varepsilon}_{zz} = \frac{\varepsilon_{s0} \varepsilon_{f0} l}{\varepsilon_{f0} l_s + \varepsilon_{s0} l_f}, \quad (7)$$

$$\tilde{\mu}_{xx} = \tilde{\mu}_{yy} = (\mu_s l_s + \mu_f l_f) / l, \quad \tilde{\mu}_{xy} = -\tilde{\mu}_{yx} = \frac{\mu_{fa} l_f}{l}, \quad \tilde{\mu}_{zz} = \frac{\mu_s \mu_{f0} l}{\mu_{f0} l_s + \mu_s l_f}. \quad (8)$$

Анализ уравнений Максвелла с учетом конкретного вида эффективных материальных параметров показывает, что случаям *C1* и *C2* отвечают волны эллиптической поляризации с правым и левым вращением. Константы распространения (эффективные волновые числа) собственных волн в случае *C1* записываются следующим образом:

$$k_{1,2} = \frac{k_0}{\sqrt{2}} \sqrt{a_1 + a_4 \pm \sqrt{(a_1 - a_4)^2 - 4a_2 a_3}}, \quad (9)$$

где параметры  $a_1 = \tilde{\varepsilon}_{yy} \tilde{\mu}_{xx} - \tilde{\varepsilon}_{xy} \tilde{\mu}_{xy}$ ,  $a_2 = \tilde{\varepsilon}_{xy} \tilde{\mu}_{xx} + \tilde{\varepsilon}_{xx} \tilde{\mu}_{xy}$ ,  $a_3 = \tilde{\varepsilon}_{yy} \tilde{\mu}_{xy} + \tilde{\varepsilon}_{xy} \tilde{\mu}_{yy}$ ,  $a_4 = \tilde{\varepsilon}_{xx} \tilde{\mu}_{yy} - \tilde{\varepsilon}_{xy} \tilde{\mu}_{xy}$ , а индексам 1 и 2 отвечают знаки «+» и «-» соответственно. В случае *C2* диагональные компоненты  $\tilde{\varepsilon}_{xx} = \tilde{\varepsilon}_{yy}$ ,  $\tilde{\mu}_{xx} = \tilde{\mu}_{yy}$ , поэтому собственные волны среды циркулярно-поляризованы, имеют компоненты  $E_\pm = E_x \pm iE_y$ ,  $H_\pm = H_x \pm iH_y$  и константы распространения

$$k_\pm = k_0 \sqrt{\tilde{\varepsilon}_\pm \tilde{\mu}_\pm} = k_0 \sqrt{(\tilde{\varepsilon}_{xx} \pm i\tilde{\varepsilon}_{xy})(\tilde{\mu}_{xx} \pm i\tilde{\mu}_{xy})}. \quad (10)$$

Для численного анализа выбраны параметры магнетика  $Y_3Fe_5O_{12}$  и полупроводника  $InSb$ . В структуре *C2* (рис.2а) дисперсионная кривая для волны с левым круговым вращением  $k_-(\omega)$  мало отличается от прямой, поскольку частотные зависимости эффективных параметров  $\tilde{\varepsilon}_- = \tilde{\varepsilon}_{xx} - i\tilde{\varepsilon}_{xy}$

и  $\tilde{\mu}_- = \tilde{\mu}_{xx} - i\tilde{\mu}_{xy}$  не проходят через резонанс. Низкочастотная ветвь право-круговой волны  $k_+$  при  $\omega = \omega_H$  асимптотически стремится к бесконечности из-за влияния магнитостатических спиновых колебаний. Высокочастотная ветвь неограниченно возрастает с ростом частоты и стремится к асимптоте  $k = \sqrt{\epsilon_0} \omega / c$ , что  $k_+$  аналогично поведению электромагнитной ветви колебаний в намагниченном до насыщения ферромагнетике [5].

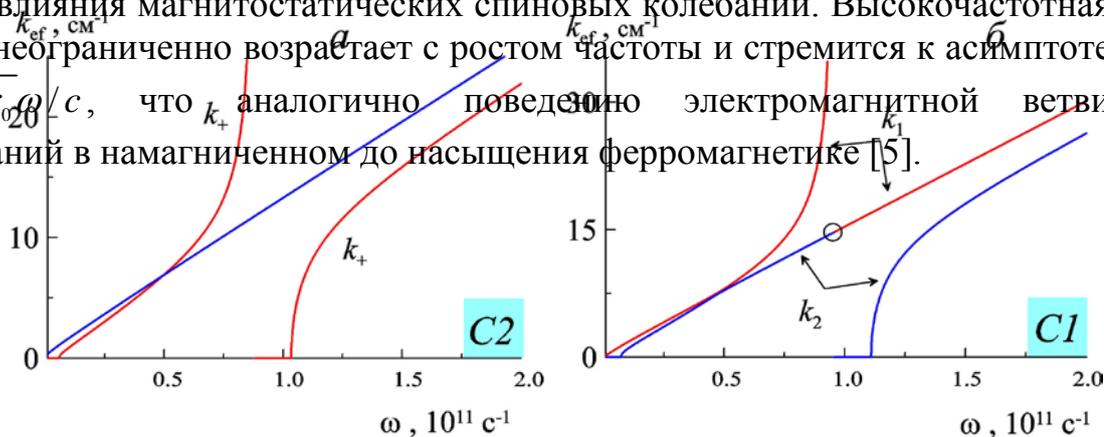


Рис.2. Закон дисперсии для право- и лево-поляризованных волн ( $k_+$  и  $k_-$ ) в

В случае *C1* в точке вырождения, обозначенной на рис.2б кружком, происходит взаимное изменение направления вращения полевых векторов по эллипсу поляризации.

В докладе рассматриваются также возможности управления эффективными ДП и МП и удельным фарадеевским вращением с помощью магнитного поля, частоты распространяющейся волны, изменения отношения толщин слоёв и уровня их легирования.

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг., мероприятие 1.3.1, ГК №П2603.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ф.Г. Басс, А.А. Булгаков, А.П. Тетервов “Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешётками”. М.: Наука. 1989.
2. I.L. Lyubchanskii, N.N. Dadoenkova, M.I. Lyubchanskii et al. // Physica Status Solidi A. 2004. V.201. Is.15. P.3338.
3. V.M. Agranovich // Solid State Comm. 1991. V.78. No.8. P.747.
4. S.V. Eliseeva, D.G. Sannikov, D.I. Sementsov // JMMM. 2010. V.322. Is.23. P.3807.
5. А.Г. Гуревич “Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках”. М.: Наука. 1973.

## О ВОЗМОЖНОСТИ ПРОЯВЛЕНИЯ ЦИКЛОТРОННОГО ЭХА В ГРАФЕНЕ

Д.В. Завьялов, В.И. Конченков, С.В. Крючков  
 Волгоградский государственный педагогический университет,  
 sed@fizmat.vspu.ru

Известно (см., например, [1, 2]), что в электронном газе с зависящей от энергии эффективной массой носителей тока должно наблюдаться циклотронное эхо. В настоящей работе на основе моделирования методом Монте-Карло изучена возможность существования циклотронного эха в графене. Нами рассматривался графен на подложке SiC, имеющий в своем спектре запрещенную зону с полушириной  $\Delta \approx 0.13 \text{ эВ}$  [3], что позволяет ограничиться однозонным приближением. Спектр носителей тока вблизи дна зоны проводимости в подобном материале имеет вид:

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \sqrt{(v_f p)^2 + \Delta^2}, \quad (1)$$

где  $v_f$  - скорость на поверхности Ферми ( $\approx 10^8$  см/с). На графен перпендикулярно его поверхности падают два импульса, разделенных некоторым интервалом времени. Квазиклассические уравнения движения принимают вид:

$$\frac{dq_x}{dt} = F \cdot \exp\left(-\frac{(t-t_0)^2}{a^2}\right) \cdot \cos(\omega(t-t_0)) + \exp\left(-\frac{(t-(t_0+T))^2}{a^2}\right) \cdot \cos(\omega(t-(t_0+t_1))) + \frac{Rq_y}{\sqrt{1+q_x^2+q_y^2}}, \quad (2)$$

$$\frac{dq_y}{dt} = -\frac{Rq_x}{\sqrt{1+q_x^2+q_y^2}}. \quad (3)$$

Здесь  $F = eE v_f \tau / T$ ,  $R = eH v_f^2 \tau / (cT)$  - безразмерные напряженности соответственно электрического  $E$  и магнитного  $H$  полей,  $q_{x,y} = p_{x,y} v_f / T$ ,  $\tau$  - среднее время релаксации (для графена полагаем  $\tau \approx 10^{-10}$  с),  $T$  - температура, выраженная в энергетических единицах (полагаем  $T \approx 100$  К), время  $t$  измеряется в единицах  $\tau$ . Причиной возникновения циклотронного эха в графене является зависимость эффективной массы носителей заряда от скорости, то есть эффект должен проявляться в бесстолкновительном режиме, что соответствует временам  $t \ll \tau$ . Используя метод обратной функции [4] для нахождения начальных

значений импульса, после усреднения скорости по ансамблю вычисляем зависимость плотности тока от времени (рис. 1, график приведен в безразмерных единицах). Два первых всплеска тока соответствуют падающим импульсам. Последний всплеск – циклотронное эхо. В качестве функции начального распределения вероятностей выбираем следующую:

$$f = \exp\left(\Delta / T - \sqrt{q^2 + (\Delta / T)^2}\right). \quad (4)$$

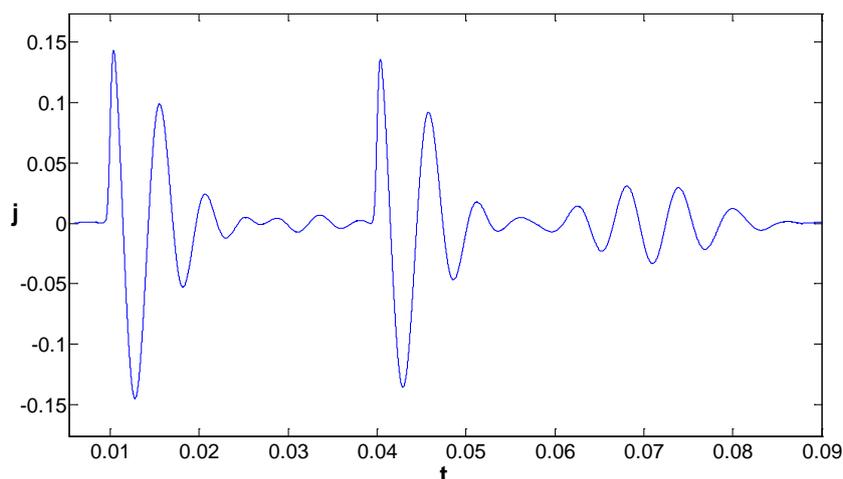


Рисунок 1.

Циклотронное эхо наиболее ярко проявляется при следующих значениях параметров:  $F = 5000$ ,  $H = 6000$ ,  $t_1 = 0.04$ ,  $t_0 = 0.01$ ,  $a = 0.001$ ,  $\omega \sim 1$ . Отметим, что спектр (1) дает довольно слабую зависимость эффективной массы от скорости частицы, поэтому для получения результатов с удовлетворительной точностью приходится вести расчет для сильных полей, что требует рассмотрения ансамбля из достаточно большого количества частиц (порядка  $10^4 - 10^5$ ). Детальный численный анализ показывает, что за время моделирования возникает не более 1 – 2 столкновений, что обосновывает использование бесстолкновительного приближения.

Работа поддержана грантом РФФИ №10-02-97001-р\_поволжье\_a.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В.Н. Павленко Успехи физических наук, Т. 141, № 3, С. 393 (1983).
2. Б.Б. Кадомцев // Успехи физических наук, Т. 95, № 1, С. 111 (1968).
3. S. Y. Zhou, G.-H. Gweon, A. V. Fedorov et al., // Nature Materials 2007, V. 6, P. 770.

4. В.А. Кашурников, А.В. Красавин “Численные методы квантовой статистики” М.: Физматлит, 2010.

## УПРУГИЕ СВОЙСТВА ОДНОМЕРНОЙ ГРАНУЛИРОВАННОЙ НЕКОНСОЛИДИРОВАННОЙ СРЕДЫ

А.И. Коробов, Ю.А. Бражкин, Н.В. Ширгина

МГУ им. М.В. Ломоносова

Natalia.shirgina@gmail.com

Исследование нелинейных эффектов, связанных с наличием мезомасштабных неоднородностей в твердых телах является интересным и перспективным направлением развития акустики на сегодняшний день. Особое положение среди структурно-неоднородных материалов занимают неконсолидированные гранулированные среды. [1-2]. Целью настоящей работы является исследование нелинейных упругих свойств 1-Д одномерной гранулированной неконсолидированной структуры. Упругие свойства цепочки одинаковых шаров описываются на основании закона Герца [3]:

$$F = \left[ (4E^* \sqrt{R}) h^{3/2} \right] / 3 \quad (1)$$

где  $h = (2R - d)/2$ ,  $E^* = E/(1 - \nu^2)$ ,  $E$ -модуль Юнга,  $\nu$  - коэффициент Пуассона шаров [3].

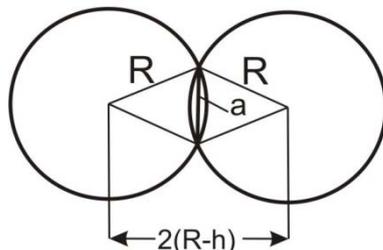


Рис. 1. Взаимодействие двух тел шарообразной формы

Выражение для механического напряжения  $\sigma$  в цепочке шаров имеет вид:

$$\sigma = \frac{F}{\pi R^2} = \frac{4E^*}{3\pi} \left( \frac{h}{R} \right)^{3/2} = \frac{4E^*}{3\pi} \varepsilon^{3/2} = K^* \varepsilon^{3/2} \quad (2)$$

где  $K = 4 E^*/3\pi$ ,  $\varepsilon = (h/R) = (h_0 + \tilde{h})/R = \varepsilon_0 + \varepsilon_{\sim}$  - общая деформация,  $\varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_{\sim}$  - статическая и переменные деформации в системе шаров. Раскладывая (2) в ряд Тейлора при  $\varepsilon = \varepsilon_0$  получим уравнение состояния для цепочки:

$$\sigma = \sigma(\varepsilon_0) + C\varepsilon + \frac{1}{2!} C'' \varepsilon^2 + \frac{1}{3!} C''' \varepsilon^3 + \dots \quad (3)$$

$$\text{Где } C(\varepsilon_0) = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon_0} = \frac{2E^*}{3\pi} (\varepsilon_0)^{3/2}, \quad C''(\varepsilon_0) = \left( \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varepsilon^2} \right)_{\varepsilon_0} = \frac{E^*}{\pi} (\varepsilon_0)^{-1/2},$$

$$C'''(\varepsilon_0) = \left( \frac{\partial^3 \sigma}{\partial \varepsilon^3} \right)_{\varepsilon_0} = -\frac{E^*}{2\pi} (\varepsilon_0)^{-(3/2)} - \text{эффективные модули упругости 2,3,4}$$

порядков цепочки.

В длинноволновом приближении уравнение движения имеет вид:

$$\rho \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (4)$$

При граничном условии при  $x=0$   $h(x=0, t) = A_1 \sin \omega t$  в приближении заданного поля решение системы уравнений (3-4) известно [4-5]:

$$\tilde{h} = A_1 \sin(\omega t - kx) + A_2 \sin[2(\omega t - kx)] + A_3 \sin[3(\omega t - kx)], \quad (5)$$

где  $A_1$  - амплитуда основной волны,  $A_2 = \frac{C''}{C} \frac{k^2 A_1^2}{8} x$  - амплитуда второй гармоники,

$A_3 = \frac{C'''}{C} \frac{k^3 A_1^3}{24} x$  - амплитуда третьей гармоники.

Из уравнений (5) и (4) с учетом (3) следует, что

$$\frac{A_2}{A_1^2} \sim \frac{C''}{C} \sim \frac{1}{\varepsilon_0}; \quad \frac{A_3}{A_1^3} \sim \frac{C'''}{C} \sim \frac{1}{\varepsilon_0^2} \quad (6)$$

Схема экспериментальной установки для исследования нелинейных свойств 1-Д цепочки спектральным методом приведена на рис. 2. Экспериментально измерялись зависимости амплитуды первых трех гармоник упругой волны от величины приложенной внешней силы.

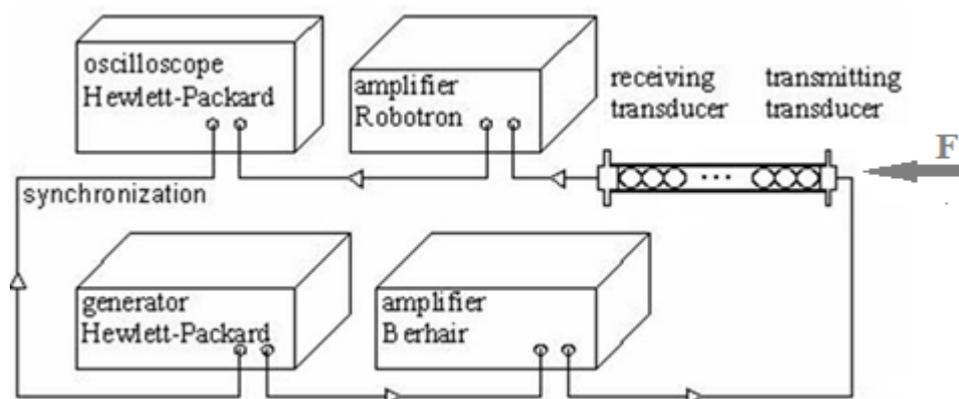


Рис. 2. Схема экспериментальной установки.

Одномерная гранулированная неконсолидированная 1-Д среда моделировалась цепочкой из 80 стальных шаров, диаметром 6,5 мм, помещенных в текстолитовую трубку. С торца трубы прикладывалась статическая сила  $F$ . Для возбуждения и приема упругих волн использовались пьезоэлектрические преобразователи. Исследование

нелинейных упругих свойств в 1-Д системе проводилось в интервале частот (2-10) кГц, где дисперсия упругих волн практически отсутствует [2]. На излучающий преобразователь с генератора НР 33120А после усиления подавался непрерывный гармонический сигнал постоянной амплитуды с частотой  $f=3$  кГц. Прошедшая через цепочку шаров упругая волна регистрировалась широкополосным преобразователем. Электрический сигнал с преобразователя поступал на цифровой осциллограф НР 54810а с функцией быстрого преобразования Фурье. В спектре прошедшего сигнала кроме основной частоты 3 кГц, регистрировались сигналы основной частоты, второй  $2f=6$ кГц и третьей  $3f=9$ кГц гармоник. Форма сигнала и его спектр при различных значениях силы  $F$  приведены на рис.3.

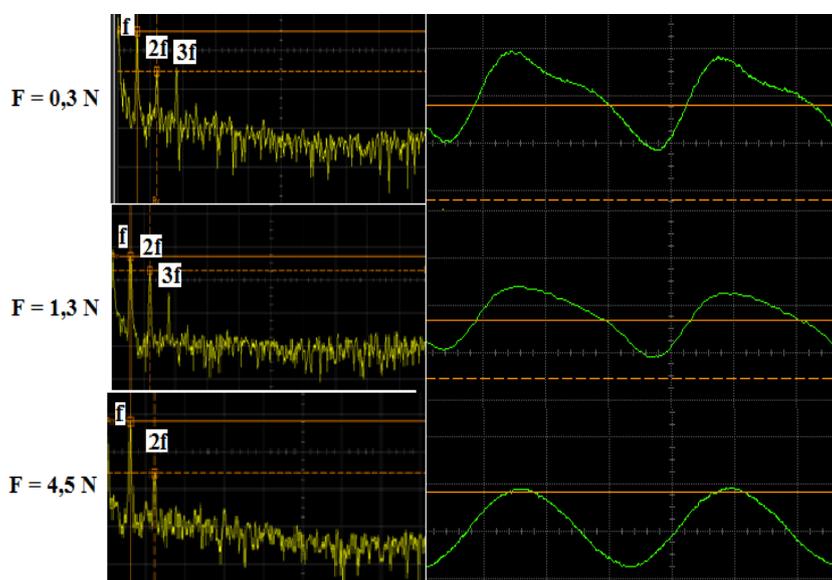


Рис. 3. Форма сигнала и его спектр при различных значениях статической силы  $F$ .

Экспериментально измерялись зависимости амплитуды первых трех гармоник упругой волны от величины внешней силы  $F$ . Отношения  $A_2/(A_1)^2$  и  $A_3/(A_1)^3$ , определенные из экспериментально определенных величин  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ , в зависимости от силы  $F$  приведены на рис 4а, 4б соответственно. На рис.4 также приведены теоретические аппроксимирующие зависимости (6) для 2-й и 3-й гармоник. Как видно на рис.4, экспериментальные зависимости удовлетворительно совпадают с аппроксимирующими зависимостями. Однако при увеличении силы  $F$  в интервале (1-3)Н наблюдается резкое увеличение величин  $A_2/(A_1)^2$  и  $A_3/(A_1)^3$ . Это объясняется следующим. Зазор между шарами и трубой по ее длине изменялся в пределах 0,1-0,5 мм. Также имелась дисперсия в размерах самих шаров. При внешнем поджатии происходило выдавливание одного или нескольких шариков за пределы основной

цепочки. Можно показать, что это вызывало уменьшение поджатия и увеличение упругой нелинейности системы шаров.

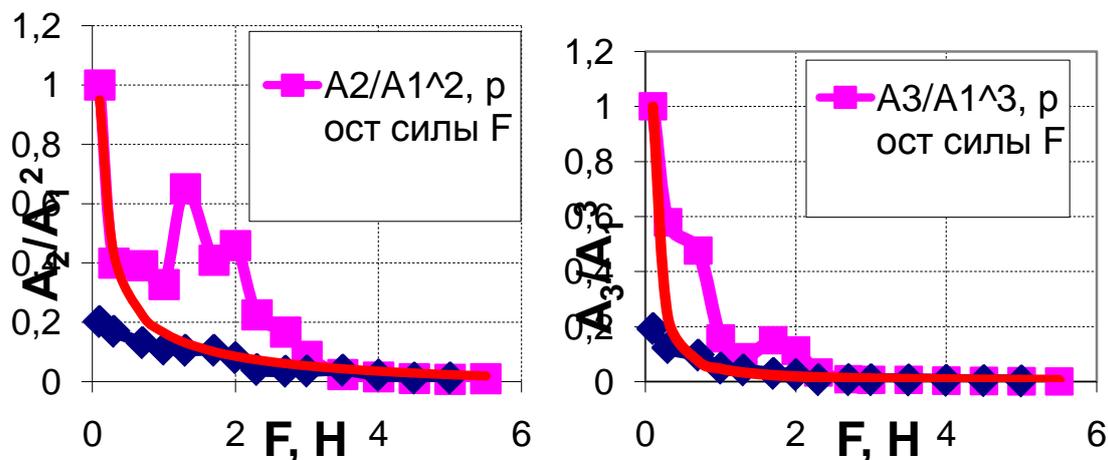


Рис. 4. Зависимости от внешней силы  $F$ : а) отношения амплитуды 2-й гармоники к квадрату амплитуды основной частоты; б) отношения амплитуды 3-й гармоники к кубу амплитуды основной частоты.

При уменьшении силы  $F$  наблюдалось хорошее совпадение  $A_2/(A_1)^2$  и  $A_3/(A_1)^3$  с аппроксимирующими кривыми. Несовпадение этих зависимостей при силе  $F < 1$  Н объясняется трением шаров о стенки трубы.

Проведенные исследования показывают, что 1-Д одномерная структура с нелинейностью Герца является системой с управляемой упругой нелинейностью.

Работа была выполнена в Центре коллективного пользования физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова по нелинейной акустической диагностике и неразрушающему контролю при поддержке гранта Президента Российской Федерации № НШ-4590.2010.2 и грантов РФФИ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. V. Tournat, V.E. Gusev. // Acta Acustica united with Acustica. V. 96 (2010) 208-224.
2. A.I. Korobov, Yu. A. Brazhkin, E.S. // Sovetskaya. (2010), Vol.56, No. 4, pp. 446-452.
3. Ландау Л.Д. Лифшиц Е.М. Теория упругости. М., Наука, 1978.
4. Р. Труэлл, Ч. Эльбаум, Б. Чик. Ультразвуковые методы в физике твердого тела. М. Мир, 1972 г.
5. Е.М. Баллад, Б.А. Коршак, В.Г. Можаяев, И.Ю. Солодов. // Вестник Московского Университета, 2001, С.3, №6, с .44-48.

## ЭФФЕКТ УВЛЕЧЕНИЯ В СВЕРХРЕШЕТКЕ НА ОСНОВЕ ГРАФЕНА В УСЛОВИЯХ ПОСТОЯННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

С.В. Крючков, Е.И. Кухарь, М.Н. Золотых  
 Волгоградский государственный педагогический университет  
[eikuhar@yandex.ru](mailto:eikuhar@yandex.ru)

В настоящее время возрос интерес к сверхрешеткам (СР) на основе графена [1]. Неаддитивность электронного спектра графена приводит к взаимному влиянию движений электрона вдоль взаимно перпендикулярных направлений. В [2] показано, что энергия движения электрона вдоль оси СР на основе графена периодически зависит от его квазиимпульса в этом направлении. Электронный спектр такой структуры можно записать приближенно в виде:

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \sqrt{\Delta^2 + v_F^2 p_y^2 + \frac{2\hbar^2 v_F^2}{d^2} \left(1 - \cos\left(\frac{p_x d}{\hbar}\right)\right)}, \quad (1)$$

где  $\Delta$  – энергетическое расстояние между положением середины запрещенной энергетической зоны щелевой модификации графена и положением дираковской точки бесщелевой модификации,  $v_F$  – скорость на поверхности Ферми,  $d$  – период СР,  $Ox$  – ось СР. Выражение (1) находится в согласии с моделью [2], если выполняется условие:

$$\gamma = \hbar v_F / d\Delta \ll 1. \quad (2)$$

В [3] изучено влияние постоянного поля на радиоэлектрический эффект в объемной СР. В [3] напряженности постоянного и осциллирующего электрических полей направлены вдоль одного направления. Благодаря неаддитивности спектра СР на основе графена ток увлечения оказывается возможным регулировать постоянным электрическим полем, напряженность которого направлена перпендикулярно напряженности электрического поля ЭМ волны.

В данной работе изучено влияние постоянного электрического поля, напряженность которого равна  $\mathbf{E}$ , на эффект увлечения носителей заряда ЭМ волной, распространяющейся вдоль слоев СР на основе графена (рис. 1).

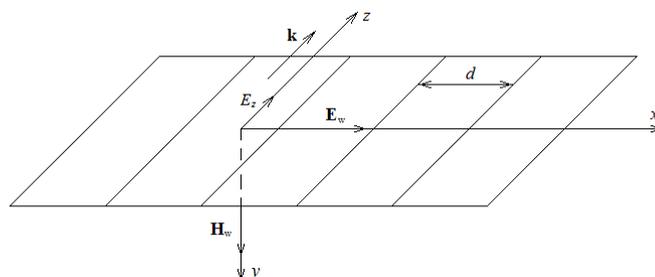


Рис.1.

Напряженности электрического и магнитного полей ЭМ волны имеют вид:

$$E_w(t) = E_0 \cos \omega t, \quad H_w(t) = H_0 \cos \omega t, \quad (3)$$

где  $\omega$  – частота волны,  $E_0$ ,  $H_0$  – амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей волны. В этих условиях плотность тока увлечения  $j_z$  в приближении постоянного времени релаксации  $\tau$  рассчитывается по следующей формуле:

$$j_z = -\frac{e}{\tau} \left\langle \int_{-\infty}^t dt' e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \sum_{\mathbf{p}} V_z(\mathbf{p}) f_0(\mathbf{p}'(t', \mathbf{p}, t)) \right\rangle, \quad (4)$$

где  $f_0(\mathbf{p})$  – равновесная функция распределения,  $V_z(\mathbf{p})$  – скорость электрона вдоль слоев СР,  $\mathbf{p}'(t', \mathbf{p}, t)$  – решение классического уравнения движения электрона:

$$\frac{d\mathbf{p}'}{dt'} = -e\mathbf{E} - e\mathbf{E}_w(t') - \frac{e}{c} [\mathbf{V}'(t'), \mathbf{H}_w(t')] \quad (5)$$

с начальным условием  $\mathbf{p}'(t' = t, \mathbf{p}, t) = \mathbf{p}$ . Плотность тока (4) можно представить в виде суммы:

$$j_z = j_{np}(E_z) + j_{ps}(E_0^2) + j_1(E_0^2, E_z), \quad (6)$$

где  $j_{np}(E_z)$  – ток проводимости, вызванный наличием постоянного поля вдоль оси  $Oz$ ,  $j_{ps}(E_0^2)$  – радиоэлектрический ток, индуцированный ЭМ волной вдоль оси  $Oz$ ,  $j_1(E_0^2, E_z)$  – ток, возникающий при одновременном действии ЭМ волны и постоянного поля. Введем обозначения:  $q_x = p_x d / \hbar$ ,  $q_z = p_z d / \hbar$ ,  $\varphi(t) = edA_x(t) / \hbar c$ ,  $\omega_{st} = edE_z / \hbar$ , причем считаем, что  $\omega_{st} \tau \ll 1$ . В первом неисчезающем приближении по  $\omega_{st}$  для слагаемого  $j_1$  получаем следующее выражение:

$$j_1 = \frac{3e^2 \Delta^3 d^3}{2c \hbar^3 \tau \theta} \omega_{st}^2 \left\langle \int_{-\infty}^t H(t_1) dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 (t_2 - t_1)^2 e^{-\frac{t-t_2}{\tau}} \sum_{\mathbf{p}} f_0(\mathbf{p}) \times \right. \\ \left. \frac{\gamma^7 q_z^2}{(1 + \gamma^2 q_z^2)^{7/2}} \left( \frac{1}{\gamma^2} - \frac{\sin^2 q_x \sin(\varphi - \varphi_2)}{1 + \gamma^2 q_z^2} + \frac{(2\gamma^2 q_z^2 - 3) \sin^2 q_x \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{1 + \gamma^2 q_z^2} - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\gamma^2 (2\gamma^2 q_z^2 - 3) (2 \sin^2 q_x \sin((\varphi + \varphi_1) / 2 - \varphi_2) \cos(\varphi - \varphi_1) - \sin^2 q_x \cos q_x \sin(\varphi + \varphi_1 - 2\varphi_2))}{(1 + \gamma^2 q_z^2)^2} \right) \right\rangle, \quad (7)$$

где  $A_x$  – проекция векторного потенциала, определяемая формулой:  $E_w(t) = -(1/c) \partial A_x / \partial t$ ,  $\varphi_1 = \varphi(t_1)$ ,  $\varphi_2 = \varphi(t_2)$ . Численный анализ выражения (7) показал, что зависимость плотности тока  $j_1$  от интенсивности ЭМ волны имеет характер осцилляций.

Работа поддержана грантом РФФИ № 10-02-97001-р\_поволжье\_a.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л.А. Чернозатонский и др. // Письма в ЖЭТФ. 2006. Т.84. №.3. С.141.
2. П.В. Ратников // Письма в ЖЭТФ. 2009. Т. 90. №. 6. С. 515.

3. Э.М. Эпштейн // Изв. вузов СССР. Радиофизика. 1981. Т. 24. №. 4.  
С. 514

## ПРЕДЕЛЬНОКОРОТКИЙ ОПТИЧЕСКИЙ ИМПУЛЬС В СРЕДЕ УГЛЕРОДНЫХ НАНОТРУБОК С АДСОРБИРОВАННЫМ АТОМАРНЫМ ВОДОРОДОМ

Н.Г. Лебедев<sup>1</sup>, А.С. Попов<sup>1</sup>, А.В. Пак<sup>1</sup>, М.Б. Белоненко<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Волгоградский Государственный Университет

<sup>2</sup>Волгоградский Институт Бизнеса

nikolay.lebedev@volsu.ru

Возросший в последнее время интерес к нелинейным явлениям значительно стимулировал создание материалов, способных проявлять нелинейные свойства в легко достижимых экспериментально условиях. Одним из таких материалов являются углеродные нанотрубки [1]. Углеродные нанотрубки легко адсорбируют на своей поверхности различные примеси, и учет взаимодействия собственно электронной системы нанотрубок представляет сложную задачу [2]. Учет взаимодействия электронов нанотрубок и электронов примеси может привести качественному изменению энергетического спектра (например, образованию щели в спектре).

Наиболее простым способом учитывать взаимодействие электронов собственно нанотрубок и электронов примеси является модель Андерсона [3]. В модели учитывается только гибридизация электронных подсистем. Периодическая модель Андерсона – рассматривает две группы электронов: коллективизированные s-электроны и локализованные d-электроны. Коллективизированные частицы являются свободными, а локализованные взаимодействуют между собой посредством кулоновского отталкивания на одном узле. В отличие от sd-модели взаимодействие осуществляется между s- и d- электронами не за счет обменных сил, а посредством гибридизации.

В общем виде периодическая модель Андерсона определяется гамильтонианом:

$$H = \sum_{ij\sigma} t_{ij} c_{i\sigma}^+ c_{j\sigma} + \varepsilon_d \sum_{i\sigma} n_{i\sigma}^d + U \sum_i n_{i\uparrow}^d n_{i\downarrow}^d + \sum_{ij\sigma} (V_{ij} c_{i\sigma}^+ d_{j\sigma} + V_{ij}^* d_{j\sigma}^+ c_{i\sigma}) \quad (1)$$

где  $c_{j\sigma}$  ( $c_{j\sigma}^+$ ) и  $d_{j\sigma}$  ( $d_{j\sigma}^+$ ) - ферми-операторы, описывающие s- и d- электроны соответственно, а  $n_{i\sigma}^d = d_{i\sigma}^+ d_{i\sigma}$  - число d-электронов со спином  $\sigma$  на узле  $i$ ,  $\varepsilon_d$  - энергетический уровень d-электрона на узле,  $V_{ij}$  - параметр гибридизации. Эта модель описывает возникновение локализованных атомных моментов, Кондо-изоляторы, тяжелые фермионы, промежуточную валентность.

В работе рассматривается ультракороткий оптический импульс, распространяющийся в двумерном массиве углеродных нанотрубок.

Вектор напряженности электрического поля направлен вдоль оси трубки, а электромагнитная волна движется в поперечном направлении вдоль оси  $x$  (рис. 1).

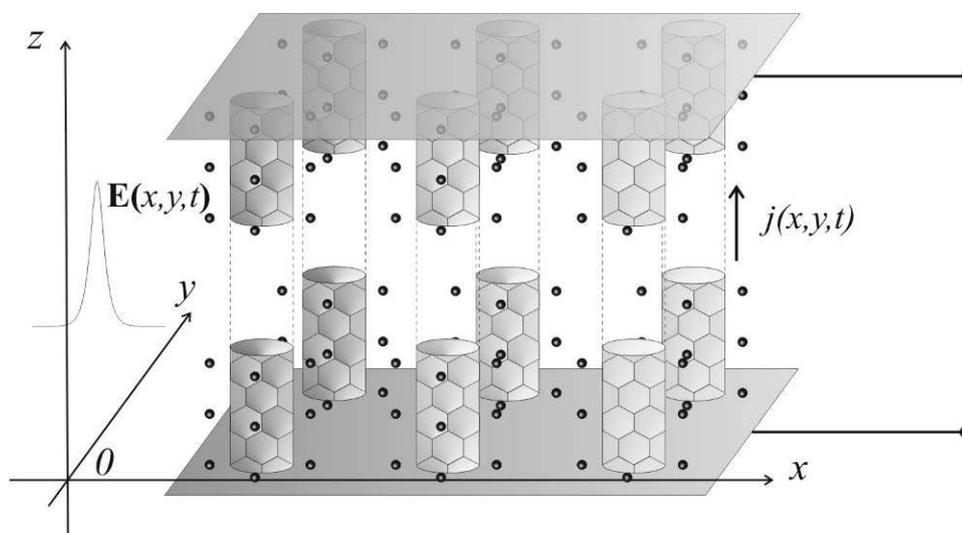


Рис. 1. Геометрия задачи

Выражение для зонной структуры УНТ, измененной в результате адсорбции атома водорода, будет иметь вид [4]:

$$E(p) = \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_a + \varepsilon_p \pm \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_p)^2 + 4|V_{ka}|^2} \right] \quad (2)$$

где  $V_{ka}$  - энергия гибридизации,  $\varepsilon_p$  - зонная структура идеальной УНТ:

$$\varepsilon_p = \pm \gamma \sqrt{1 \pm 4 \cos(ap_z) \cos\left(\frac{\pi s}{n}\right) + 4 \cos^2\left(\frac{\pi s}{n}\right)} \quad (3)$$

где  $\gamma \approx 2.7$  эВ,  $a = 3b/2\hbar$ ,  $b = 0.142$  нм - расстояние между соседними атомами углерода, квазиимпульс  $\mathbf{p}$  имеет компоненты  $(p_z, s)$ , где  $p_z$  - компонента импульса электрона вдоль оси нанотрубки,  $s = 1, 2, \dots, n$  - число, которое характеризует квантование импульса вдоль периметра нанотрубки. Разные знаки в (3) относятся к зоне проводимости и валентной зоне.

Моделирование прохождения ультракороткого импульса осуществлялось из тех же предпосылок, что и в работах [5, 6]. Начальный профиль импульса поля имел гауссов вид. Предельно короткий импульс, при использовании исходного дисперсионного соотношения (2), разделялся на два, которые имели существенно разную амплитуду.

В данной работе внимание сосредоточено на результатах, соответствующих импульсу, распространяющемуся в системе УНТ, с учетом примесей, адсорбированных на поверхности УНТ. На рисунке 2 представлен срез отношений интенсивностей при различных значениях энергии адатома в момент времени  $t = 4.43 \cdot 10^{-12}$  с. При малых значениях

энергии фронт основного импульса искажается.

Предложена модель и получено эффективное уравнение, описывающее динамику предельно короткого двумерного лазерного импульса в пучках УНТ с учетом примесей, адсорбированных на поверхности углеродных нанотрубок.

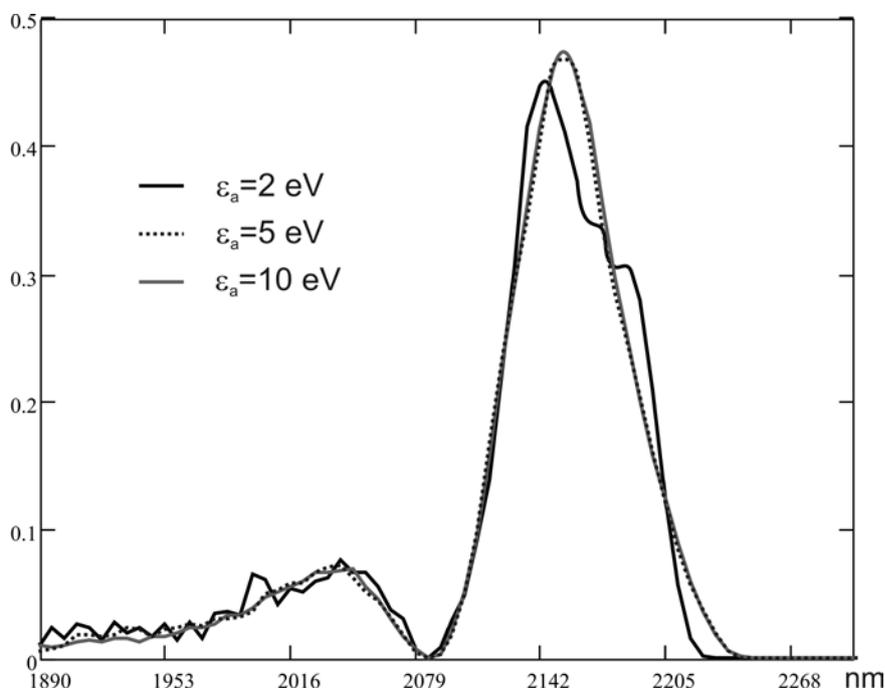


Рис. 2. Внешний вид распределения интенсивности  $I$  электромагнитного импульса в зависимости от энергии адсорбированного атома при  $t=4.43 \cdot 10^{-12}$  с для двумерной задачи.

Численные расчеты показали, что при использовании этой модели возможны устойчивые нелинейные волны.

Изменение формы импульса при прохождении массива УНТ зависит от энергии адатома  $\epsilon_a$ .

Работа проведена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы (проект № НК-16(3)).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дьячков П.Н. Электронные свойства и применение нанотрубок. М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2010. 488 с.
2. Раков Э.Г. // Успехи химии. 2001. Т. 70. № 10. С. 934 – 973.
3. Anderson P.W. // Phys.Rev. 1961. №124. 41.
4. Изюмов Ю.А., Чашин Н.И., Алексеев Д.С. Теория сильно коррелированных систем. Метод производящего функционала. Москва. «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. 384 с.
5. М.Б. Белоненко, Н.Г. Лебедев, А.С. Попов. Письма в ЖЭТФ. 2010.

№91. 506.

6. М.Б. Белоненко, А.С. Попов, Н.Г. Лебедев // ПЖТФ. 2011. №37.  
51.

## УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРЕМЕННОЙ НАГРУЗКИ

О.Б. Москаленко<sup>1</sup>

<sup>1</sup>МГУ им. М.В. Ломоносова

[olga@moskalenko.org](mailto:olga@moskalenko.org)

Рассматривается изгиб неоднородного по длине стержня с переменным поперечным сечением при сжатии переменной как по координате, так и по времени нагрузкой. Ось стержня, проходящая через центры тяжести всех поперечных сечений, - прямая линия. Изгиб такого стержня в статическом случае описывается дифференциальным уравнением четвертого порядка с переменными коэффициентами [1]

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{d}{dx} \left[ W(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right] - T(x) \frac{du}{dx} \right\} = 0.$$

Здесь  $u(x)$  - прогиб оси стержня в точке с координатой  $x$ ,  $W(x) = E(x)J(x)$  - жесткость стержня при изгибе,  $T(x)$  - осевое усилие в сечении с координатой  $x$  в прямолинейном стержне в момент потери устойчивости (начальное внутреннее усилие),  $E(x)$  - модуль Юнга,  $J(x)$  - момент инерции сечения.

Изучается случай потери устойчивости прямолинейной формы равновесия стержня, при котором наряду с прямолинейной формой возможна искривленная. Эту операцию удастся выполнить только в сравнительно простых случаях. Для решения уравнения с переменными коэффициентами применим метод осреднения [2], [3]. В работе рассматривается метод тензоров Грина (МТГ).

МТГ применим к линейным уравнениям с произвольной зависимостью коэффициентов от координат, в том числе и периодической [5]. Он основан на возможности интегрального представления решения исходной задачи для линейного уравнения с переменными коэффициентами через соответствующий тензор Грина и решение такой же задачи для уравнения с постоянными параметрами.

Функция Грина  $G(x, \xi)$  находилась методом возмущений. Для этого с помощью замены в уравнениях  $T(x)$  на  $\kappa T(x)$  был введен безразмерный возмущающий параметр  $\kappa$ . Функция Грина представлялась в виде ряда по степеням параметра  $\kappa$

$$G(x, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n G_n(x, \xi).$$

Для коэффициентов разложения получены рекуррентные обыкновенные дифференциальные уравнения четвертого порядка, которые легко интегрируются. Единственное решение выделяется из условий периодичности. Для случая, когда  $G(x, \xi) \approx G_0(x, \xi)$  и  $G(x, \xi) \approx G_0(x, \xi) + G_1(x, \xi)$  приближенное решение уравнения устойчивости сравнивалось с известным точным решением для однородного трехступенчатого стержня под действием сосредоточенной силы в некотором промежуточном сечении. Показано хорошее совпадение приближенных результатов с точными решениями. Учет большего количества членов ряда позволяет еще лучше приблизиться к точному решению.

В динамическом подходе к проблеме устойчивости считается, что при потере устойчивости стержень не просто переходит в другую, изогнутую форму равновесия, а начинает колебаться в поперечном направлении [6]. Уравнение поперечных колебаний получается из статического уравнения, если в его правую часть, в соответствии с принципом Даламбера, добавить

погонную поперечную силу инерции  $q(x) = -\rho(x)F(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ W(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - T(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} \right\} + m(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

Здесь  $w(x, t)$  - поперечное перемещение.

С помощью МТГ удалось выписать интегральное представление решения и получить приближенное решение уравнение устойчивости. Было проведено сравнение полученного результата с известными точными решениями в некоторых частных случаях и показано хорошее совпадение.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н.А. Алфутов “Основы расчета на устойчивость упругих систем” М.: Машиностроение, 1997.
2. Б.Е. Победря “Механика композиционных материалов” М.: МГУ, 1984.
3. В.И. Горбачев // Современные проблемы механики и математики, 2009, т.2, №2.
4. Н.С. Бахвалов, Г.П. Панасенко “Осреднение процессов в периодических средах” М.: Наука, 1984.
5. В.И. Горбачев // Вестник МГУ, 2000, №6.
6. В.В. Болотин “Динамическая устойчивость упругих систем” М.: Гостехиздат, 1956.

## РЕФРАКЦИЯ ПУЧКА НА ИНДУЦИРОВАННОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ В ПРИБЛИЖЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Р.Ю. Пепа, А.П. Сухоруков, А.А. Калинович  
МГУ им.М.В. Ломоносова, физический факультет  
[pepa@physics.msu.ru](mailto:pepa@physics.msu.ru)

В последнее время бурно развивается методы управления светом с помощью света, что привлекает большой научный интерес. Ранее было показано механизм взаимодействия в квадратично-нелинейной среде, где мощная основная волна создает на второй, сигнальной частоте, индуцированную поперечную неоднородность показателя преломления, причем максимум интенсивности накачки соответствует минимуму показателя преломления. При прохождении через неоднородность второй пучок испытывает рефракцию, происходит взаимное отталкивание пучков. В результате этого траектория сигнального пучка искривляется и может произойти полное внутренне отражение. Если перейти на язык квазичастиц, то параметрическое отражение напоминает упругое столкновение и рассеяние. В этом случае эффективная поперечная неоднородность на сигнальной частоте повторяет профиль интенсивности основной волны. Таким образом параметрическое отражение может быть использовано для полностью оптического переключения в пространстве и для создания параметрического волновода. В данной работе исследуется рассеяние плоской оптической волны на индуцированной неоднородности в приближении геометрической оптики.

Неколлинеарное трёхчастотное параметрическое взаимодействие волновых пучков описываются уравнениями параболического типа. Чтобы описать траекторию сигнального пучка и определить порог полного нелинейного отражения был применен метод геометрической оптики. С помощью метода характеристик были получены уравнения траектории сигнальной волны в среде с индуцированной неоднородностью:

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{a^2 \theta_2^2}{r^3} - \frac{\partial e^{-Dr^2}}{\partial r}, \quad (1)$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = a \theta_2 / r^2. \quad (2)$$

где  $a = \varphi_2 r_0$  – прицельный параметр,  $\varphi_2$  – полярный угол наклона сигнального пучка в начальной точке траектории с координатой  $r = r_0$ ,  $D$  – ширина индуцированной неоднородности. Заметим, что  $r^2 \frac{d\varphi}{dz} = const$ . Это

соотношение аналогично закону сохранения момента импульса частицы, движущейся в центральном поле  $U=U(r)$ .

При анализе траектории, лежащей в плоскости  $\varphi_2 = 0$ , можно положить  $A_1 = E_1(x)$  и уравнение траектории в таком случае сильно упрощается:

$$\frac{d^2 x}{dz^2} = -\frac{\partial e^{-x^2}}{\partial x}. \quad (3)$$

Численное решение системы уравнений (1-2) представлено ниже на рисунках. Траектории лучей сигнальной волны при различных значениях амплитуды накачки.

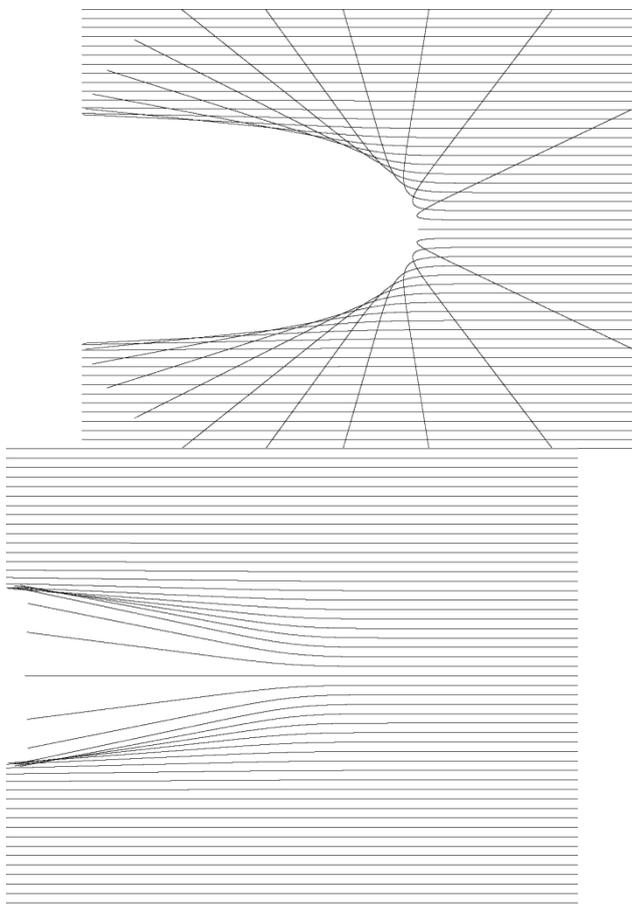


Рис.1 Траектории лучей плоской сигнальной волны при разных значениях амплитуды накачки

Геометрооптическая теория дает много важной информации об индуцированном отражении, но она не описывает дифракционные и интерференционные эффекты. Поэтому в дальнейшем планируется провести численное моделирование полной системы уравнений (1) и

сравнить результаты геометрической теории с теорией волнового отражения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М.Б. Виноградова, О.В Руденко, А.П. Сухоруков “Теория волн” М.: Наука, 1997.
2. В.Е. Лобанов// Известия РАН. Серия физическая. 2006. Т.69. № 12. С. 1775
4. И.И. Ольховский. Курс теоретической механики для физиков. М.: Наука, 1970.

## УЛЬТРАКОРОТКИЙ ОПТИЧЕСКИЙ ИМПУЛЬСЬ В СРЕДЕ УГЛЕРОДНЫХ НАНОТРУБОК С СЕТКОЙ ИЗ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

А.С. Попов<sup>1</sup>, М.Б. Белоненко<sup>2</sup>, Н.Г. Лебедев<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Волгоградский Государственный Университет*

<sup>2</sup>*Волгоградский Институт Бизнеса*

A.Popov.VolSU@gmail.com

Развитие новых технологий привело к значительному прогрессу в изучении традиционных веществ с точки зрения практики [1]. В этом заслуга, как быстрого прогресса вычислительной техники, так и с заинтересованность физики в изучении нелинейных динамических процессов [2]. А благодаря применению мощных лазеров и обеспечению уникальной точности оптических измерений ученым удалось существенно продвинуться и в экспериментальном аспекте изучения нелинейных явлений.

Большим плюсом является то, что нелинейные оптические явления наблюдаются в широком круге веществ, зачастую весьма далекими друг от друга физическими свойствами. Очевидно, что вещество, выбранное в качестве объекта исследования, должно быть как с ярко выраженными нелинейными свойствами, так и, с другой стороны, это должно быть вещество, широко применимое в практических приложениях. Углеродные нанотрубки привлекают исследователей все больше и больше в последнее время. Это обуславливается их уникальными свойствами. Их малый (нанометровый) диаметр и микронная длина позволяют считать их наиболее близкими по своей структуре к идеальным одномерным (1D) системам [3], что делает их привлекательными для использования в области нано- и микроэлектроники. Дальнейшее же изучение свойств УНТ привело к изучению в них разного рода нелинейно-оптических явлений.

Так одним из перспективных направлений является изучение распространения оптических солитонов и световых пульс в УНТ [4-8]. Так как спектр солитонов достаточно широк, то их создание и доставка их до объекта исследования, очевидно, найдет применение в спектроскопии и материаловедении.

Несмотря на то, что в вышеупомянутых работах [4-8] была предсказана возможность существования электромагнитных солитонов и зависимость их характеристик от параметров УНТ, остался ряд вопросов, требующих дальнейшего уточнения. В частности, за пределами рассмотрения остались вопросы, связанные с выходом за рамки одномерного приближения и решения задачи о распространении оптического импульса с учетом поперечной дисперсии. Другая, не менее

интересная задача - об обогащении спектрального состава электромагнитной волны, проходящей сквозь систему УНТ, так как спектр реальной солитоноподобной волны, хотя и достаточно широк, но, все же, ограничен. Все перечисленные выше обстоятельства делают проблему исследования нелинейных динамических процессов в УНТ актуальной как для теории, так и для практики.

При построении модели распространения ультракороткого оптического импульса в двумерном массиве УНТ считаем, что вектор напряженности электрического поля направлен вдоль оси трубки, а электромагнитная волна движется в поперечном направлении (рис. 1). УНТ считаем идеальными, имеющими зигзагообразную модификацию и ориентированными в пространстве примерно в одном направлении.

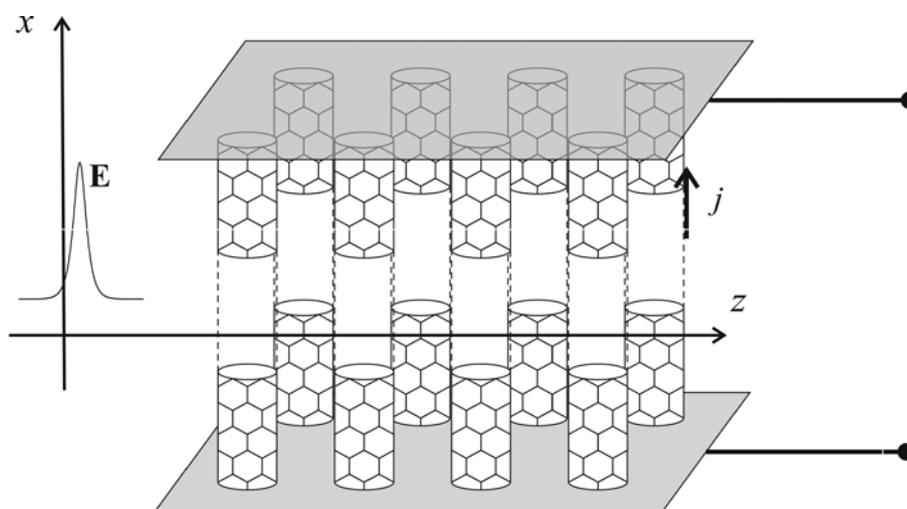


Рис. 1. Геометрия задачи

Неоднородность двумерного массива углеродных нанотрубок моделировалась сеткой из металлической проволоки малого диаметра ( $\sim 32$  нм), помещенной в рассматриваемый массив углеродных нанотрубок.

Для определения тока в области занимаемой металлической проволокой, считалось, что в области, занимаемой проволокой, выполняется закон Ома:  $j = \sigma E = -\sigma \frac{\partial A}{c \partial t}$ , где  $\sigma$  – комплексная проводимость, которая в общем случае зависит от частоты приложенного поля.

Рассмотрение проводилось для УНТ (8,0). На Рис. 2 приведен пример распространения световой пули через массив нанотрубок типа (8,0) с сеткой из неоднородностей (три слоя).

Очевидно, что часть энергии рассеивается на решетке неоднородностей, однако, волна проходит. Фронт импульса скругляется, а сам импульс сокращается. Таким образом, решетка из неоднородностей

может быть использована для сжатия сверхкоротких импульсов, что может иметь практическое применение.

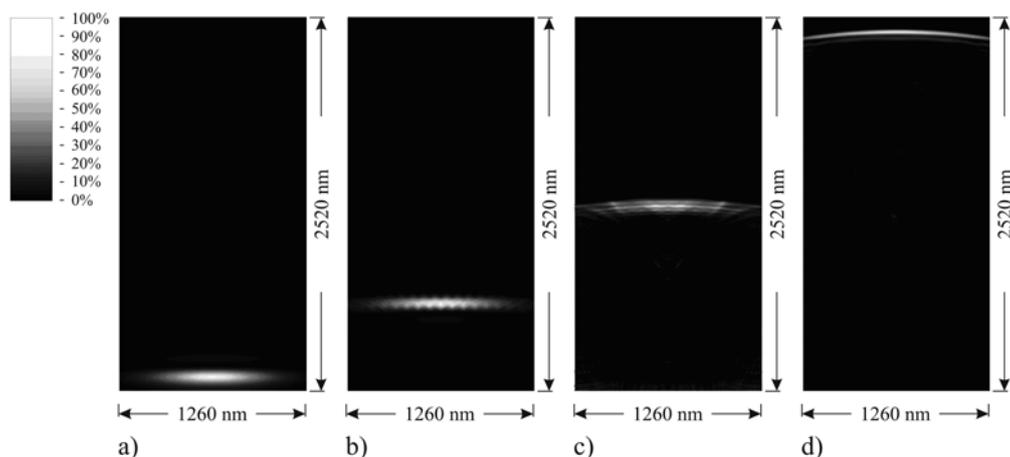


Рис. 2. Прохождение световой пули через массив нанотрубок типа (8,0) с сеткой из неоднородностей (три слоя). Изображена зависимость  $I(x, y, t) = E^2(x, y, t)$  в различные моменты времени: а) исходная форма импульса, б) вид импульса при  $t = 0.1 \cdot 10^{-12}$  сек. с)  $t = 0.8 \cdot 10^{-12}$  сек., д)  $t = 1.6 \cdot 10^{-12}$  сек. и е)  $t = 3.1 \cdot 10^{-12}$  сек.. Интенсивность выражена в градациях серого.

Кроме того, численное моделирование показало, что наличие металлической сетки неоднородностей ведет к расширению спектра световой пули. При использовании более двух рядов сетки неоднородностей, качественного изменения спектра не происходит, но идет значительное падение интенсивности прошедшей световой пули. От расстояний между рядами и строками сетки металлических неоднородностей расширение спектра практически не зависит.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ч. Пул, Ф. Оуэнс. Нанотехнологии, М. : Техносфера, 2004.
2. S. Aubry. Solitons and condensed matter physics / Eds A.R. Bishop, T. Schneider. Berlin : Springer-Verlag, 1979.
3. П. Харрис. Углеродные нанотрубы и родственные структуры. Новые материалы XXI века. М. : Техносфера, 2003.
4. М. Б. Белоненко, Е.В. Демушкина, Н.Г. Лебедев. // ЖТФ. 2008. №78. 1 с.
5. М. Б. Белоненко, Н.Г. Лебедев, А.С. Попов. Письма в ЖЭТФ. 2010. №91. 506 с.
6. М.Б. Белоненко, А.С. Попов, Н.Г. Лебедев // ПЖТФ. 2011. №37. 51
7. М.Б. Белоненко, Е.В. Демушкина, Н.Г. Лебедев. // ФТТ 2008. №50. 367.

8. M.B. Belonenko, E.V. Demushkina, N.G. Lebedev. // J. Russian Laser Res. 2006. 27. 457.

## ВОЗДЕЙСТВИЕ ФЕМТОСЕКУНДНЫХ ЛАЗЕРНЫХ ИМПУЛЬСОВ НА МЕТАЛЛИЧЕСКИЕ НАНОЧАСТИЦЫ В ЖИДКОСТИ

О.Г. Романов<sup>1</sup>, Г.И. Желтов<sup>2</sup>, Г.С. Романов<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет,

<sup>2</sup>Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси,

<sup>3</sup>Институт тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова НАН Беларуси

e-mail: [romanov@bsu.by](mailto:romanov@bsu.by)

Металлические наночастицы, являющиеся сферическими кластерами атомов металлов с типичным диаметром от 1 до 100 нм, привлекают внимание исследователей в связи с их многочисленными потенциальными применениями, в частности для маркировки биологических объектов, терапии онкологических заболеваний и т.д. [1]. Воздействие фемтосекундных лазерных импульсов на наноструктуры открывает широкие возможности исследования физических процессов, протекающих в них на сверхкоротких временных масштабах.

В данной работе представлена теоретическая модель, описывающая процессы воздействия сверхкоротких лазерных импульсов на сферические металлические наночастицы, помещенные в жидкость; исследована кинетика возбуждения и затухания акустических колебаний в золотых наночастицах, рассмотрены процессы распространения акустических возмущений в окружающей среде.

Нагрев металлов под действием сверхкоротких лазерных импульсов описывается в рамках двухтемпературной модели для электронного газа и ионной решетки [2]. Для сферической геометрии наночастицы радиуса  $R_0$  соответствующие уравнения имеют вид:

$$\rho_e C_e \frac{\partial T_e}{\partial t} = k_T^e \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T_e}{\partial r} \right) + Q_S - \gamma (T_e - T_i) \quad (1)$$

$$\rho_i C_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \gamma (T_e - T_i) \quad (2)$$

Здесь величины  $\rho$  (плотность),  $C$  (теплоемкость),  $T$  (температура),  $k_T$  (коэффициент теплопроводности) с индексом “e” относятся к электронной подсистеме, с индексом “i” – к ионной. Параметр  $\gamma$  определяет скорость релаксации энергии от электронного газа к ионам кристаллической решетки. Величина  $Q_S$  определяется источником энерговыделения:  $Q_S = \kappa I_0 \frac{t}{\tau_{\text{pulse}}} e^{-t/\tau_{\text{pulse}}}$ , где  $I_0$  – интенсивность светового пучка,  $\kappa$  – коэффициент поглощения среды,  $t_p$  – длительность лазерного импульса.

Изменение температуры окружающей металлическую наночастицу среды в области  $r > R_0$  находится из решения уравнения теплопроводности:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = k_T \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (3)$$

с учетом теплопереноса из нагретой области через границу  $r = R_0$ . Величины  $\rho$ ,  $C$ ,  $k_T$  определяются теплофизическими свойствами окружающей среды.

Для описания процессов возбуждения акустических колебаний металлической наночастицы и их распространения в окружающую среду будем использовать уравнения Лагранжа [3], которые для случая одномерного движения в сферической геометрии имеют вид:

1) уравнение непрерывности:

$$V = V_0 \left( \frac{R}{r} \right)^2 \frac{\partial R}{\partial r}; \quad (4)$$

2) уравнение движения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -V_0 \left( \frac{R}{r} \right)^2 \frac{\partial P}{\partial r}; \quad (5)$$

3) уравнение изменения эйлеровой координаты  $R$ :

$$\frac{\partial R}{\partial t} = u; \quad (6)$$

4) уравнение состояния:

$$P = P(V, E). \quad (7)$$

Здесь  $r$  – лагранжева координата,  $t$  – время,  $P$  – давление,  $V$  – удельный объем,  $E$  – удельная внутренняя энергия. Отметим, что уравнения (4) – (7) записываются отдельно для металлической наночастицы и окружающей ее среды.

Для аппроксимации уравнения состояния металлической наночастицы используем уравнение Ми – Грюнайзена [3, 4], которое с учетом выделения двух подсистем (электронной и ионной) принимает вид:

$$P = \rho_{i0} u_0^2 \left( 1 - \frac{V_i}{V_{i0}} \right) + \Gamma_i \frac{C_i (T_i - T_0)}{V_i} + \Gamma_e \frac{C_e (T_e - T_0)}{V_e}, \quad (8)$$

где  $V_{i0}$ ,  $V_{i,e}$  – начальный и текущий удельные объемы,  $V_{i0} = 1/\rho_{i0}$ ,  $V_{i,e} = 1/\rho_{i,e}$ , где  $\rho_{i0}$ ,  $\rho_{i,e}$  – соответствующие плотности,  $\Gamma_{i,e}$  – коэффициенты Грюнайзена,  $u_0$  – скорость звука в металлической частице.

Аппроксимация уравнения состояния окружающей среды (воды) также производится с использованием уравнения Ми – Грюнайзена в его двучленном виде:

$$P = \rho_0 u_l^2 \left( 1 - \frac{V}{V_0} \right) + \Gamma \frac{C(T - T_0)}{V}, \quad (9)$$

$\Gamma$  – коэффициент Грюнайзена,  $u_l$  – скорость звука в окружающей среде.

Совместное решение системы уравнений (1) – (9) позволяет с исчерпывающей полнотой рассмотреть процессы, протекающие при воздействии импульсного лазерного излучения на поглощающую металлическую частицу, окруженную жидкой средой. Численное моделирование проводилось с использованием изложенной в [5] методики конечно-разностной аппроксимации уравнений движения и уравнения теплопроводности.

В качестве примера рассмотрим воздействие лазерного импульса (интенсивность  $I_0 = 10^{10}$  Вт/см<sup>2</sup>, длительность  $\tau_{\text{pulse}} = 10^{-13}$  с) на наночастицу золота с радиусом  $R_0 \approx 10$  нм, коэффициент поглощения которой ( $\kappa = 10^5$  см<sup>-1</sup>) значительно превосходит коэффициент поглощения окружающей ее жидкости (воды). Расчеты, выполненные для типичных теплофизических параметров золота и воды, представлены на рис. 1.

Поглощение энергии сверхкороткого лазерного импульса электронами проводимости приводит к росту температуры электронного газа за времена порядка 100 фс (рис. 1, а, кривая 1) с последующей передачей энергии ионам кристаллической решетки и ее нагревом (кривая 2) за время от десятков до нескольких пикосекунд, определяемое размером наночастицы (вставка на рис. 1, а). При этом происходит передача тепла в окружающую среду и общее остывание наночастицы. Тепловое расширение инициирует возникновение радиальных колебаний наночастицы (рис. 1, б), волн давления (рис. 1, в) и плотности, распространяющихся внутри частицы. Период возбуждаемых акустических колебаний составляет для рассматриваемого случая  $T_{R_0} = 2R_0/u_0 = 6.2$  пс. Отметим, что кинетика гиперзвуковых акустических колебаний, возбуждаемых в наночастицах при поглощении излучения фемто- или пикосекундного импульса накачки, может быть зафиксирована, например, по кинетике изменения поглощения пробного светового пучка [6]. В окружающей наночастицу среде также инициируются колебания давления (рис. 1, г), время затухания которых для проведенного расчета составляет  $\tau \approx 300$  пс, что хорошо согласуется с известными экспериментальными данными [7].

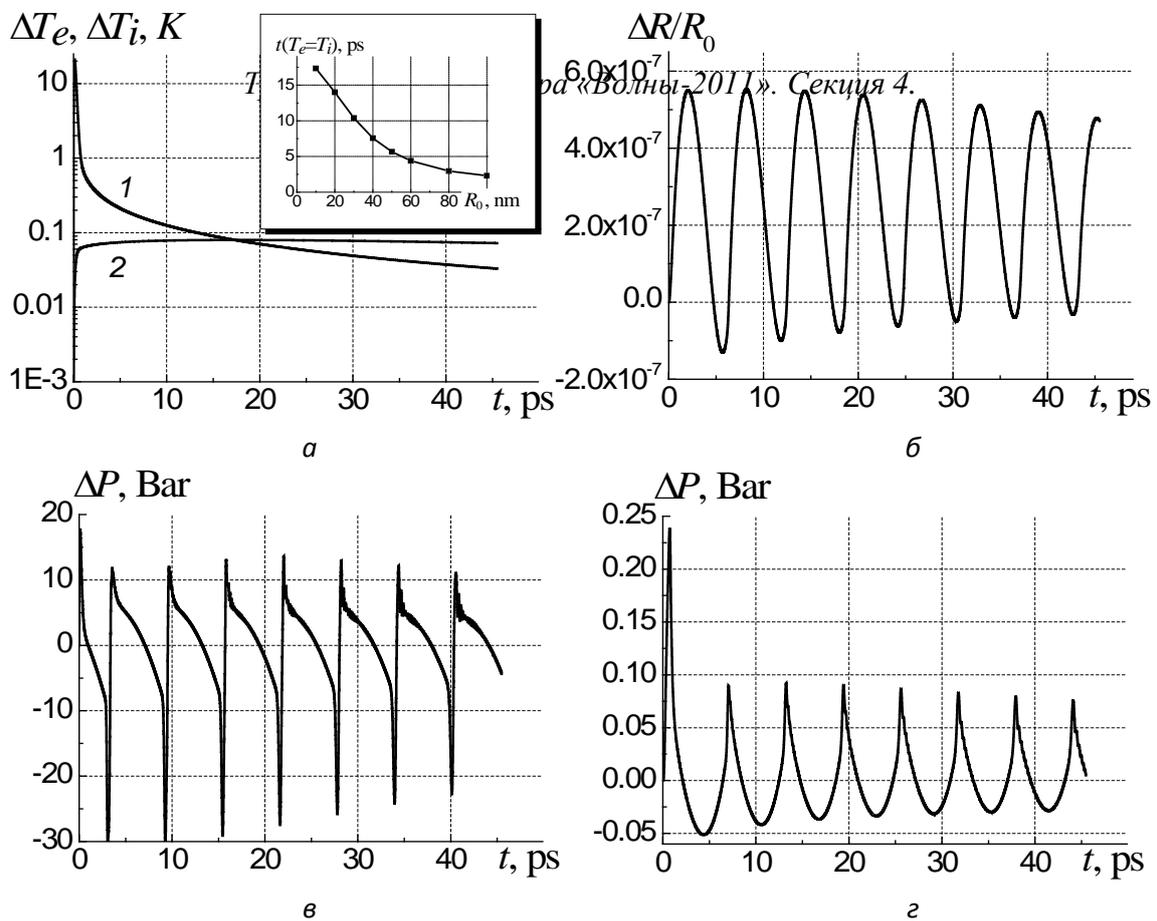


Рис. 1. Временные зависимости температуры (а) и давления (в) в центре золотой наночастицы, радиального смещения ее поверхности (б), изменения давления в окружающей среде на расстоянии  $r = 1$  нм от поверхности наночастицы (г).

## ЛИТЕРАТУРА

1. В.В. Климов «Наноплазмоника» М.: Физматлит, 2009.
2. С.И. Анисимов, Я.А. Имас, Г.С. Романов, Ю.В. Ходыко «Действие излучения большой мощности на металлы» М.: Наука. 1970.
3. Я.Б. Зельдович, Ю.П. Райзер. «Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений» М.: Наука. 1966.
4. Г.И. Канель, С.В. Разоренов, А.В. Уткин, В.Е. Фортов. «Ударно-волновые явления в конденсированных средах» М.: Изд-во «Янус – К». 1996.
5. О.Г. Романов, Г.И. Желтов, Г.С. Романов. // Известия РАН. Серия физическая. 2010. Т.74. С.1744.
6. M. Perner, S. Gresillon, J. März, G. von Plessen, J. Feldmann // Phys. Rev. Lett. 2000. V.85. P.792.
7. C. Voisin, D. Christofilos, N. Del Fatti, F. Vallee // Physica B. 2002. V.316. P.89.

## ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ ПОД ВЛИЯНИЕМ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В СИСТЕМЕ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ТЕЧЕНИЙ

Б.И. Самолюбов, И.Н. Иванова

Физический факультет МГУ им М.В. Ломоносова, Москва, Россия

e-mail: samolyubov@phys.msu.ru, ivair@yandex.ru

В системах стратифицированных течений в морях и озерах структуры полей скорости и параметров состава воды подвержены воздействию внутренних волн. Под системой течений понимается совокупность потоков, развивающихся на разных глубинах и взаимодействующих между собой. Волны влияют на толщины течений и градиенты скорости. При этом меняются интенсивность и масштабы турбулентности, определяющие турбулентную вязкость. Без учета влияния волновых процессов на распределение коэффициента турбулентного обмена оказываются малоэффективными математические модели течений и переноса примесей в них [1, 2]. Исследованию эволюции распределений турбулентной вязкости в системе течений со стонно-нагонным и придонным потоками, при наличии поверхностных и внутренних волн, посвящена данная работа.

Анализируемые ниже результаты получены 19.09.2007 г. в Петрозаводской губе Онежского озера [2]. Выполнялась серия

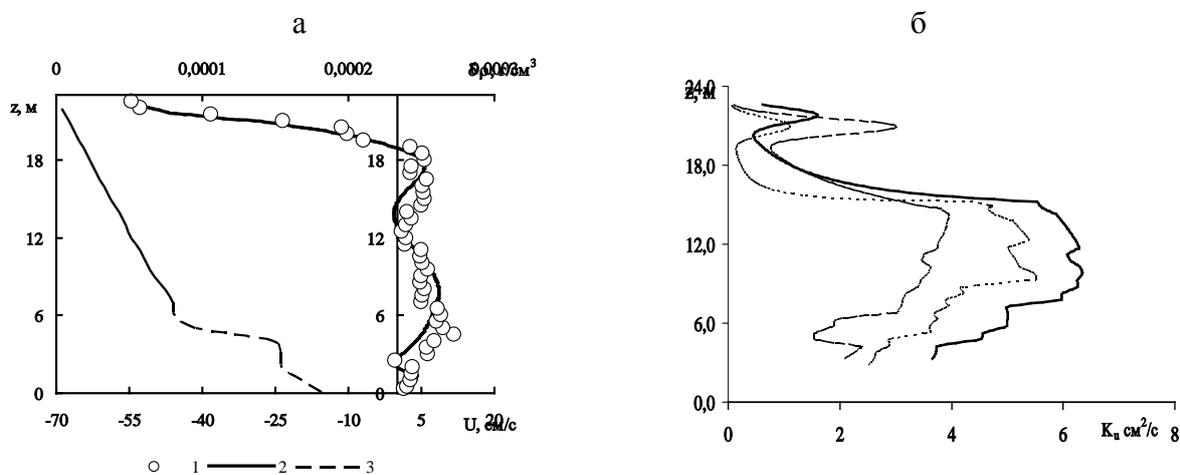


Рис. 1. Характерные профили а) - скорости  $U$  - 1 и изменения плотности воды  $\Delta\rho$  с глубиной - 2, б) - изменения коэффициента турбулентной вязкости  $K_t$  с глубиной.

зондирований на вертикали, расположенной в центральной части губы. Регистрации профилей скорости течения по глубине водоема с дискретностью 10 мин при шаге по вертикали 0,5 м велись доплеровским профилографом RDCP-600 (Aanderaa). Параллельно зондом RCM 9 LW (той же фирмы) измерялись профили скорости  $U$ , температуры  $T$  и

электропроводности  $S_k$ , концентраций кислорода  $O_2$  и взвеси  $S$ . Точности измерений  $U$ ,  $T$ ,  $S_k$ ,  $O_2$  и  $S$  составляли 0,5 см/с, 0,02°C, 0,02 мСм/см, 0,25 мг/л и 0,4 NTU. Параллельно измерялась скорость ветра.

Распределение скорости (рис. 1а), включало дрейфовый поток вверх по заливу, компенсационное и придонное течения из губы [2]. Средние скорости составляли 30 см/с для дрейфового и 6 и 8 см/с для компенсационного и плотностного течений. Разность температур воды у поверхности и у дна - 2,5°C. На (рис. 1б) приведены виды распределений коэффициента обмена, который рассчитан по выражению из [2]

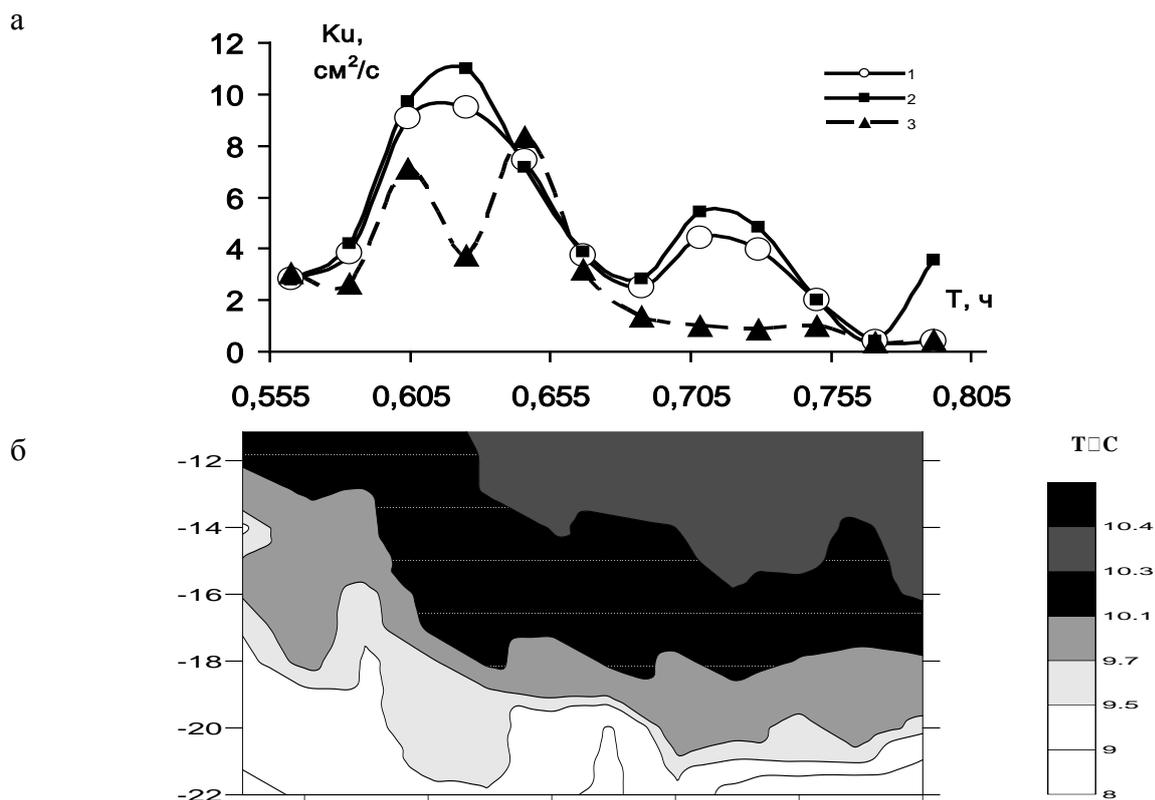


Рис.2. Распределения по глубине и во времени а – коэффициента  $K_u$ , осредненного по всей глубине -1, по толщине компенсационного течения -2 и по толщине дрейфового течения-3; б - температуры воды в интервале глубин от 13 м до дна.

$$K_u = (u_\tau + \sqrt{e_{fc}}) \ell / \left( 1 + \frac{\alpha_1 N^2 \ell^2}{u_\tau^2 + e_{fc}} \right), \quad (1)$$

где  $u_\tau = \ell |\partial_z U|$  - сдвиговая скорость;  $e_{fc} = 4 \cdot 10^{-4} \cdot \bar{U}_{FD}^2 \cdot (1 - |\partial_z U / (\partial_z U)_{MAX}|)$ ,  $\bar{U}_{FD}$  - скорость, средняя по всей глубине;  $N^2 = (g / \rho) (-\partial_z \rho)$  - частота плавучести,  $\rho$  - плотность воды;  $\ell = \kappa z / (1 + (\kappa z / L))$  - путь смешения для придонного слоя ( $\kappa = 0,4$ ,  $L$  - интегральный масштаб турбулентности [3]) и аналогично для приповерхностной области, но с ростом  $\ell$  с глубиной.

Проверка правильности определения  $K_u$  по (1) проводилась путем сравнения измеренных и теоретических распределений концентрации взвеси, полученных из уравнения ее диффузии с применением  $K_u$  из (1).

При наличии на профилях  $K_u$  элементов подобия, к которым относятся максимумы  $K_u$  в дрейфовом и компенсационном потоках, наблюдаются значительные изменения величин этих максимумов. Значения  $K_u(t)$  на рис. 2, осреднены по всей глубине и по толщинам дрейфового и компенсационного потоков. Изменения  $K_u$ , средних по глубине и компенсационному течению, происходят в противофазе с ходом изотерм 9,5, 10 и 10,3°C. Ход изотерм определяется заглублением термоклина от 12 до 20 м при усилении ветра от 8 до 12 м/с и внутренними волнами сейшевой природы [4]. Основные периоды этих волн - 4, 3, 1,7 и 1 ч по данным 24-часовой серии зондирований 15-16.09.2007 г (рис. 3).

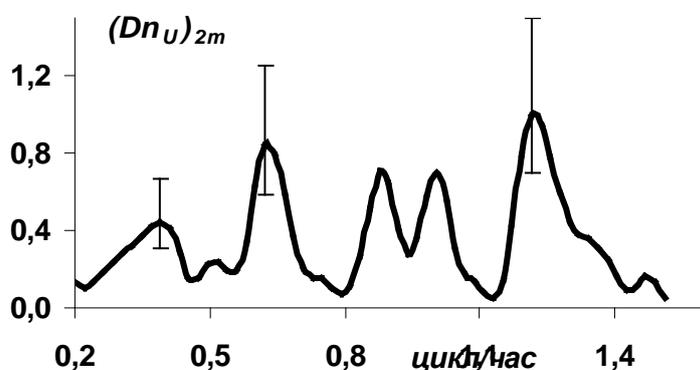


Рис. 3. Нормированный на максимум спектр флуктуаций скорости течения на высоте  $z=2$ , 2 м над уровнем дна.

Поскольку коэффициент обмена  $K_u$  определяется как произведение масштабов скорости и длины вертикального турбулентного переноса, то для исследования влияния внутренней волны на  $K_u$  целесообразно рассмотреть зависимость  $K_u$  от произведения фазовой скорости внутренней волны  $c_f(t)$  на возвышение уровня воды  $\zeta(t)$ . Фазовая скорость оценивалась по известной формуле для двухслойной жидкости

$$c_f = (g(H - h_T)h_T \Delta\rho_T / H\rho)^{1/2}, \quad (2)$$

где  $H$  - глубина,  $h_T$  - глубина термоклина,  $\rho$  - плотность воды;  $\Delta\rho_T$  - разность плотностей в слоях  $h_T$  и  $H - h_T$ . Возвышение уровня воды  $\zeta(t)$  регистрировалось с помощью датчика давления профилографа RDCP 600. Согласно зависимости  $K_u$  от  $c_f \zeta$  (рис. 4, обозначения 1, 2, 3),

$$K_u = C_{kv} c_f \zeta. \quad (3)$$

Из выражения  $K_u$  с учетом волны и течения (рис. 4, обозначение 4)

$$K_u = C_{kw} c_f \zeta + C_{ku} U_{dr} h_{dr} \quad (4)$$

следует, что первая справа часть  $K_u$ , связанная с влиянием внутренней волны на турбулентную вязкость, составляет в среднем 30%  $K_u$ . В (3), (4)  $C_{kw}$  и  $C_{ku}$  – константы,  $U_{dr}$  и  $h_{dr}$  – скорость и толщина дрейфового течения.

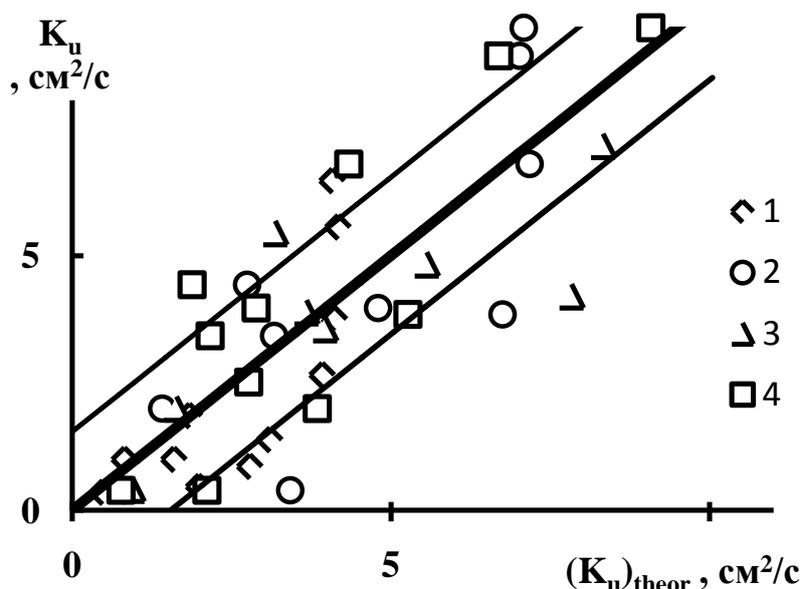


Рис. 4 . Сравнение коэффициентов  $K_u$ , средних по толщинам дрейфового потока-1, потока в целом 2 и компенсационного течения 3, найденных по (1) и по (3), а также для потока в целом 4 по (1) и (4). Тонкие линии – границы стандартного отклонения.

#### Основные результаты.

1. Установлена связь волновых преобразований распределения температуры и коэффициента обмена.
  2. Выявлена зависимость турбулентной вязкости от фазовой скорости внутренней волны, изменения уровня воды, скорости дрейфового течения и его толщины. Установлено, что вклад влияния внутренней волны в величину коэффициента обмена составляет в среднем 30 %.
  3. Полученная зависимость коэффициента обмена от параметров волны и течения может быть применена для теоретического описания распределения турбулентной вязкости с учетом выявленных элементов подобия профилей турбулентной вязкости.
- Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 11-05-01146-а).

#### ЛИТЕРАТУРА

1.Preusse M., Peeters F., Lorke A. // J. Limnol. Oceanogr, 55(6), 2010, 2353–2365. doi:10.4319/lo.2010.55.6.2353.

2.Самолубов Б.И., Иванова И.Н. // Известия РАН. Серия физическая, 2010 г, т.74, № 12, стр.1770-1774,.

3.Самолубов Б. И. Плотностные течения и диффузия примесей. М.: Изд. ЛКИ. 2007.

4.Филатов Н.Н. Динамика озер. Л.: Гидрометиздат, 1983.