

## СЕКЦИЯ 10. НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

<b>Диагностика частотного захвата в условиях внешнего воздействия сигналом переменной частоты</b>	
<i>Е.И. Боровкова, А.С. Карavaев</i> .....	3
<b>О поведении основной спектральной компоненты хаотических осцилляторов, находящихся в режиме перемежаемости игольного ушка</b>	
<i>Д.И. Данилов, А.А. Короновский</i> .....	7
<b>Интегрируемые модели двумерных и трехмерных течений сжимаемой жидкости и метод обобщенных подстановок Коула-Хопфа</b>	
<i>В.М. Журавлев, Д.А. Зиновьев</i> .....	12
<b>Метод усреднения и нелинейные динамические системы дискретного времени</b>	
<i>В.В. Зайцев, А.В. Карлов (мл)</i> .....	15
<b>Синхронизация вихревых спин-трансферных наноосцилляторов</b>	
<i>К.А. Звездин, А.Р. Сафин, А.В. Крашенинников, А.Д. Белановский, А.В. Хвальковский</i> ....	19
<b>Восстановление по временным реализациям моделей систем с запаздыванием нейтрального типа</b>	
<i>А.С. Карavaев, В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров</i> .....	24
<b>Исследование чувствительности метода нелинейной причинности по Грейнджеру в зависимости от степени адекватности модели</b>	
<i>М.В. Корнилов, И.В. Сысоев</i> .....	28
<b>К вопросу о выборе состояния пространственно – распределенной системы для расчета спектра показателей Ляпунова.</b>	
<i>А.А. Короновский, В.А. Максименко, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов</i> .....	31
<b>Исследование характеристик генерации в цепочке однонаправленно связанных низковольтных виркаторов</b>	
<i>А.А. Короновский, Н.С. Фролов, А.Е. Храмов</i> .....	36
<b>Генератор фазоманипулированных последовательностей на базе ПЛИС Spartan 6К</b>	
<i>А.Н. Леухин, И.А. Калашников</i> .....	40
<b>Аннигиляция вихревых пар в бозе-эйнштейновском конденсате</b>	
<i>В. А. Миронов, Л. А. Смирнов</i> .....	45

**Нелинейная модель кольцевой автоколебательной системы на основе ферромагнитной плёнки в условиях трёхволнового взаимодействия**

*Д.В. Романенко, Ю.П. Шараевский, С.В. Гришин..... 49*

# ДИАГНОСТИКА ЧАСТОТНОГО ЗАХВАТА В УСЛОВИЯХ ВНЕШНЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ СИГНАЛОМ ПЕРЕМЕННОЙ ЧАСТОТЫ

Е.И. Боровкова, А.С. Караваев

*Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского*  
[rubanei@mail.ru](mailto:rubanei@mail.ru)

В работе рассматривается задача детекции частотного захвата взаимодействующих автоколебательных систем по коротким, нестационарным, нелинейным и зашумленным экспериментальным временным рядам. Эта задача актуальна во многих областях науки и техники: в радиофизике, медицине, физиологии и других областях. Сложность задачи обусловлена тем, что большинство известных методов, предназначенных для выявления синхронизованности систем по порожденным ими сигналам, ориентированы на анализ стационарных сигналов и плохо работают при анализе сигналов, частота которых может меняться за время наблюдения в широких пределах. Поэтому необходимо разрабатывать специализированные подходы, ориентированные на анализ сигналов при решении конкретной задачи.

Работа посвящается сопоставлению методик диагностики моментов захвата и срыва частот по нестационарным реализациям в условиях воздействия сигналом переменной частоты. Работоспособность подхода иллюстрируется в ходе численного моделирования и при анализе сигналов биологической природы. В работе сопоставляются методика визуального анализа спектров мощности, оцененных в коротких окнах, методика, основанная на анализе скелетона вейвлет-спектра, построенного с помощью вейвлета Морле, и автоматизированная методика, использующая оценку в окнах коэффициента фазовой когерентности [1].

Численное исследование проводится на модели, предложенной в работе [2], и представляющей из себя дифференциальное уравнение с запаздывающей обратной связью под гармоническим внешним воздействием с линейно изменяющейся во времени частотой от 0.05 до 0.25 Гц:

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t - \tau)) + A \sin(\nu t) + \zeta, \quad (1)$$

где  $x(t)$  – динамическая переменная,  $\tau$  – время запаздывания,  $\varepsilon$  – инерционность системы,  $A$  и  $\nu$  – соответственно амплитуда и частота воздействующего сигнала,  $\zeta$  – гауссовский белый шум. При параметрах, выбранных в соответствии с [2], автономная ( $A=0$ ) система (1) демонстрирует собственные колебания на частоте около 0.1 Гц. При изменении частоты вынуждающей силы от 0.05 до 0.25 Гц, при  $A=1$  и  $\zeta$ , имеющем нулевое среднее и среднеквадратичное отклонение,

составляющее 10 % от среднеквадратического отклонения ряда без шума наблюдается захват частот и фаз колебаний.

Для идентификации моментов захвата и срыва частот использовался непосредственный анализ спектров мощности, оцениваемых в коротких окнах. В результате была построена зависимость мгновенной частоты  $f_x$  колебаний ведомой системы от мгновенной частоты  $f_y$  вынуждающей силы.

Мгновенные частоты  $f_x$ ,  $f_y$  идентифицировались в этом случае по положению основных пиков в спектрах мощности сигналов. Спектры мощности вычислялись в скользящем окне длиной 100 секунд. При частотах внешнего воздействия 0.08...0.12 Гц наблюдался захват частот порядка 1:1.

Другой используемый метод подразумевал непосредственный анализ скелетов вейвлет-спектров, построенных с использованием вейвлета Морле (рис. 1). Наблюдается захват частот порядка 1:1 на частотах около 0.08...0.12 Гц (1500...3500 секунд), захват порядка 1:2 диагностируется на частотах около 0.19...0.21 Гц (7000...8000 секунд). Видно, что точно идентифицировать моменты захвата и срыва частот затруднительно.

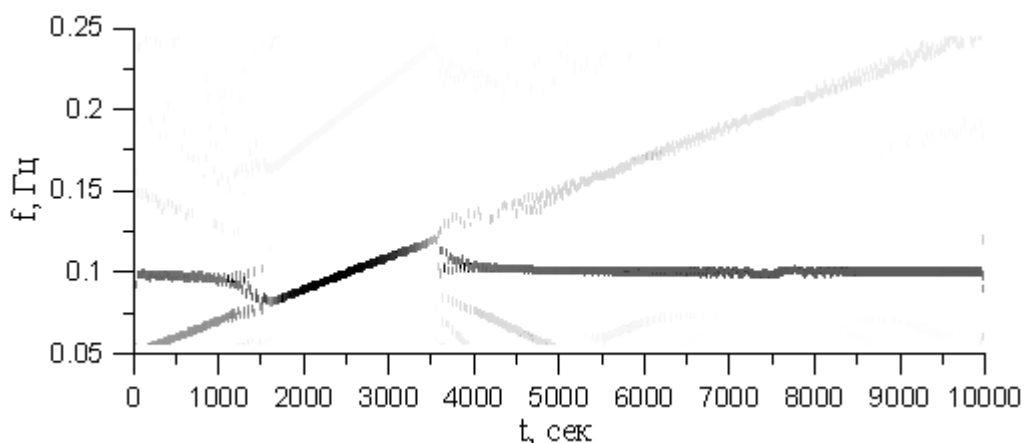


Рис. 1. Скелетон вейвлет-спектра для системы [2]. Интервалу 1500-3500 с соответствует захват частот 1:1, интервалу 7000-8000 с – захват частот 1:2.

Также для идентификации моментов захвата и срыва частот использовалась автоматизированная методика оценки в спектрах коэффициента фазовой когерентности. В коротких скользящих окнах длиной 100 секунд со сдвигом окна 0.2 секунды проводится количественная оценка коэффициента фазовой синхронизации (КФС). Полученные оценки усредняются в скользящем окне длиной 15 с и оценивались их функции распределения (рис. 2).

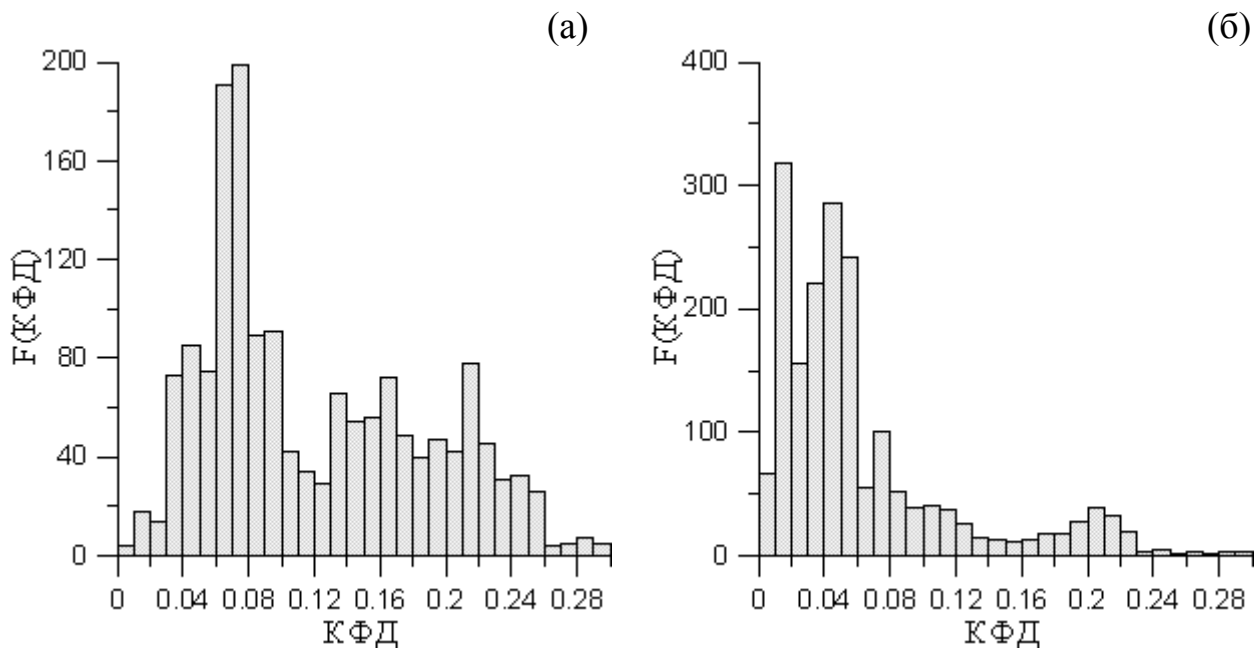


Рис. 2. Функция распределения оценок коэффициента фазовой синхронизации в скользящих окнах для системы Мальпаса для частотного захвата 1:1(а) и 1:2(б).

Для сопоставления рассматриваемых методик при анализе экспериментальных данных рассматриваемые методики были использованы для изучения свойств механизмов вегетативной регуляции системы кровообращения, участвующих в формировании 0.1 Гц-колебаний в варибельности сердечного ритма (ВСР) и варибельности кровенаполнения макроциркуляционного русла (МЦР).

Для 11 добровольцев проводилась регистрация кардиоинтерваллограммы (последовательности RR-интервалов электрокардиограммы) и фотоплетизмограммы (ФПГ), во время функциональной пробы с линейно меняющейся частотой дыхания от 0.05 Гц до 0.25 Гц в течение 25 минут. Полученные временные ряды фильтровались полосовым фильтром в полосе от 0.05 до 0.25 Гц. С помощью рассматриваемых методик для каждой пары сигналов (RR-интервалы и ФПГ каждого испытуемого) определялись моменты частотного захвата и срыва.

Обобщая результаты исследования можно отметить, что диапазон захвата частот 0,1 Гц колебаний RR-интервалов дыханием с плавно меняющейся частотой был шире диапазон захвата частот 0.1 Гц колебаний ФПГ дыханием у 7 человек (64 %), а у 4 человек (36%) был уже. Среднее время синхронизации RR  $723 \pm 316$  секунд, среднее время синхронизации ФПГ  $638 \pm 203$  секунд.

При частотах дыхания, близких к собственным частотам систем медленной регуляции сердечного ритма и кровяного давления, наблюдается захват частот колебаний этих систем частотой дыхания, как в классическом автогенераторе под внешним воздействием. Разная ширина полосы синхронизации исследуемых ритмов хорошо согласуется с предположением, что они генерируются разными автоколебательными системами.

Показано, что диапазон захвата частоты 0.1 Гц-колебаний в ВСР меняющимся по частоте дыханием количественно отличается от такового для 0.1 Гц-колебаний в вариабельности кровенаполнения МЦР у каждого из испытуемых. Однако качественная воспроизводимость результатов по ансамблю анализируемых данных наблюдалась.

Работа посвящается сопоставлению методов диагностики моментов частотного захвата в условиях воздействия на исследуемую систему сигналом переменной частоты. Методика непосредственного анализа спектров мощности, в коротких скользящих окнах и методика, основанная на визуальном анализе скелетонов вейвлет-спектров, демонстрируют близкие результаты, хорошо качественно воспроизводящиеся на ансамбле экспериментальных записей и в численном эксперименте. Однако, эти подходы субъективны и точность определения моментов частотного захвата и срыва невысока. Методика оценки в скользящих окнах коэффициента фазовой синхронизации продемонстрировала лучшие результаты, предоставляя возможность автоматизации и отказа от субъективной визуальной оценки.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты № 10–02–00980, 11–02–00599, грант У.М.Н.И.К. Фонда содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере и аналитической ведомственной целевой программы “Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2011 годы)”, проект № 2.1.1/1738.

## ЛИТЕРАТУРА

1. J.W. Hamner, R.J. Morin, J.L. Rudolph, J.A. Taylor // J Appl Physiol 90: 1559-1564. 2001.
2. J.V. Ringwood, S.C. Malpas // Am. J. Physiol. Regulatory Integrative Comp. Psychol. 1997. V. 273. P. 1878-1884.

# О ПОВЕДЕНИИ ОСНОВНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ КОМПОНЕНТЫ ХАОТИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ, НАХОДЯЩИХСЯ В РЕЖИМЕ ПЕРЕМЕЖАЕМОСТИ ИГОЛЬНОГО УШКА

Д.И. Данилов<sup>1</sup>, А.А. Короновский<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ГОУ ВПО “Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского”  
danilov\_dm89@mail.ru

В настоящее время известно несколько различных типов синхронного поведения, и одним из вызывающих наибольший интерес вопросов является вопрос об их взаимосвязи друг с другом [1,2]. Разработаны несколько подходов анализа разных типов синхронизации с единых позиций, одним из которых является синхронизация спектральных компонент Фурье-спектров. В работах [3,4] показано, что различные типы хаотической синхронизации (фазовая синхронизация, синхронизация с запаздыванием, полная синхронизация) являются частными проявлениями синхронизации спектральных компонент. В частности, фазовая синхронизация при таком подходе означает синхронизацию основных спектральных компонент Фурье-спектров взаимодействующих систем, что выражается в независимости от начальных условий разности фаз, рассчитанных при помощи преобразования Фурье для основных спектральных компонент.

Хаотическая синхронизация с точки зрения спектральных компонент изучена достаточно хорошо, однако исследование динамики в области параметров, предшествующей установлению синхронного режима, до настоящего времени не проводилось. Известно, что в хаотических системах в некотором узком диапазоне параметра связи, непосредственно прилегающем к области синхронной динамики, наблюдается явление перемежаемости игольного ушка. В этом случае можно ожидать, что распределение разности фаз спектральных компонент будет отличаться от  $\delta$ -функции, соответствующей синхронному поведению. Представляет интерес вопрос о том, какой вид имеют эти распределения, а также каким образом они изменяются в зависимости от параметра надкритичности.

Формально преобразование Фурье рассчитывается по бесконечному интервалу времени, однако при численном моделировании, как и при проведении экспериментальных исследований, мы вынуждены ограничиваться анализом некоторого конечного отрезка временной реализации. Соответственно, возникает вопрос о том, каким образом зависит результат расчетов от выбираемой длины временной реализации. Исследованию этих вопросов и посвящена данная работа.

В качестве модельной системы выбрана система, состоящая из двух однонаправленно связанных систем Ресслера:

$$\begin{aligned} \dot{x}_d &= -\omega_d - z_d, \\ \dot{y}_d &= \omega_d x_d + \alpha y_d, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_d &= p + z_d(x_d - c), \\ \dot{x}_r &= -\omega_r y_r - z_r + \varkappa(x_d - x_r), \\ \dot{y}_r &= \omega_r x_r + \alpha y_r, \\ \dot{z}_r &= p + z_r(x_r - c). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь индекс  $d$  соответствует ведущей системе, а индекс  $r$  – ведомой. Параметры систем выбраны следующим образом:  $\alpha = 0.15$ ,  $p = 0.2$ ,  $c = 10.0$ . Параметры  $\omega_d = 0.93$  и  $\omega_r = 0.95$  задают собственную частоту ведущей и ведомой систем соответственно, а  $\varkappa$  - параметр, отвечающий за связь систем.

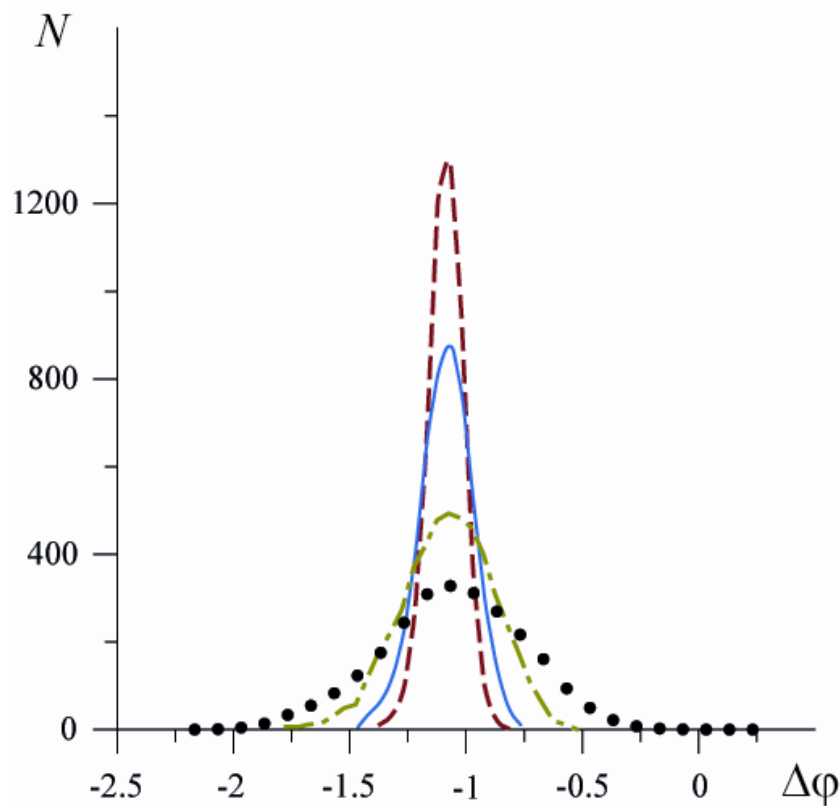


Рис. 1. Распределения разности фаз основных спектральных компонент систем Ресслера для разных значений интервала времени, по которому рассчитывается преобразование Фурье при  $\varkappa = 0.043$ .

В работах [5,6] показано, что перемежаемость игольного ушка и перемежаемость типа I с шумом являются одним и тем же типом поведения, поэтому для сопоставления результатов также рассматривается динамика отображения окружности:

$$x_{n+1} = x_n + 2\Omega(1 - \cos x_n) - \varepsilon + \xi_n, \quad \text{mod } 2\pi, \quad (3)$$



где  $\varepsilon$  – управляющий параметр,  $\Omega = 0.1$ ,  $\xi_n$  –  $\delta$ -коррелированный гауссов белый шум. Аналогом разности фаз систем Ресслера (1-2) является переменная  $x_n$ , а аналогом преобразования Фурье в этом случае является усреднение по некоторому интервалу дискретного времени, то есть по некоторому множеству значений  $x_n$ . Неусредненное значение  $x_n$  соответствует разности фаз систем Ресслера, введенных как угол поворота на фазовой плоскости [3]. Такой способ введения фазы справедлив, так как при данных параметрах системы аттрактор является фазово-когерентным.

В работе показывается, что связанные системы Ресслера и отображение окружности демонстрируют сходную динамику. В частности, как видно из рис. 1, распределения разности фаз для систем Ресслера имеют вид распределений Гаусса. Распределения величины  $x_n$  для отображения окружности также имеют подобный вид. При этом дисперсия распределений уменьшается с увеличением временного интервала, по которому рассчитывается искомая величина, причем соответствующие зависимости для разных значений параметра надкритичности совпадают после следующей перенормировки [7]:

$$z = \frac{x}{\sqrt{|\varepsilon|}}, \quad \tau = t\sqrt{|\varepsilon|}, \quad D^* = D|\varepsilon|^{-3/2}, \quad (4)$$

где  $t$  – время,  $D$  – интенсивность шума,  $x$  – значение разности фаз для систем Ресслера и величина  $x_n$  для отображения окружности, в левой части стоят соответствующие нормированные величины,  $\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_c$  соответствует параметру надкритичности для систем Ресслера и  $\varepsilon = \varepsilon$  для отображения окружности. Зависимости дисперсии от временного интервала имеют одинаковый вид для систем Ресслера и для отображения окружности. Они также приводятся к одной универсальной кривой при помощи еще одной перенормировки:

$$s = \alpha_i \tau, \quad (5)$$

где  $i = 1, 2$ ,  $\alpha_1 = 0.4$ ,  $\alpha_2 = 1.0$ , индекс 1 соответствует системам Ресслера, индекс 2 – отображению окружности.

Показано также, что зависимость дисперсии распределения от длины ряда приводится перенормировкой к универсальному виду и для других значений параметра надкритичности.

Таким образом, в работе рассмотрено явление перемежаемости игольного ушка с точки зрения анализа поведения спектральных компонент. Найдена универсальная зависимость дисперсии распределения разности фаз основных спектральных компонент от длины временного интервала, по которому рассчитывается фаза. Можно ожидать, что зависимость такого типа будет описывать динамику широкого класса

хаотических систем, находящихся вблизи границы фазовой синхронизации. Полученные результаты можно также рассматривать как дополнительное подтверждение единства перемежаемости игольного ушка и перемежаемости типа I с шумом.

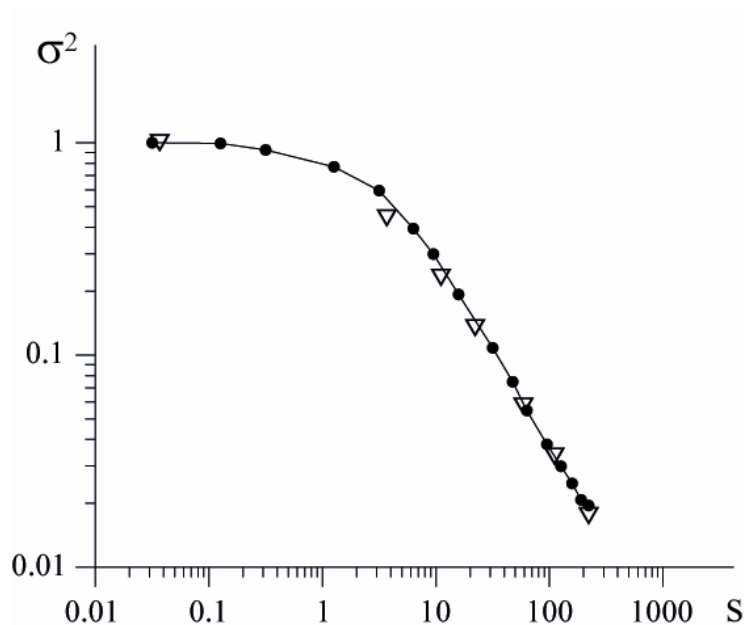


Рис. 2. Зависимость нормированной величины дисперсии от нормированной длины временного интервала. Линия с точками соответствует отображению окружности, треугольники – системам Ресслера.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, Президентской программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-3407.2010.2), аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы», а также ФНП «Династия» и Международного центра фундаментальной физики (г. Москва).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. S. Boccaletti et al. // Phys. Reports. V. 366. No 1-2. P. 1-101.
2. А. С. Пиковский, М. Г. Розенблюм, Ю. Куртс «Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление» М.: Техносфера, 2003.
3. А.Е. Hramov et al. // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. No 5. 056204.
4. О.И. Москаленко // Журнал технической физики. 2010. Т. 80. Вып. 8. С. 1-7.
5. А.А. Короновский и др. // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18. № 1. С. 24-36.
6. А.Е. Hramov et al. // Phys. Lett. A. 2011. V. 375.P. 1646-1652.

7. A.E. Hramov, A.A. Koronovskii, M.K. Kurovskaya // Phys. Rev. E.  
2008. V. 78. № 036212.

# ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ ДВУМЕРНЫХ И ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ И МЕТОД ОБОБЩЕННЫХ ПОДСТАНОВОК КОУЛА-ХОПФА

В.М. Журавлев, Д.А. Зиновьев

*Ульяновский государственный университет, Инженерно-физический факультет  
высоких технологий, Ульяновск, Россия*

E-mail: [zinovev\\_d@mail.ru](mailto:zinovev_d@mail.ru)

К настоящему времени известно сравнительно небольшое количество точных решений уравнений Эйлера и Навье-Стокса [1,2] для течений сжимаемой жидкости в двумерном и трехмерном случае, которые могут служить базой для решения конкретных прикладных задач. Поэтому в настоящее время при решении большинства прикладных задач приоритет отдается численным моделям динамики жидкости. Однако такой подход не позволяет решить целый ряд фундаментальных задач в этой области. Поэтому поиски методов построения точных решений уравнений Эйлера и Навье-Стокса остаются одним из активных направлений исследования в математической физике и гидромеханике см., например, [3] и библиографию там. Обычно точные решения строятся на основе параметризации некоторого класса течений, исходя из каких-либо симметричных условий или аналитических свойств функций, входящих в параметризацию. Такой подход особенно эффективен в случае двумерных течений несжимаемой жидкости, для которых можно ввести функцию тока [1,2] и использовать в явном виде дифференциальные законы сохранения см. например, [7]. В трехмерном случае методы параметризации иные, но по сути сводятся к аналогичным методам [3,4]. Достаточно универсальные методы для сжимаемой жидкости отсутствуют в настоящее время.

Для одномерных вязких течений классическим результатом является подстановка Коула-Хопфа, позволяющая свести уравнение Бюргерса к линейному уравнению теплопроводности [5]. Обобщение этого подхода было использовано в работах [8,9,10] для построения точных решений уравнений Эйлера и Навье-Стокса сжимаемой жидкости для одномерных течений. А в работе [11] в частном случае квазипотенциальных течений аналогичный результат был получен для двумерных течений идеальной жидкости. Эти результаты для одномерных течений интерпретируются с несколько иных позиций в данной работе, что позволяет получить еще более обобщенный результат, чем в [9,10]. Как оказалось, новый способ параметризации одномерных течений может быть перенесен и на многомерный случай. В работе на основе такого подхода получены общие представления для трехмерных течений сжимаемой идеальной и вязкой жидкости, которые связываются некоторым функциональным

преобразованием с другим набором уравнений, вид которых зависит от произвольных функций. Такое преобразование фактически является преобразованием Бэклунда. Выбор произвольных функций позволяет строить новые классы точных решений уравнений динамики жидкости.

Метод обобщенных подстановок Коула-Хопфа (МОПКХ) [8,9,10] базируется на следующих общих соотношениях. Рассматривая пару дифференциальных соотношений:

$$T_t + V(x,t)T_x = 0, \quad T_{xx} + U(x,t)T_x = 0, \quad (1)$$

можно показать прямыми вычислениями [8,9,10], что вся совокупность их дифференциальных следствий оказывается замкнутой, если функции  $V(x,t)$  и  $U(x,t)$  связаны одним уравнением:

$$U_t = \frac{\partial}{\partial x}(V_x - UV). \quad (2)$$

Это означает, что любая производная функции  $T$  может быть представлена в следующем виде:

$$T^{[k,n]} = \frac{\partial^{k+n} T}{\partial x^k \partial t^n} = A^{(k,n)}[U, V]T_x, \quad k, n = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $A^{(k,n)}[U, V]$  - дифференциальные полиномы только и только функций  $U$  и  $V$ . Эти полиномы вычисляются рекуррентно из (2) по следующей схеме:

$$\begin{aligned} A^{(k+1,n)}[U, V] &= \frac{\partial}{\partial x} A^{(k,n)}[U, V] - UA^{(k,n)}[U, V], \\ A^{(k,n+1)}[U, V] &= \frac{\partial}{\partial t} A^{(k,n)}[U, V] - QA^{(k,n)}[U, V], \\ A^{(0,1)}[U, V] &= V, \quad A^{(1,0)}[U, V] = 1, \quad A^{(2,0)}[U, V] = U, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $Q = V_x - UV$ . В этой схеме наиболее важным является то обстоятельство, что соотношения (2) и (3) выполняются при любой функции  $T$ . Пусть функции  $T$  выбираются из множества решений некоторого интегрируемого нелинейного уравнения в частных производных, например, линейного уравнения конечного порядка с постоянными коэффициентами:

$$\sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^L C_{k,n} T^{[k,n]} + C_{01} T_t + C_{1,0} T_x = 0. \quad (4)$$

Тогда с помощью соотношений (3) интегрируемое уравнение для  $T$  преобразуется к нелинейному уравнению для функций  $U$  и  $V$ :

$$\sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^L C_{k,n} A^{(k,n)}[U, V] - C_{01} V + C_{1,0} = 0. \quad (5)$$

Поэтому соотношения (1) можно рассматривать как обобщенные подстановки Коула-Хопфа, линеаризующие (5) к уравнению (4). В частном случае, когда функция  $T$  удовлетворяет уравнению теплопроводности:

$$T_t = \nu T_{xx},$$

функция  $U$  удовлетворяет уравнению Бюргера

$$U_t = \nu U_{xx} - 2\nu U U_x.$$

В этом случае соотношения (1) эквивалентны классической подстановке Коула-Хопфа [5,6], что оправдывает общее название данного подхода.

Данный метод обобщается на более широкий класс уравнений, в частности, на многомерные матричные уравнения в частных производных, а так же уравнения, в которых частные производные заменены на другие типы операций [10,11].

В работе построено общее представление решений уравнений одномерных течений вязкой сжимаемой жидкости, с помощью которого можно находить точные решения. Найдено общее представление решений уравнений Эйлера трехмерных течений сжимаемой жидкости. По аналогии найдено представление для течений в равномерно-вращающейся системе отсчета. Данный подход распространен на случай трехмерных вязких течений сжимаемой жидкости с определенного вида объемными силами

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л.Г. «Механика жидкости и газа» Л.: Гос. изд. технико-теоретической литературы. 1950
2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. «Теоретическая гидромеханика». М.: Наука. 1963.
3. Полянин А.Д., Аристов С.Н.// ДАН. 420:2. 180-185.
4. Броман Г.И., Руденко О.В.// УФН. 180:1 2010. 97-104.
5. J.M.Burgers. The nonlinear diffusion equation. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publisher Company. 1974.
6. Дж. Уизем // Линейные и нелинейные волны. М.: Мир. 1978.
7. Журавлев В.М.// ПММ. 58:6 1994. 60-67.
8. Журавлев В.М., Никитин А.В.// Нелинейный мир. 5. № 9. 603-611. 2007.
9. Журавлев В.М., Зиновьев Д.А.// Письма в ЖЭТФ. 87. № 5. 314-319 2008.
10. Журавлев В.М.// ТМФ, 158:1 2009. 58-71.
11. Журавлев В.М., Зиновьев Д.А.// Письма в ЖЭТФ. 88:3 2008. 194.

## МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ДИСКРЕТНОГО ВРЕМЕНИ

В.В. Зайцев, А.В. Карлов (мл)  
Самарский государственный университет  
A.V.Karlov@gmail.com

Аналоговая радиотехника при обработке информации широко использует инерционные преобразования сигналов нелинейными системами. Иначе обстоят дела в области цифровой обработки сигналов (ЦОС). Теория и практика ЦОС в большинстве случаев оперирует линейными системами, функционирующими в дискретном времени – линейными ДВ-системами [1]. Теория нелинейных динамических ДВ-систем в настоящее время находится на начальном этапе развития. Одно из ее центральных мест, по-видимому, должны занимать ДВ-автогенераторы. В качестве автогенераторов дискретных сигналов в ряде случаев [2] можно использовать известные точечные отображения – Заславского, Хенона, Холмса и другие. Но наибольший интерес представляют методы проектирования нелинейных ДВ-систем, обладающих свойствами аналоговой системы-прототипа. Один из таких методов, основанный на принципе инвариантности импульсной характеристики резонансной цепи аналоговой системы по отношению к дискретизации времени, был описан в статьях [3–5]. В настоящем сообщении описан метод синтеза ДВ-систем на основе совместного использования принципа импульсной инвариантности и процедуры усреднения, применяемой в теории нелинейных колебаний. Методом численного эксперимента исследовано явление захвата частоты (синхронизации) автогенератора в дискретном времени.

В качестве аналоговой системы-прототипа для проектирования ДВ-автогенератора рассмотрен автогенератор томсоновского типа с дифференциальным уравнением движения относительно безразмерной осциллирующей переменной  $x(t)$  вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0 \gamma (1 - x^2) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 f(t) \quad (1)$$

где  $\omega_0$  и  $Q$  – собственная частота и добротность контура,  $\gamma$  – параметр глубины положительной обратной связи в системе,  $f(t)$  – сигнал аддитивного внешнего воздействия.

В рамках метода усреднения приближенное решение уравнения (1) ищется в виде квазигармонических колебаний с медленно меняющимися амплитудами  $a(t)$  и  $b(t)$  синфазной и квадратурной составляющих:

$$x(t) = a(t)\cos(\omega_0 t) - b(t)\sin(\omega_0 t). \quad (2)$$

С использованием стандартной процедуры метода усреднения [6], получена система укороченных уравнений для амплитуд  $a(t)$  и  $b(t)$

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\omega_0}{2Q}a + \frac{\omega_0\gamma}{2}\left(1 - \frac{a^2 + b^2}{4}\right)a - \omega_0 E_s(t), \\ \frac{db}{dt} &= -\frac{\omega_0}{2Q}b + \frac{\omega_0\gamma}{2}\left(1 - \frac{a^2 + b^2}{4}\right)b - \omega_0 E_c(t), \end{aligned} \quad (3)$$

в которых составляющие внешнего воздействия вычисляются с помощью скользящего усреднения по явно содержащемуся времени [7]:

$$\mathbf{E}(t) = \frac{1}{T_0} \int_{t-T_0}^t f(t')\mathbf{Z}(t')dt'. \quad (4)$$

Где  $\mathbf{E} = (E_c, jE_s)^T$  и  $\mathbf{Z} = (Z_r, jZ_i)^T = (\cos(\omega_0 t), j\sin(\omega_0 t))^T$ . Вектор  $\mathbf{Z}$  удовлетворяет уравнению гармонического осциллятора

$$\frac{d^2\mathbf{Z}}{dt^2} + \omega_0^2\mathbf{Z} = 0 \quad (5)$$

с начальным условием  $\mathbf{Z}(0) = (1, 0)^T$ ,  $\dot{\mathbf{Z}}(0) = (0, \omega_0)^T$ .

Систему уравнений (3) можно представить в векторной форме, введя в рассмотрение комплексный вектор амплитуд  $\mathbf{A} = (a, jb)^T$ :

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = -\frac{\omega_0}{2Q}\mathbf{A} + \frac{\omega_0\gamma}{2}\left(1 - \frac{1}{4}|\mathbf{A}|^2\right)\mathbf{A} + \omega_0\mathbf{P}\mathbf{E}(t) \quad (6)$$

Здесь  $\mathbf{P}$  – эрмитова матрица перестановок:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & j \\ -j & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда формула автоколебаний (2) принимает вид скалярного произведения

$$x(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{Z}(t). \quad (7)$$

С использованием принципа импульсной инвариантности для дискретизации уравнений (4) – (7) [4] получен алгоритм генерации автоколебаний в дискретном времени в виде системы разностных уравнений (8) – (11):

$$x[n] = \mathbf{A}[n]\mathbf{Z}[n] \quad (8)$$

$$\mathbf{Z}[n] - 2\cos(2\pi\Omega_0)\mathbf{Z}[n-1] + \mathbf{Z}[n-2] = 0 \quad (9)$$



$$\mathbf{A}[n] = \sigma \mathbf{A}[n-1] + \pi \Omega_0 \gamma \left( 1 - \frac{1}{4} |\mathbf{A}[n-1]|^2 \right) \mathbf{A}[n-1] + 2\pi \Omega_0 \mathbf{P} \mathbf{E}[n] \quad (10)$$

$$\mathbf{E}[n] = \mathbf{E}[n-1] + \Omega_0 (f[n] \mathbf{Z}[n] - f[n-N-1] \mathbf{Z}[n-N-1]) \quad (11)$$

где  $\Omega_0$  – собственная частота контура, нормированная на частоту дискретизации с интервалом  $\Delta$  –  $\omega_d = 2\pi/\Delta$ ,  $\sigma = \exp(-\pi\Omega_0/Q)$ ,  $N$  – целая часть отношения  $T_0/\Delta$ . Равенства  $\mathbf{Z}[0] = (1, \cos(2\pi\Omega_0))^T$  и  $\mathbf{Z}[1] = (0, j \sin(2\pi\Omega_0))^T$  – есть начальные условия для уравнения (9).

Методом численного эксперимента исследованы характеристики ДВ-автоколебаний, генерируемых ДВ-системой (8) – (11). Получены частотные характеристики синхронизации ДВ-автогенератора внешним гармоническим сигналом с амплитудой  $A_s$  и частотой  $\Omega$ :

$$f[n] = A_s \cos(2\pi\Omega n) \quad (12)$$

На рис. 1 показан график зависимости огибающей  $|\mathbf{A}|$  колебаний генератора с параметрами  $\Omega_0 = 0.21$ ,  $Q = 20$  и  $\gamma = 0.15$  от частоты сигнала (12) при ее квазистатическом изменении в диапазоне от  $\Omega_{\min} = 0.2$  до  $\Omega_{\max} = 0.22$ . Амплитуда сигнала синхронизации  $A_s = 0.13$ .

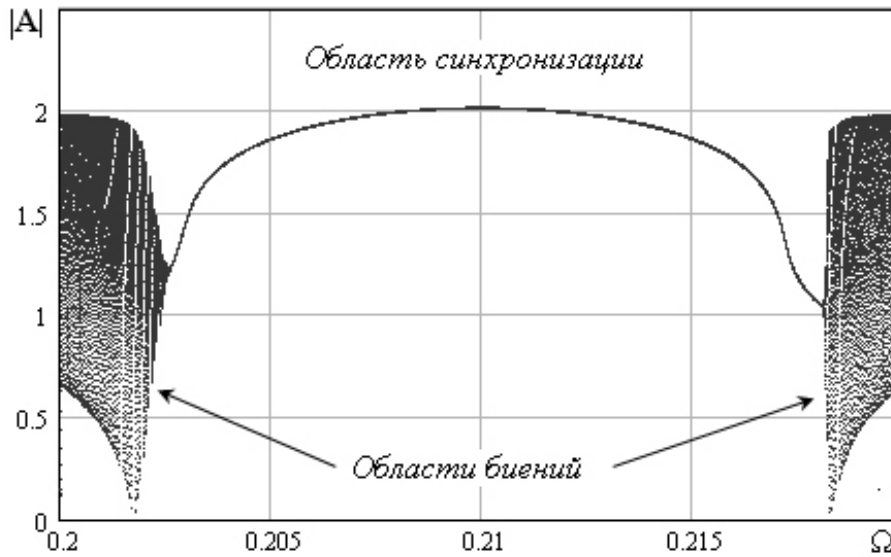


Рис. 1. Зависимость огибающей колебаний от частоты синхросигнала

График частотной зависимости разности фаз колебаний генератора и синхросигнала приведен на рис. 2.

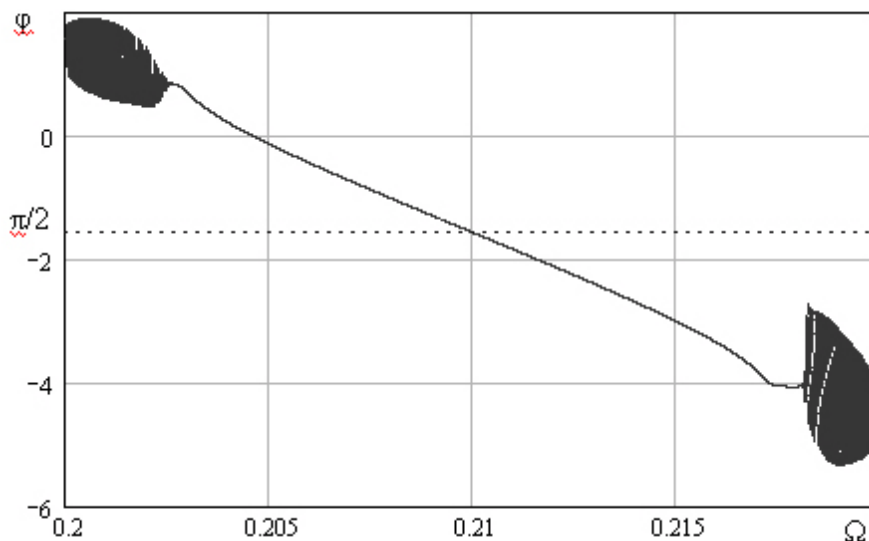


Рис. 2. Зависимость разности фаз от частоты синхросигнала

Графики зависимостей  $|A(\Omega)|$  и  $|\varphi(\Omega)|$  симметричны относительно частоты свободных автоколебаний, что характерно для изохронного автогенератора.

Линейный участок ФЧХ в окрестности угла  $\varphi = \pi/2$  при относительной равномерности АЧХ позволяет использовать автогенератор в режиме частотного детектирования.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Оппенгейм, Р. Шафер “Цифровая обработка сигналов. 2-е изд.” М.: Техносфера, 2006.
2. Б.И. Шахтарин [и др.] “Генераторы хаотических колебаний” М.: Гелиос АРВ, 2007.
3. В.В. Зайцев, С.В. Давыденко, О.В. Зайцев // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2000. Т.3. №2. С.64.
4. В.В. Зайцев, О.В. Зайцев, А.В. Карлов (мл) // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2008. Т. 11. № 4. С. 98.
5. В.В. Зайцев, А.В. Карлов (мл), Г.П. Яровой // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2010. Т. 13. № 3. С. 72.
6. Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский “Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний” М.: Наука, 1974.
7. А.Н. Малахов “Флуктуации в автоколебательных системах” М.: Наука, 1968.

## СИНХРОНИЗАЦИЯ ВИХРЕВЫХ СПИН-ТРАНСФЕРНЫХ НАНООСЦИЛЛЯТОРОВ

К.А.Звездин, А.Р.Сафин<sup>\*</sup>, А.В.Крашенинников, А.Д.Белановский,  
А.В.Хвальковский

*Институт общей физики им.А.М.Прохорова РАН*

*\* Московский энергетический институт (Технический университет)*

*konstantin.zvezdin@gmail.com, safin\_ansar@mail.ru*

В конце XX века был теоретически предсказан и экспериментально обнаружен новый механизм перемагничивания наноразмерных магнитных структур. Суть его заключается в том, что протекающий через магнитную систему спин-поляризованный ток переносит не только заряд, но и спин, т.е. является потоком момента импульса, при этом дивергенция потока спина приводит к возникновению вращающего момента, действующего на намагниченность. Этот процесс получил название переноса спина (spin transfer). Было экспериментально показано, что при определенных условиях, постоянный спин-поляризованный ток может возбуждать СВЧ высокоамплитудные осцилляции намагниченности [1-3]. Особый интерес в этом контексте вызывают туннельные структуры с вихревым распределением намагниченности, в которых спин-поляризованный ток вызывает СВЧ прецессию центра вихря [4]. Принцип работы таких устройств следующий: на вход СТНО подается постоянный ток, который, проходя слой с фиксированной намагниченностью (polarizer), поляризуется по спину. В слое со свободной намагниченностью (sensor) под действием этого тока наблюдается круговое движение центра вихря, в результате чего, за счет эффекта магнитосопротивления, генерируется выходной СВЧ-сигнал. Такие вихревые спин-трансферные нано-осцилляторы (СТНО) характеризуются очень узкой шириной линии, хорошо подстраиваемы по частоте, а их производство полностью совместимо с полупроводниковым технологическим циклом КМОП, что вызывает большой прикладной интерес [3]. Однако использование СТНО в телекоммуникационных приложениях ограничивается очень низкой выходной мощностью генерируемой частоты возможность эффективного управления намагниченностью ферромагнитных наноструктур с помощью спин-поляризованного тока. Решение этой проблемы предполагается осуществлять с помощью как увеличения мощности отдельных вихревых СТНО, так и путем фазовой синхронизации ансамблей таких устройств.

В данной работе, с помощью микромагнитного моделирования, исследуется синхронизация двух вихревых СТНО. Для объяснения и интерпретации полученных результатов моделирования, была построена аналитическая модель синхронизации в предположении линейной связи

между вихрями. Схема исследуемых СТНО показана на рис.1а. Картина действия сил на магнитный вихрь в свободном слое показана на рис.1б.

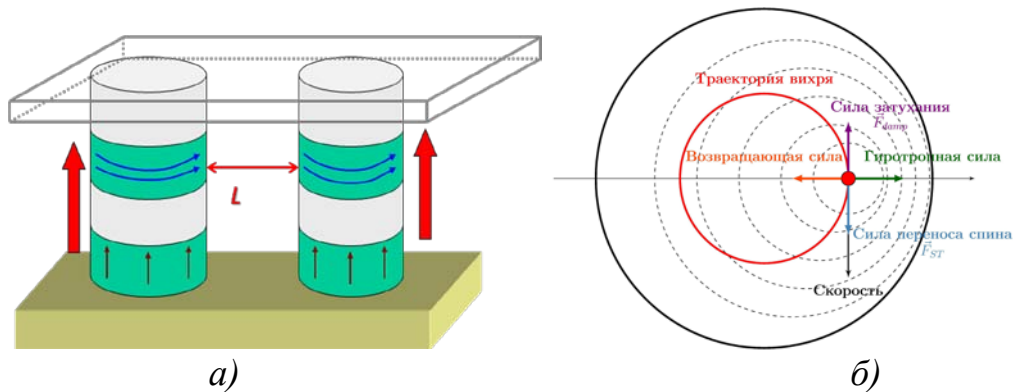


Рис.1. Модель исследуемой структуры (а) и проекция сил, действующих на магнитный вихрь в свободном слое (б)

При помощи пакета SpinPM было проведено полномасштабное микромагнитное исследование спектральных характеристик динамики движения связанных магнитных вихрей. Изучалась зависимость критического расстояния, на котором наблюдалась фазовая и частотная синхронизация вихрей, как функция разницы диаметров дисков (т.е. разницы собственных частот соответствующих вихревых структур). При этом в моделировании использовались следующие параметры: диаметры дисков:  $\varnothing = 200 \text{ нм} \pm \Delta$ , толщина свободного слоя 15 нм, материал – пермаллой Py ( $M_s = 800 \text{ етл/сс}$ ,  $A = 1.3e-6 \text{ ерг/см}$ ,  $\alpha = 0.01$ ). Слой-поляризатор:  $m_{ref} = (0,0,1)$ , поляризация  $P = 0.3$ . Использовалась дискретизация с размерами вычислительной ячейки  $1.5*1.5*(10/3.3) \text{ нм}^3$ .

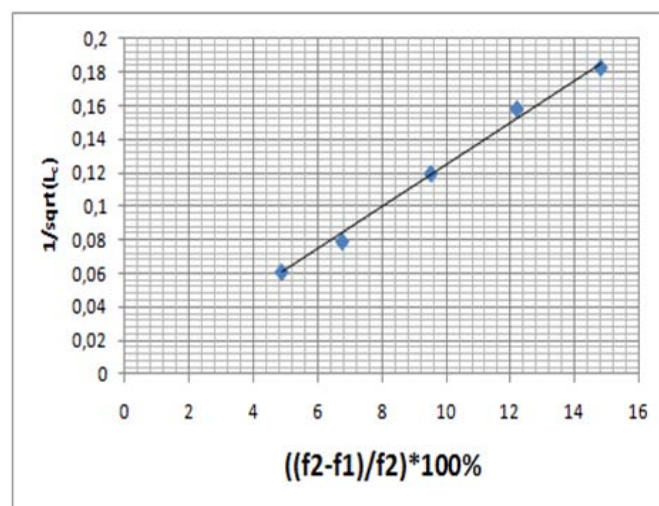


Рис.2. Характерная зависимость критического расстояния синхронизации от разницы собственных частот вихревых СТНО

В результате моделирования была получена следующая зависимость критического расстояния  $L_c$  от разницы диаметров (Рис.2). Отметим, что подобная корневая зависимость сохраняется и при других характерных размерах дисков ( $150 \text{ нм} \pm \Delta$  и  $300 \text{ нм} \pm \Delta$ ), что позволяет говорить о возможности масштабирования вихревых СТНО матриц.

Для интерпретации полученных результатов была построена аналитическая модель, основанная на системе редуцированных уравнений Тиля [2]. В случае изолированного вихря уравнение Тиля имеет вид:

$$G\left[\vec{e}_z, \dot{\vec{R}}\right] - 2\pi\eta\dot{\vec{R}} - 2\pi \cdot \Omega(\vec{R})\vec{R} - \pi\chi q\left[\vec{R}, \vec{e}_z\right] = 0, \quad (1)$$

где  $\vec{R} = X \cdot \vec{e}_x + Y \cdot \vec{e}_y$  - радиус-вектор текущего положения кора вихря, а  $\dot{\vec{R}} = d\vec{R}/dt$  его производная по времени,  $G\left[\vec{e}_z, \dot{\vec{R}}\right]$  - гиротропная сила и  $G = -2\pi \cdot p$  и  $p = \pm 1$  - полярность вихря,  $-2\pi\eta\dot{\vec{R}}$  - сила затухания, где  $\eta = \pi\alpha \cdot \ln(L/l)$  и  $\alpha$  - параметр, зависящий от материалов СВНО (для *NiFe* стандартно  $\alpha = 0,01$ ),  $L$  - радиус осциллятора,  $l$  характерная длина, равная 5-10нм,  $-2\pi \cdot \Omega(\vec{R})\vec{R}$  - возвращающая нелинейная сила, где  $\Omega(\vec{R})$  - функция, задающая нелинейность системы (с достаточной степенью точности можно аппроксимировать функцией типа  $\Omega(\vec{R}) = \Omega_0 \cdot (1 + a \cdot |\vec{R}|^2)$ , где  $\Omega_0$  зависит от радиуса осциллятора и его толщины [2] и  $a < 1$ ),  $-\pi\chi q\left[\vec{R}, \vec{e}_z\right]$  - сила, связанная с эффектом переноса спина, где  $\chi$  - нормированный спин-поляризованный ток.

При построении нашей модели мы предполагали, что энергия взаимодействия вихрей задается выражением  $W(\vec{R}_1, \vec{R}_2) = \mu \cdot (\vec{R}_1, \vec{R}_2)$ , где  $\mu$  - константа взаимодействия, обратно пропорциональная расстоянию между вихрями, т.е. связь между вихрями вводится линейной функцией.

Динамика уравнения (1) хорошо известна [2-3]. Пропуская промежуточные выкладки, система для двух линейно связанных вихрей может быть записана в виде:

$$\begin{cases} \dot{R}_1 = \left( \frac{\chi_1 q_1 p_1}{2} - \eta_1 \Omega(R_1) \right) \frac{R_1}{1 + \eta_1^2} - \frac{\mu}{2\pi(1 + \eta_1^2)} R_2 (\eta_1 \cos \psi + p_1 \sin \psi), \\ \dot{R}_2 = \left( \frac{\chi_2 q_2 p_2}{2} - \eta_2 \Omega(R_2) \right) \frac{R_2}{1 + \eta_2^2} - \frac{\mu}{2\pi(1 + \eta_2^2)} R_1 (\eta_2 \cos \psi - p_2 \sin \psi), \\ \dot{\psi} = (p_2 \Omega(R_2) - p_1 \Omega(R_1)) + \left( \eta_2 p_2 \frac{\dot{R}_2}{R_2} - \eta_1 p_1 \frac{\dot{R}_1}{R_1} \right) + \frac{\mu}{2\pi} \left( p_2 \frac{R_1}{R_2} - p_1 \frac{R_2}{R_1} \right) \cos \psi. \end{cases}$$

Последнее уравнение для разности фаз  $\psi$  приводится к виду

$$\dot{\psi} = \Delta\Omega + \mu \cdot \rho \cdot \sin(\psi + \alpha), \quad (4)$$

где  $\Delta\Omega, \rho, \alpha$  являются функциями  $R_{1,2}$ .

Используя полученную модель и микромагнитное моделирование с помощью пакета SpinPM, построены границы области синхронизации на плоскости управляющих параметров  $(L_{cr}, \delta d = (d_1 - d_2) / d_1)$  на рис.3.

Авторы выражают благодарность О.В. Кравченко за помощь в создании рисунков и ценные замечания.

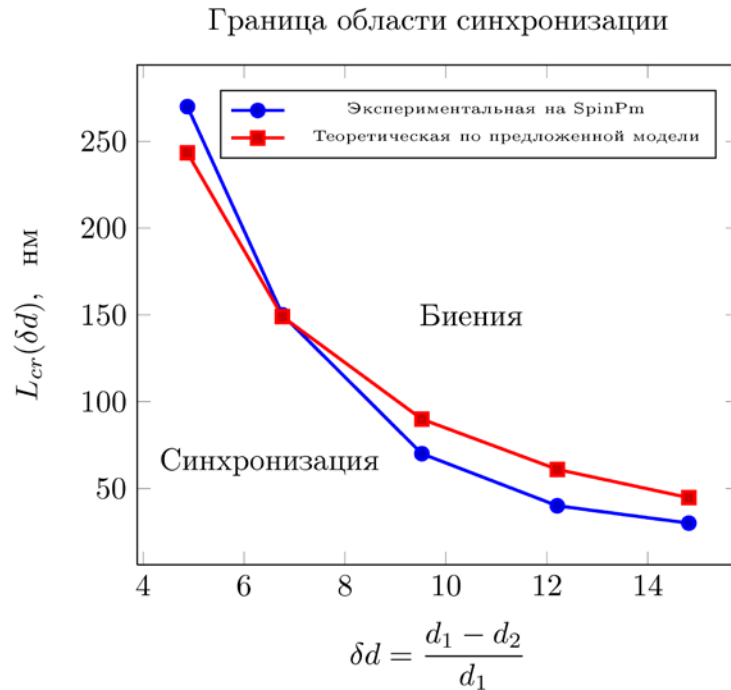


Рис.3. Границы области синхронизации двух СВНО построенные, используя микромагнитный пакет SpinPM и по предложенной в работе аналитической модели

## ЛИТЕРАТУРА

1. S.E. Russek et al. Spin-Transfer Nano-Oscillators. Chapter 38. Handbook of Nanophysics: Functional Nanomaterials. CRC Press. 2010.
2. Y. Gaididei et al // Int. Journal of Quantum Chemistry. 2010. V. 110. P. 83-97.
3. A. Dussaux et al.// Nature Communications. 1:8 doi: 10.1038/ncomms1006 (2010).

## ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПО ВРЕМЕННЫМ РЕАЛИЗАЦИЯМ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

А.С. Караваев<sup>1,2</sup>, В.И. Пономаренко<sup>1,2</sup>, М.Д. Прохоров<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

<sup>2</sup>Саратовский филиал ИПЭ им. В.А. Котельникова РАН

[karavaevas@gmail.com](mailto:karavaevas@gmail.com)

В работе предлагаются методики реконструкции систем с запаздывающей обратной связью в первой производной динамической переменной, моделируемых дифференциальными уравнениями нейтрального типа с запаздыванием, по временным рядам. Работоспособность предложенных методов продемонстрирована на численных примерах при восстановлении обобщенного уравнения Маккея-Гласса, а также модельных уравнений, описывающих качку корабля и колебания тела вертикально стоящего человека.

Реконструкция моделей многомерных колебательных систем со сложной динамикой по зашумленным временным реализациям экспериментально наблюдаемых величин является актуальной междисциплинарной задачей, имеющей большое значение при изучении многих реальных объектов, описание которых «из первых принципов» затруднено или невозможно.

Использование при реконструкции модельных уравнений по временным рядам универсальных методик, не учитывающих особенностей объекта, как правило, не приводит к успеху. На хороший результат обычно можно рассчитывать лишь при использовании специальных технологий реконструкции для определенных классов объектов. В нашем исследовании рассматривались системы, динамика которых зависит от скорости изменения динамической переменной в задержанные моменты времени. Они описываются дифференциальными уравнениями нейтрального типа с запаздыванием.

К таким уравнениям относится, например, обобщенное уравнение Маккея-Гласса [8]

$$\ddot{x}(t) = -\gamma \dot{x}(t) - \omega_0^2 x(t) + \omega_0^2 f(x(t - \tau_1)) + \frac{df(x(t - \tau_1))}{dx(t - \tau_1)} \dot{x}(t - \tau_1), \quad (1)$$

где нелинейная функция  $f$  имеет вид:

$$f(x(t - \tau_1)) = \frac{ax(t - \tau_1)}{1 + x^c(t - \tau_1)}. \quad (2)$$

К нейтральным системам относится также уравнение, описывающее малые колебания тела вертикально стоящего человека:



$$\ddot{x}(t) = -\gamma\dot{x}(t) - \omega_0^2 x(t) - k_1 x(t - \tau_1) - k_2 \dot{x}(t - \tau_1), \quad (3)$$

где  $\gamma$ ,  $\omega_0$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  — положительные параметры [21]. Время запаздывания  $\tau_1$  соответствует нейрофизиологической задержке, возникающей вследствие конечной скорости распространения и обработки нервных сигналов в организме человека.

При малой амплитуде колебаний уравнением нейтрального типа описывается также качка корабля, оборудованного для предотвращения качки на волнах специальными резервуарами, частично заполненными водой [20]:

$$\ddot{x}(t) = -\gamma\dot{x}(t) - \omega_0^2 x(t) - k\dot{x}(t - \tau), \quad (4)$$

где  $x(t)$  - угол отклонения судна от вертикального положения,  $\omega_0 > 0$  — частота собственных колебаний,  $\gamma > 0$  — коэффициент затухания,  $k > 0$  — коэффициент трения.

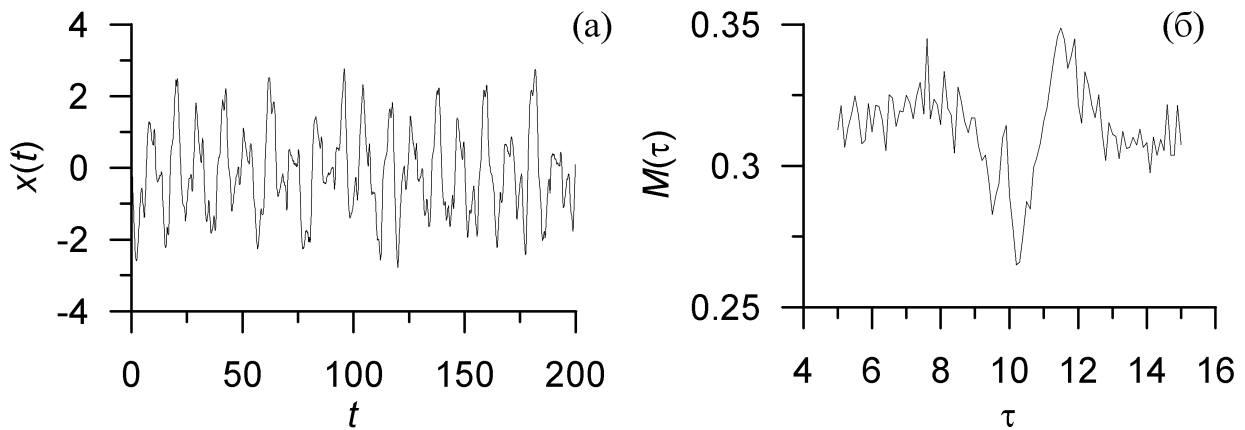


Рис. 1 (а) – участок хаотической реализации системы (1), (б) – зависимость  $M(\tau)$ .

Методы реконструкции параметров исследуемых систем.

Было показано, что распределение экстремумов временных реализаций систем вида (1), (3) и (4) подчиняется определенным закономерностям, позволяя определять время запаздывания, используя предложенную нами статистику  $M(\tau)$ . Статистика  $M(\tau)$  строится для различных значений  $\tau$ , при этом  $M$  — число пар точек, для которых одновременно выполняются 2 условия:  $\dot{x}(t) = 0$  и  $\ddot{x}(t - \tau) \neq 0$ . При построении зависимости  $M(\tau)$  используются только такие экстремальные точки  $\dot{x}(t) = 0$ , в которых вторая и третья производная имеют одинаковый знак. Показано, что зависимость  $M(\tau)$  имеет минимум при времени  $\tau$ , соответствующем времени запаздывания системы.

Был предложен также способ реконструкции времени запаздывания систем нейтрального типа, подразумевающий активное воздействие на исследуемую систему тестовым импульсным сигналом. Было показано, что взаимная корреляционная функция:

$$C(s) = \frac{\langle |\ddot{y}(t)| |\ddot{x}(t+s)| \rangle}{\sqrt{\langle |\ddot{y}(t)|^2 \rangle \langle |\ddot{x}(t)|^2 \rangle}}, \quad (5)$$

где угловые скобки обозначают усреднение по времени, имеет четко выраженный максимум при  $s = \tau_1$ ,  $x(t)$  – динамическая переменная,  $y(t)$  – временная реализация последовательности коротких импульсов с известным периодом и скважностью.

Показано, что восстановив время запаздывания системы прочие параметры и функцию  $f$  можно реконструировать с помощью вложения фазовой траектории системы в специальные подпространства низкой размерности и оценки количественных мер гладкости таких вложений.

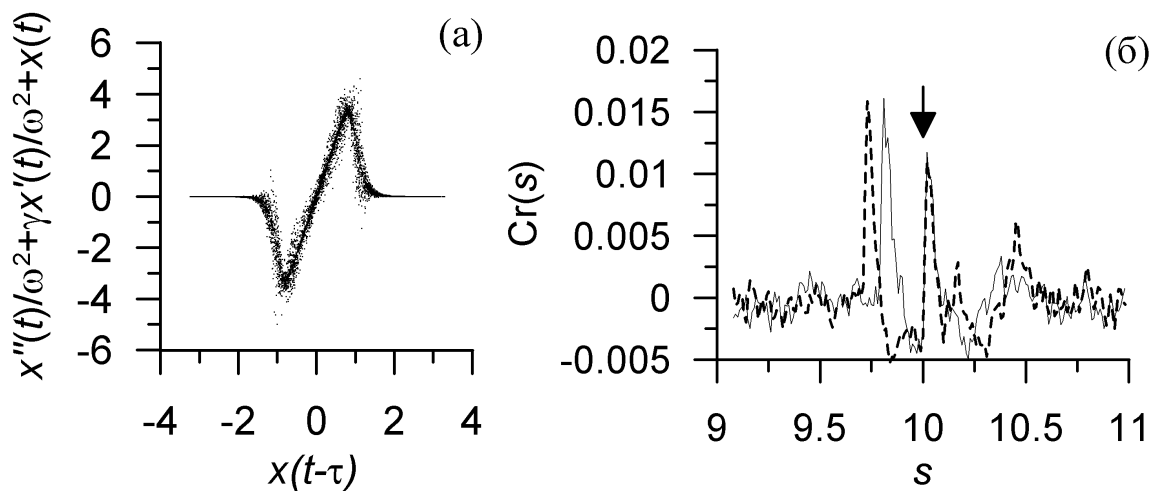


Рис. 2 (а) –восстановленная нелинейная функция системы (1), (б) –восстановление времени запаздывания с помощью импульсного воздействия. Стрелка указывает на истинное значение времени запаздывания, восстановленное значение  $\tilde{\tau}_1 = 10.2$ .

Предложенные методики применялись для восстановления обобщенного уравнения Маккея-Гласса (1) по наблюдаемому временному ряду. Были заданы следующие значения параметров:  $\gamma = 1.5$ ,  $\omega_0 = 1.0$ ,  $\tau_1 = 10.0$ ,  $a = 3.0$ ,  $c = 10.0$ . При этих параметрах система демонстрирует движение на хаотическом аттракторе высокой размерности [8]. В систему был добавлен динамический гауссовский белый шум с нулевым средним значением и среднеквадратичным отклонением, составляющим 20% от среднеквадратичного отклонения временного ряда без шума (отношение

сигнал/шум около 14 дБ). На рис. 1, а приведен фрагмент временного ряда колебаний системы. Масштабы таковы, что 100 точек ряда занимают временной интервал, равный времени задержки. Весь ряд состоял из 100000 точек и содержал около 5000 экстремумов.

Подсчитав число  $M$  одновременных обращений в нуль  $\dot{x}(t)$  и  $\ddot{x}(t-\tau)$  для различных значений  $\tau$ , перебираемых с шагом, равным шагу интегрирования  $h=0.1$ , построим зависимость  $M(\tau)$ , введя нормировку  $M$  на общее число экстремумов в ряде. Несмотря на присутствие шума, зависимость  $M(\tau)$  демонстрирует четко выраженный минимум при  $\tau_1=10.2$ , давая хорошую оценку времени запаздывания (рис. 1, б).

Заметим, что построение автокорреляционной функции не позволяет оценить время запаздывание системы, т.к. ее абсолютный максимум наблюдается при значении лага, соответствующего характерному периоду хаотических колебаний.

Результат восстановления нелинейной функции системы (1) с помощью проецирования экстремального сечения фазовой траектории системы на плоскость со специальным образом выбранными координатами представлен на рис. 2, а. Работоспособность методики реконструкции времени запаздывания с помощью воздействия зондирующими импульсами проиллюстрирована на рис. 2, б.

Было показано также, что разработанные методы позволяют восстанавливать параметры систем вида (3) и (4) в том числе с добавлением шума.

Таким образом, работоспособность предложенных подходов была проиллюстрирована в ходе численных экспериментов на системах различной природы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты № 10–02–00980, 11–02–00599, аналитической ведомственной целевой программы “Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2011 годы)”, проект № 2.1.1/1738.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Büchner M.J., Ciofini M., Giaquinta A., Hegger R., Kantz H., Meucci R., Politi A. // Eur. Phys. J. D. 2000. V.10. P.165–176.
2. R. J. Peterka, Sensorimotor Integration in Human Postural Control, J. Neurophysiol 88. P. 1097-1118. 2002.
3. Patanarapeelert K., Frank T.D., Friedrich R., Beek P.J., Tang I.M. // Phys. Lett. A. 2006. V. 360. P.190-198.

# ИССЛЕДОВАНИЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ МЕТОДА НЕЛИНЕЙНОЙ ПРИЧИННОСТИ ПО ГРЕЙНДЖЕРУ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ СТЕПЕНИ АДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛИ

М.В. Корнилов, И.В. Сысоев

*Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского*  
kornilovmv@info.sgu.ru

Работа посвящена исследованиям чувствительности метода нелинейной причинности по Грейнджеру в зависимости от степени адекватности модели.

Причинность по Грейнджеру – это метод оценки связанности между системами по их экспериментальным сигналам на основе построения эмпирической прогностической модели. Такой подход может применяться для анализа связности частоты сердечных сокращений и давления крови в сосудах по экспериментальным данным.

## 1. Методика построения модели.

Пусть имеется два временных ряда: ряд  $\{x_n\}_{n=1}^N$  от системы  $X$  и ряд  $\{y_n\}_{n=1}^N$  от системы  $Y$ . На основе анализа реализаций  $\{x_n\}_{n=1}^N$  и  $\{y_n\}_{n=1}^N$  требуется определить, влияет ли система  $Y$  на систему  $X$  или нет.

На первом шаге строится индивидуальная модель [1]:

$$x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-D_s}, c^s) + \xi_n^s \quad (1)$$

Коэффициенты  $c^s$  оцениваются методом наименьших квадратов по экспериментальной реализации  $\{x_n\}_{n=1}^N$ . Полученная в результате модель имеет среднеквадратичную ошибку аппроксимации  $\varepsilon_s^2$ , равную дисперсии остатков  $\xi_n^s$ .

Следующим шагом строится совместная модель:

$$x_n = g(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-D_s}, y_{n-1-\tau}, \dots, y_{n-D_d-\tau}, c^j) + \xi_n^j \quad (2)$$

Построив совместную модель можно рассчитать среднеквадратичную ошибку прогноза  $\varepsilon_j^2$ . Случай  $\varepsilon_j^2 < \varepsilon_s^2$  показывает, что данные из ряда системы  $Y$  помогли предсказать поведение системы  $X$ . Тогда говорят, что  $Y$  действует на  $X$  «по Грейнджеру».

Эффективность работы метода оценивалась с помощью показателя улучшения прогноза:

$$PI = 1 - \frac{\varepsilon_j^2}{\varepsilon_s^2}, \quad (3)$$

$PI = 0$  в случае, если данные из ряда  $Y$  не помогают предсказывать динамику системы  $X$ .  $PI$  достигает 1, если динамика  $X$  полностью описывается совместной моделью, но не описывается индивидуальной.

## 2. Тестирование значимости выводов

Поскольку совместная ошибка может быть меньше индивидуальной вследствие действия случайных факторов, требуется оценка статистической значимости рассчитываемого значения  $PI$ . Чтобы проверить, действительно ли введение зависимости от сигнала  $\{y_n\}_{n=1}^N$  в модель для сигнала  $\{x_n\}_{n=1}^N$  дает качественное улучшение прогноза, не обусловленное случайными факторами, использовались суррогатные временные ряды. Использовались три метода генерации суррогатных данных: с сохранением когерентности [2], случайного сдвига фаз, и на основе генерации временных рядов без связи.

Для оценки статистической значимости каждого рассчитываемого значения  $PI$  генерировался ансамбль из 100 рядов суррогатных данных и оценивался 95%-й квантиль. При расчетах  $PI(\tau)$ , сопровождаемых перебором пробных значений задержки  $\tau$ , оценивался полный 95%-й квантиль  $PI_{abs}$ .

## 3. Численный эксперимент

Метод основан на построении моделей и его эффективность в общем случае должна задаваться адекватностью модели объекту (временному ряду). В работе на основе реконструкции временных рядов эталонных систем Эно, отображений окружности, Икеды и Заславского исследуется эффективность метода при различных соответствиях формы модели и структуры объекта.

При исследовании чувствительности метода нелинейной причинности по Грейнджеру, рассматривались системы разной степени адекватности предполагаемой модели, с разными уровнями шума (динамический, статический), с вариациями коэффициента связности.

Для отображения Эно метод нелинейной причинности по Грейнджеру оказался эффективным вследствие того, что данное отображение имеет полиномиальную нелинейность низкого порядка.

При использовании отображения окружности (рис. 1) для приближения непрерывной функции, требуется полином более высокого порядка, что влечет дополнительные требования к ряду выборки.

Отображение Икеды имеет более сложную структуру, кроме непрерывности имеется скрытая переменная, и улучшение прогноза достигается только при больших степенях аппроксимирующего полинома.

Для отображения Заславского, которое являет собой следующую степень несоответствия, с точки зрения 95% интервала лишь часть результатов оказываются значимыми, а тест на специфичность дает

положительный результат, только при проверке суррогатами, сгенерированными на основе временных рядов без связи. Эффективность метода сильно зависит от ряда выборки и требует высокие степени полинома для функции приближения.

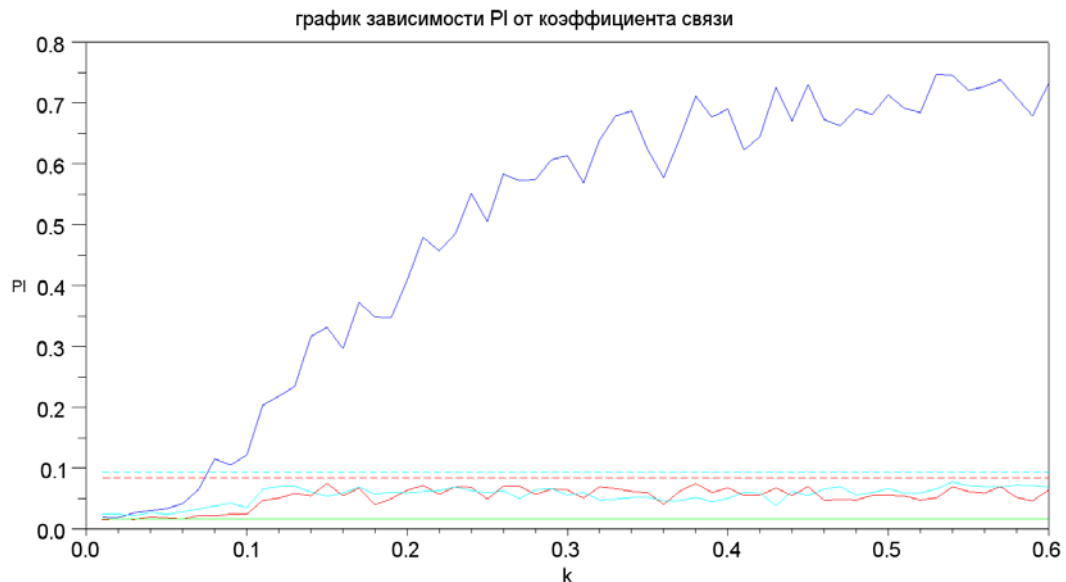


Рис 1. График зависимости коэффициента улучшения прогноза от коэффициента связи при использовании метода на отображении окружности. Синим изображен  $PI$ , красным – суррогаты случайного сдвига фаз, бирюзовым – суррогаты с сохранением когерентности, сплошная 95% доверительный интервал, пунктир – полный 95% доверительный интервал.

#### 4. Выводы.

При несоответствии структуры модели структуре объекта в ряде случаев всё равно удаётся обнаружить значимую связь, однако приходится использовать полином высокого порядка и модель высокой размерности. При этом связь оказывается возможным обнаружить только для случаев достаточно сильной связи – уровень связи должен быть существенно выше, чем в случае, когда структура модели адекватна.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. И.В. Сысоев, А.С. Караваяев, П.И. Наконечный // Изв. ВУЗов. ПНД. Т. 18, № 4. 2010. С. 81-90.
2. Kevin T. Dolan and Alexander Neiman. // Phesical Review E, V. 65. 026108.

# К ВОПРОСУ О ВЫБОРЕ СОСТОЯНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО – РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ РАСЧЕТА СПЕКТРА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА.

А.А. Короновский, В.А. Максименко, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов  
ГОУ ВПО «Саратовский государственный университет  
имени Н.Г. Чернышевского»  
e-mail: maximenkov1@gmail.com

Показатели Ляпунова являются широко используемым и весьма эффективным инструментом для анализа поведения систем различной природы. В частности, с их помощью можно охарактеризовать наблюдаемые хаотические режимы и обнаружить присутствие синхронных режимов, установившихся в динамике связанных систем. Уже долгое время показатели Ляпунова активно используются для анализа систем со сосредоточенными параметрами. Представляется перспективным применять их и для более сложных систем, таких, как системы с бесконечномерным фазовым пространством. Однако вычисление спектра показателей Ляпунова для таких систем, используя алгоритмы, разработанные для систем с малым числом степеней свободы, оказывается проблематичным. Основные проблемы, возникающие при расчете спектра показателей Ляпунова в данном случае связаны с тем, что фазовое пространство оказывается бесконечномерным. Соответственно, количество показателей Ляпунова также бесконечно. Кроме того, вместо конечномерного вектора малой размерности, поведение пространственно распределенной системы будет характеризоваться состоянием, которое для каждой системы необходимо определять по-своему.

В настоящей работе рассматривается вопрос о выборе состояния для пространственно - распределенных систем при расчете спектра показателей Ляпунова. В качестве модельных систем рассматриваются диод Пирса в гидродинамическом приближении [1] и ЛОВ с поперечным полем [2], которые являются эталонными пространственно – распределенными системами электронной природы.

Динамика диода Пирса, являющегося базовой моделью для теоретического и численного анализа сложного поведения в потоках заряженных частиц со сверхкритическим током, описывается системой уравнений [1]:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -v \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho, v)}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \alpha^2(1 - \rho), \quad (1)$$

где  $v$  и  $\rho$  – скорость и плотность электронного потока,  $\varphi$  – потенциал в пространстве взаимодействия,  $\alpha$  – безразмерный параметр Пирса. Граничные условия заданы в виде:

$$v(0,t)=1, \quad \rho(0,t)=1, \quad \varphi(0,t)=\varphi(1,t)=0. \quad (2)$$

Метод расчета показателей Ляпунова для пространственно-распределенных систем подробно изложен в [3]. В качестве состояния в данном случае была выбрана вектор-функция  $U(x,t)=(\varphi(x,t),\rho(x,t),v(x,t))^T$ , скалярное произведение в этом случае определялось как:

$$(U_1, U_2) = \int_L (\rho_1(x,t)\rho_2(x,t) + v_1(x,t)v_2(x,t) + \varphi_1(x,t)\varphi_2(x,t)) dx. \quad (3)$$

Зависимость первых четырех показателей Ляпунова от управляющего параметра  $\alpha$  приведена на рисунке 1(а). При сопоставлении этой зависимости с бифуркационной диаграммой (рис.1.(b)) видно, что показатели Ляпунова, рассчитанные с помощью предложенного метода, точно характеризуют режимы, наблюдаемые в системе.

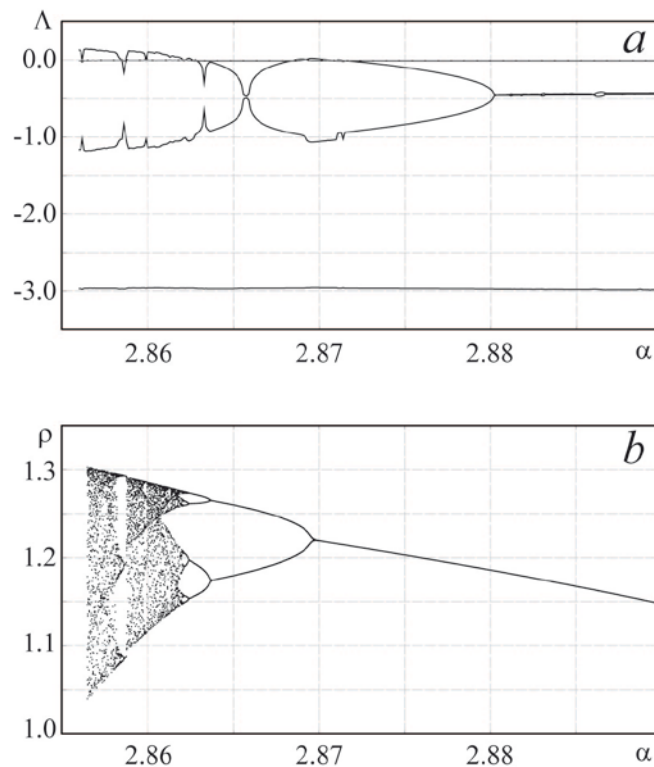


Рис. 1. (а) Спектр четырех старших показателей Ляпунова для диода Пирса и (b) бифуркационная диаграмма.

Как уже отмечалось выше, при анализе пространственно – распределенных систем выбор опорного состояния становится важным и зависит от специфики конкретной математической модели. В данном случае, в уравнениях, описывающих поведение диода Пирса, пространственное распределение потенциала зависит только от значения плотности заряда в данный момент времени. Иными словами, уравнения (1) являются избыточными, поскольку динамический оператор



эволюции, в принципе, можно переписать, исключив из рассмотрения потенциал  $\varphi$ . Можно предположить, что для расчета показателей Ляпунова в состоянии достаточно включить только те величины, производные от которых по времени входят в оператор эволюции, тем самым упростить вычисления и сократить затраты машинного времени.

Таким образом, состояние, характеризующие поведение диода Пирса, запишется следующим образом:  $U(x,t)=(\rho(x,t),v(x,t))^T$ , а скалярное произведение будет иметь вид:

$$(U_1, U_2) = \int_L (\rho_1(x,t)\rho_2(x,t) + v_1(x,t)v_2(x,t))dx. \quad (4)$$

Из рисунка 2, на котором приведены результаты расчетов для обоих случаев выбора состояния, видно, что исключение потенциала не влияет на значение показателей Ляпунова.

Можно предположить с высокой степенью вероятности, что такой подход является универсальным и может быть использован для широкого круга распределенных систем, описываемых, к примеру, уравнением Пуассона.

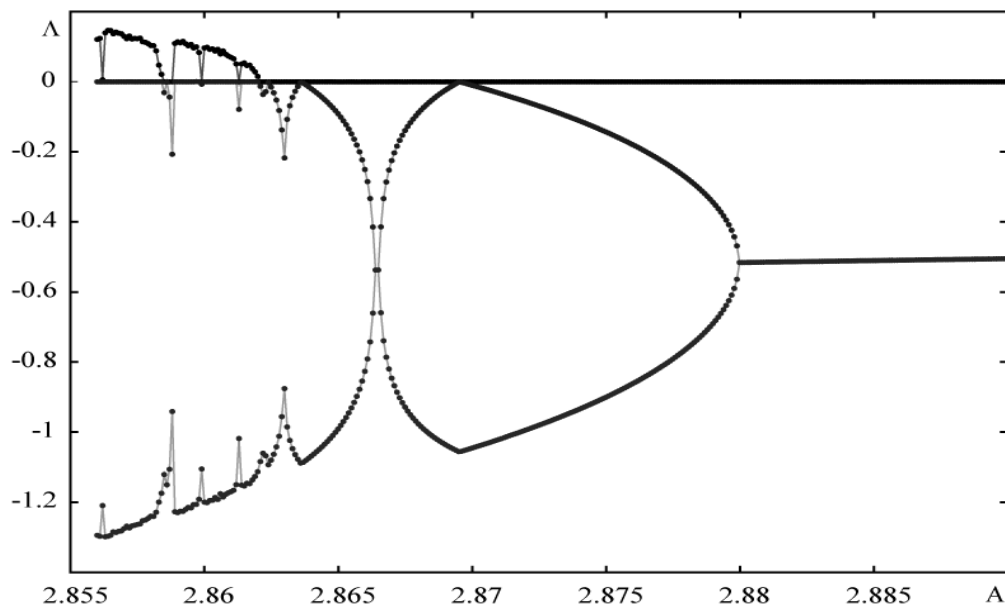


Рис. 2. Спектр показателей Ляпунова для диода Пирса, построенный с учетом всех величин ( $U=(\varphi, \rho, v)^T$  – линии) и без учета потенциала ( $U=(\rho, v)^T$  – точки)

Проверим данное предположение для ЛОВ с поперечным полем

$$\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial x} = -AI, \quad \frac{\partial I}{\partial x} + j|I|^2 I = -AF, \quad (5)$$

где  $F$  – комплексная амплитуда высокочастотного поля,  $I$  – амплитуда тока пучка,  $A$  – безразмерная длина лампы[2].

Выберем в качестве состояния:  $U(x,t)=(F(x,t),I(x,t))^T$ , затем, по аналогии с диодом Пирса, исключим из состояние ток, руководствуясь тем, что его значение не зависит явно от времени и определяется величиной электрического поля. Тогда состояние этой системы будет определяться только функцией  $F(x,t)$   $U(x,t)=F(x,t)$ , а скалярное произведение примет вид:

$$(U_1, U_2) = \int_L (F_1(x,t)F_2(x,t))dx. \quad (6)$$

На рисунке 3 представлены показатели Ляпунова, рассчитанные с использованием как  $U(x,t)=(F(x,t),I(x,t))^T$  в, так и  $U(x,t)=F(x,t)$  в качестве состояния. Как и следовало ожидать, исключение тока из состояния не влияет на полученные значения, о чем свидетельствует рисунок 3.

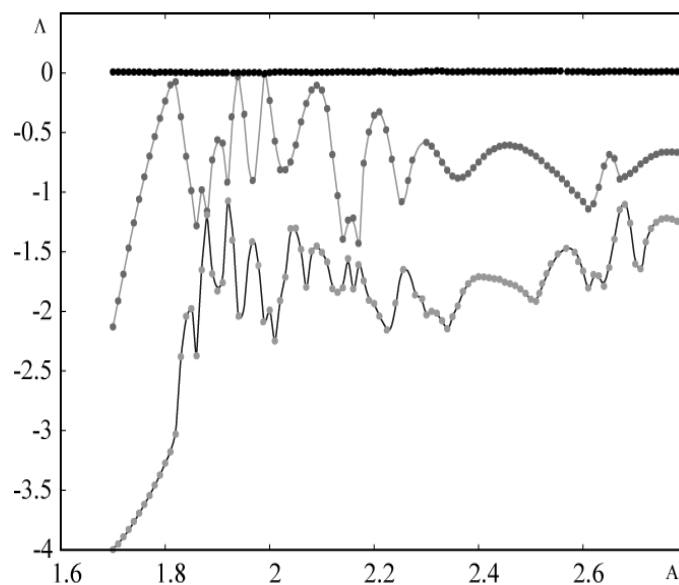


Рис. 3. Спектр показателей Ляпунова для ЛОВ с поперечным полем, построенный с учетом всех величин(линии) и без учета значений тока(точки)

Таким образом, в работе рассмотрен вопрос выбора опорного состояния для расчета спектра показателей Ляпунова для пространственно – распределенных систем электронной природы. Полученные результаты позволяют утверждать, что в ряде случаев количество величин, входящих в опорное состояние, может быть сокращено в силу особенностей модели.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Д.И. Трубецков, А.Е. Храмов “Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков”. Т. 1. М.: Физматлит 2003.

2. Д.И. Трубецков, А.Е. Храмов “Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков”. Т. 2. М.: Физматлит 2004.

3. А.А. Короновский, В.А. Максименко, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 18. 2011. №2.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ГЕНЕРАЦИИ В ЦЕПОЧКЕ ОДНОНАПРАВЛЕННО СВЯЗАННЫХ НИЗКОВОЛЬТНЫХ ВИРКАТОРОВ

А.А. Короновский, Н.С. Фролов, А.Е. Храмов  
*Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского*  
phrolovns@gmail.com

В настоящее время проводятся активные исследования приборов с электронной обратной связью [1], среди которых особый интерес вызывает релятивистский генератор на виртуальном катоде (виркатор) [2,3]. Подобные системы рассматриваются как перспективные источники мощного СВЧ излучения. Существует и разновидность виркатора с нерелятивистским электронным потоком – низковольтный виркатор, в котором формирование виртуального катода реализуется за счет дополнительного торможения пучка [4,5]. К достоинствам различных модификаций приборов с виртуальным катодом можно отнести возможность управления такими системами внешним сигналом [2]. Ранее были проведены исследования о влиянии внешнего одночастотного сигнала на синхронизацию виркаторов [6,7]. Однако, на практике наиболее перспективной схемой управления прибором внешним сигналом является использование цепочки двух генераторов, в которой один из приборов (ведущий генератор) однонаправленно воздействует на второй (ведомый) виркатор. Данные вопросы практически не исследованы, поэтому данный доклад посвящен изложению результатов теоретического исследования генерации в цепочке двух однонаправленно связанных низковольтных виркаторов.

В качестве базовой модели в работе рассматривалась простая модель низковольтного виркатора, представляющая собой плоский диодный промежуток, пронизываемый электронным потоком со сверхкритическим первеансом [5]. Для создания сверхкритического первеанса на выходную сетку системы подается тормозящий потенциал, в увеличении которого в электронном потоке формируется виртуальный катод. Известно, что в такой системе в определенном диапазоне управляющих параметров (ток пучка и тормозящее напряжение) наблюдается возбуждение как периодических, так и хаотических колебаний [4,5,8]. Моделирование процессов в исследуемой системе осуществлялось методом частиц в ячейке. Для вывода мощности СВЧ колебаний виртуального катода в низковольтном виркаторе обычно используется отрезок спиральной замедляющей системы, который моделировался методом эквивалентных схем [9].

Однонаправленная связь между низковольтными виркаторами реализовывалась путем подачи СВЧ сигнала с выхода первого (ведущего) генератора на вход второго (ведомого) генератора. Ввод сигнала в пучок в ведомом генераторе осуществлялся за счет модуляции потока, входящего в диодный промежуток, отрезком спирали, расположенном между электронной пушкой и входной сеткой пространства взаимодействия, на который подавался входной сигнал от ведущего виркатора. В канале связи между генераторами предполагалось наличие аттенюатора, который позволял управлять мощностью СВЧ сигнала, воздействующего на ведомый генератор.

В ходе численного анализа системы были получены выходные характеристики цепочки связанных генераторов (мощность генерации в зависимости от параметров генераторов и связи, спектры выходных сигналов), а также была диагностирована синхронизация между взаимодействующими виркаторами.

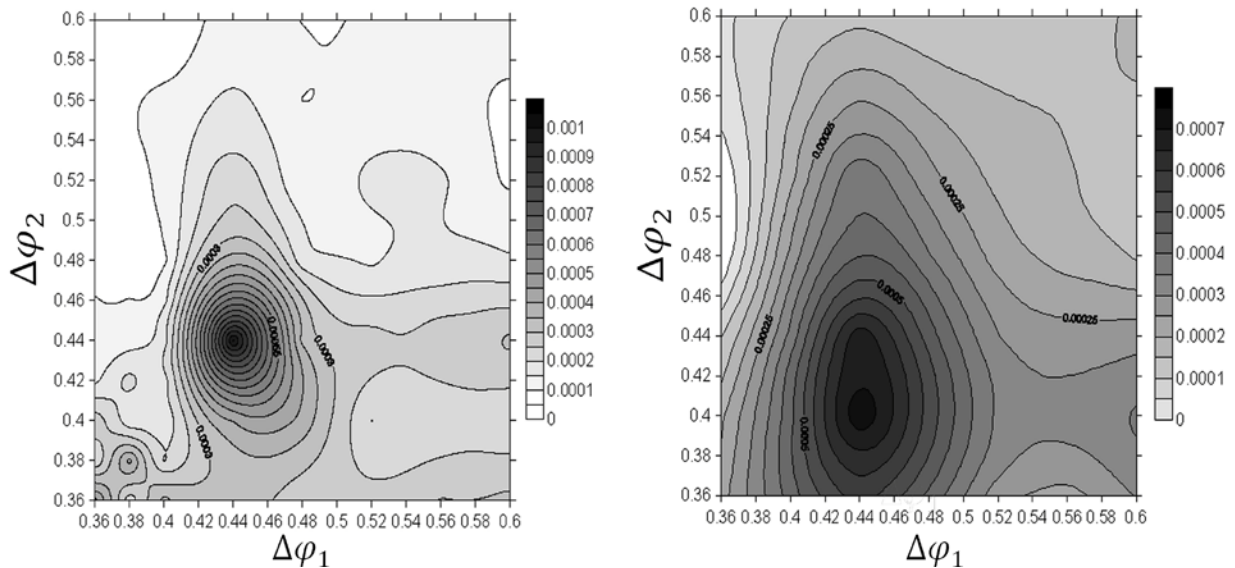


Рис.1 Двухпараметрическая зависимость мощности от тормозящих потенциалов:  
 $\epsilon_1 = 0,5$  (левый рисунок) и  $\epsilon_2 = 1$  (правый рисунок)

Двухпараметрическая зависимость мощности от тормозящих потенциалов на выходных сетках первого и второго генераторов при фиксированных коэффициентах связи, представленная на рисунке 1, показывает наличие пика мощности в определенной области параметров  $\Delta\varphi_{1,2} \sim 0.44$ . Рисунок 1 построен при токах пучка  $\alpha_{1,2} = 0.9$ . Видно, что с ростом коэффициента связи величина мощности, соответствующая максимуму, становится меньше и смещается в область более низких тормозящих потенциалов.

Между взаимодействующими генераторами была диагностирована «синхронизация временных масштабов» [10]. Для этого выходные сигналы генераторов были преобразованы с помощью вейвлетного анализа, где за материнский вейвлет был выбран Морле–вейвлет [11]. В этом случае можно оперировать с мгновенными множествами фаз, ассоциированных с временными масштабами, и сравнивать их. Если между генераторами устанавливается синхронизация, то возникает область временных масштабов, в которой разность фаз взаимодействующих однонаправлено связанных низковольтных виркаторов ограничена некоторой постоянной величиной.

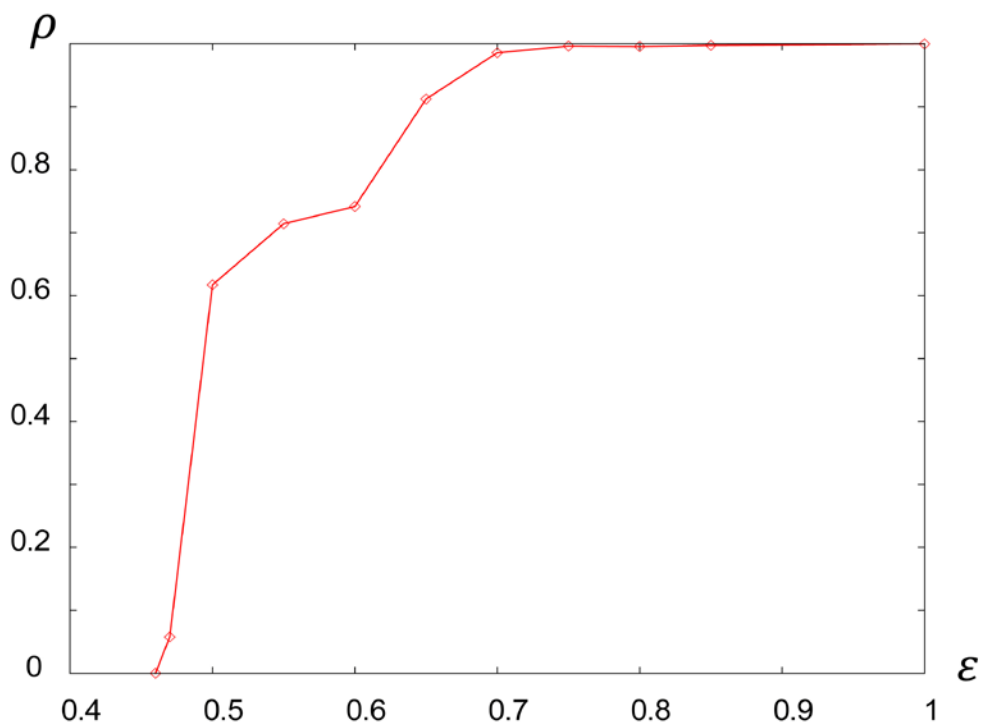


Рис.2 Зависимость меры синхронизации от параметра связи

Важной характеристикой синхронного поведения двух связанных генераторов является мера хаотической синхронизации, которая естественным образом вводится в случае синхронизации временных масштабов [12]. Мера хаотической синхронизации  $\rho$  является величиной, которая показывает какая часть энергии вейвлетного спектра приходится на область синхронизованных временных масштабов. Зависимость меры синхронизации от параметра связи приведена на рисунке 2 для следующих значений управляющих параметров генераторов:  $\alpha_{1,2} = 0.9$ ,  $\Delta\varphi_1 = 0.4$ ,  $\Delta\varphi_2 = 0.6$ . Исследования показали, что в системе взаимодействующих низковольтных виркаторов при превышении некоторого порогового значения коэффициента связи можно диагностировать режим

синхронизации временных масштабов. При рассматриваемых параметрах синхронизация, как видно из рис. 2, наблюдается при  $\varepsilon \sim 0.47$

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 09-02-00255) и Федеральной целевой программой “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы”.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А.А. Короновский, Д.И. Трубецков, А.Е. Храмов «Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот. Том 2. Нестационарные и хаотические процессы» М.: Физматлит, 2009.
2. А.А. Рухадзе, С.Д. Столбецов, В.П. Тараканов // Виркаторы (обзор). Радиотехника и электроника. 1992 Т. 37. № 3. С. 385.
3. А.Е. Дубинов, В.Д. Селемир // Радиотехника и электроника. 2002 Т. 47. № 6. С. 575.
4. Е.Н. Егоров, С.А. Куркин, А.Е. Храмов «Низковольтный виркатор. Нелинейная динамика интенсивного электронного потока с виртуальным катодом» Saarbrücken, Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co.KG, Dudweiler Landstr., 2010.
5. Ю.А. Калинин, А.А. Короновский, А.Е. Храмов, Е.Н. Егоров, Р.А. Филатов // Физика плазмы. 2005. Т. 31. № 11. С. 1009 – 1025.
6. J. Benford, J.A. Swegle, E. Schamiloglu. // CRC Press, Taylor and Francis, 2007.
7. Ю.А. Калинин, И.С. Ремпен, А.Е. Храмов // Изв. РАН. Сер. Физич. 2005. Т. 69. № 12. С. 1736-1740.
8. Е.Н. Егоров, Ю.А. Калинин, А.А. Короновский, Ю.И. Лёвин, А.Е. Храмов // РиЭ. 2005. Т. 52. № 1. С. 51 – 64.
9. Е.Н. Егоров, Ю.А. Калинин, Ю.И. Лёвин, А.Е. Храмов, М.Ю. Морозов // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32. № 9. С. 71 – 78.
10. А.Е. Храмов, А.А. Koronovskii // Chaos. 2004. V. 14. №3. P. 603 – 610.
11. А.А. Короновский, А.Е. Храмов «Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения» М.: Физматлит. 2003.
12. А.Е. Храмов, А.А. Koronovskii, P.V. Popov, I.S. Rempen // CHAOS. 2005. V. 15

# ГЕНЕРАТОР ФАЗОМАНИПУЛИРОВАННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ НА БАЗЕ ПЛИС SPARTAN 6К

А.Н. Леухин, И.А. Калашников<sup>1</sup>

<sup>1</sup> ГОУ ВПО «Марийский государственный технический университет»  
leukhinan@list.ru

Концепция широкополосных сложных сигналов нашла широкое применение в современных радиотехнических устройствах [1]. Сигналы с хорошими корреляционными свойствами используются в радио и гидролокации, в связи, в различных измерительных системах и системах синхронизации. Особое место занимают фазоманипулированные последовательности (ФМП). Такие последовательности требуются для систем широкополосного кодирования и разграничения множественного доступа (CDMA/SSMA). В глобальных спутниковых радионавигационных системах повышенные требования к точности, целостности и надежности позиционирования привели к созданию концепции введения в пользовательский интерфейс новых дальномерных сигналов, фазоманипулированных кодами больших длин.

Наиболее привлекательным с практической точки зрения является применения последовательностей как можно с меньшим фазовым алфавитом, например,  $\varphi = \{0, \pi\}$ . Однако сетка периодов бинарных последовательностей с хорошими корреляционными свойствами является сравнительно редкой. С целью уплотнения сетки длин возможных кодовых последовательностей приходится увеличивать число градаций фазы в фазоманипулированном коде.

В данной работе будет описан практически реализованный способ генерации сложных сигналов с точностью задания фазы в тысячные доли градуса. Генератор фазоманипулированных сигналов (ГФС) выполнен на базе программируемой логической интегральной схемы (ПЛИС) класса FPGA (Field Program Gate Array) Spartan 6К производства концерна Xilinx [2].

Интегральные схемы FPGA в настоящее время являются наиболее многообещающими при построении систем цифрового синтеза и real-time анализа радиотехнических сигналов. Если в начале 2000-х годов реально достижимая тактовая частота подобных схем была не более нескольких десятков мегагерц, то сегодня она превосходит гигагерцовые значения. Это делает возможным прямой цифровой синтез (DDS) сигналов с несущей до нескольких сотен мегагерц с возможностью управления амплитудой и фазой получаемых колебаний.

Тактовая частота поступает на аккумулятор фазы – двоичный счетчик, инкремент *inc* которого рассчитывается по соотношению:



$$inc = \frac{2^N f_{out}}{f_{clk}}, \quad (1)$$

где  $f_{out}$  – желаемая выходная частота,  $f_{clk}$  – частота тактового сигнала,  $N$  – количество двоичных разрядов таблицы, содержащей значения одного периода гармонической функции. Аккумулятор фазы, изменяя свою величину на  $inc$ , перебирает адрес в таблице, и каждый период тактового сигнала на выход DDS поступает соответствующее табличное значение. При желании осуществить сдвиг фазы на  $\theta$ , достаточно к величине фазового аккумулятора добавить число.

$$\xi = \frac{2^N \theta}{2\pi}. \quad (2)$$

Минимальное значение, на которое можно осуществить сдвиг фазового аккумулятора равно 1, получаем разрешение по фазовому сдвигу  $\Delta\theta$  :

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{2^N}. \quad (3)$$

Таким образом, при типичной длине таблицы косинусов в  $2^{30}$  можно получить разрешение по фазе до  $3 \cdot 10^{-30}$  рад, что перекрывает любую точность фазового сдвига, необходимую для решения практических задач.

Еще одним важным преимуществом FPGA можно назвать гибкость к изменениям дизайна, поскольку внутрисхемное содержание, хранящееся на отдельной мелкосхеме Flash памяти загружается каждый раз при подачи питания и может быть модифицировано сколько угодно раз без изменения аппаратной части устройства.

Таким образом, для построения генератора ФМП достаточно сконструировать на FPGA устройство синтеза цифрового прообраза, которое имеет отдельную схему управления на входе для задания частот и фазоманипулированных сигналов и цифро-аналоговый преобразователь на выходе с соответствующим согласующим устройством, осуществляющим низкочастотную фильтрацию и буферизацию на выходную нагрузку.

Конструирование функциональных узлов на FPGA может осуществляться как в режиме редактирования принципиальных схем, которые строятся из отдельных стандартных и пользовательских компонентов, доступных в соответствующей палитре редактора, так и на уровне языкового описания функциональных логических узлов при помощи унифицированного языка VHDL. Для наиболее типичных узлов, таких как DDS, различные преобразования и интерфейсы возможно использование специфических компиляторов – ядер интеллектуальной

собственности (IP Cores) поставляемых как изготовителем ПЛИС, так и многими другими компаниями-разработчиками.

Для построения ГФС можно рассматривать использование готового ядра DDS (DDS Compiler 5.0) программы навигатора проектов Xilinx ISE 10.1 совместно со схемой контроля, которая должна получать информацию от управляющего компьютера о параметрах сигнала. Компилятор DDS позволяет генерировать схемный компонент – табличный синтезатор гармонического колебания с максимальной частотой для используемой интегральной схемы до 300 МГц, разрешением по частоте до сотых долей герц и по фазе до десятых долей градуса. При этом, имея двоичный 10-разрядный выходной сигнал, данное решение обеспечивает хороший диапазон свободный от гармоник не менее 60 децибел.

Структурно-функциональная схема разработанного генератора фазоманипулированных последовательностей представлена на рисунке 1. В устройство входят 1) – шина USB, 2) мелкосхема двухканального контроллера USB FT2232H, канал “А” которого используется в качестве on-line конфигурирования FPGA, в основном во время отладки, а канал “В” настроен на работу в режиме последовательного асинхронного порта UART, по которому осуществляется связь с системой полуавтономного управления ГФС 3), выполненной на сигнальном процессоре dsPIC33FJ128GP706 фирмы Microchip. Этот контроллер, помимо передачи данных для генератора фазоманипулированных последовательностей через последовательный порт SPI со скоростью 10 мегабит в секунду, используется для записи программы FPGA (4) в SPI flash-конфигурационную память (5) M25P40 емкостью 4 мегабита.

Центральная часть устройства, выполненная в программируемой логической электронной схеме, содержит преобразователь протокола SPI (SPI контроллер) для обмена данными со схемой управления, контроллер последовательности, который хранит информацию о длительности, фазе, частоте и амплитуде отдельных кодовых интервалов.

Непосредственно фазовый модулятор реализован в виде функционального блока FPGA DDS 10bit, сгенерированный программой LogiCore DDS Compiler 5.0. Он содержит параллельную шину управления частотой и фазой, которая используется в реальном времени контроллером последовательности. Тактирование DDS выполняется от термокомпенсированного внешнего кварцевого генератора (6) через систему ФАПЧ, реализованную внутри ПЛИС, позволяющую повысить тактовую частоту до 265 мегагерц. Два канала цифрового выхода синтезатора частоты выведены параллельной шиной на двоянный цифроаналоговый преобразователь DAC5652 фирмы Texas Instruments. Аналоговый сигнал через дифференциальные трансформаторы и фильтры низкой частоты (8), подавляющие нежелательные комбинационные

частоты и гармоники поступает на буферные усилители (9) с регулируемым коэффициентом усиления: регулировка производится на интегральной схеме аналогового перемножителя AD835, а усиление и согласование на 50-омную нагрузку на операционном усилителе с токовой обратной связью AD8009, что обеспечивает достаточно ровную частотную характеристику вплоть до частоты Котельникова.

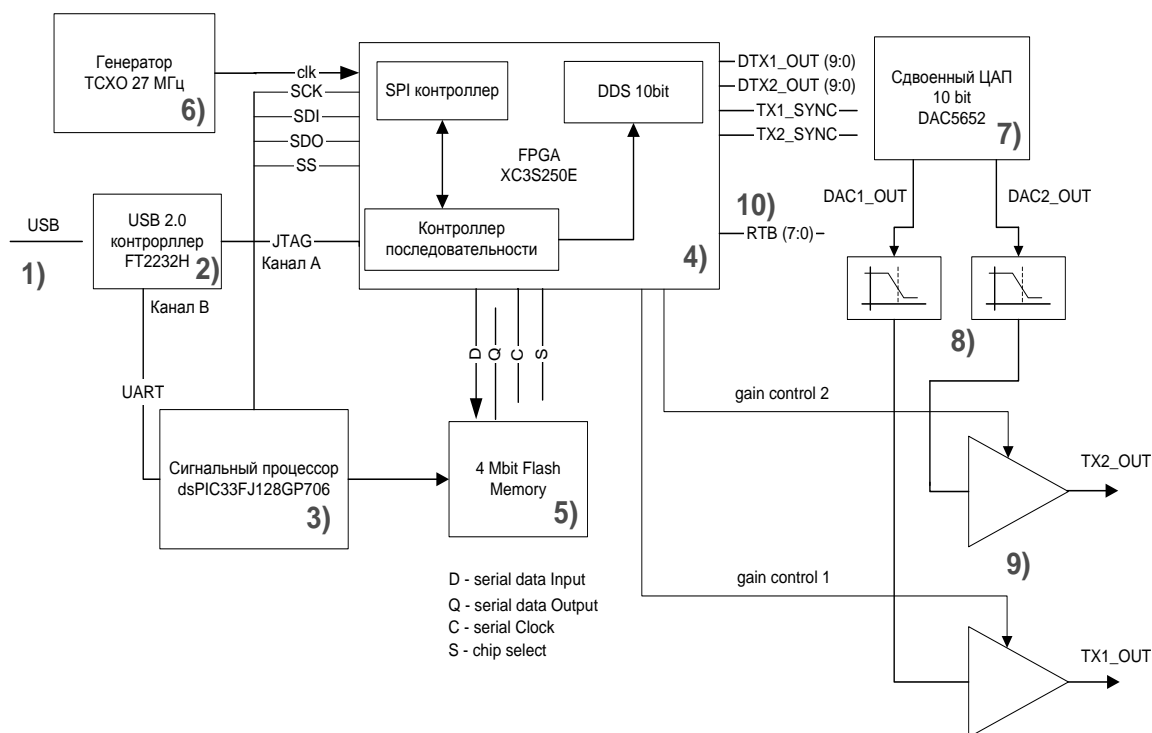


Рис. 1 Структурно-функциональная схема ГФС

В схеме ГФС также предусмотрено 8 дополнительных цифровых дифференциальных (LVDS) входов-выходов RTB(7:0) шины реального времени (10). Эти сигналы могут быть использованы для синхронизации и обмена данными с другими внешними устройствами.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Президента РФ МД-54182010.9, в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы ГК № П783 и ГК №02.740.11.0838, гранта РФФИ 09-07-00072-а.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В.П. Ипатов «Широкополосные системы и кодовое разделение сигналов. Принципы и приложения» М.: Техносфера. 2007.

2. [www.xilinx.com](http://www.xilinx.com).

# АННИГИЛЯЦИЯ ВИХРЕВЫХ ПАР В БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКОМ КОНДЕНСАТЕ

В. А. Миронов, Л. А. Смирнов  
*Институт прикладной физики РАН*  
smirnov\_lev@appl.sci-nnov.ru

Одной из актуальных и быстро развивающихся областей современной нелинейной динамики является теория турбулентности в сверхтекучих жидкостях, к которым относится и бозе-эйнштейновский конденсат (БЭК) атомов щелочных элементов. Для таких сред характерно существование квантовых вихрей, представляющих собой особые линии в распределении скорости потенциального течения. При изучении турбулентности в БЭК важное место занимает проблема описания процессов рождения и аннигиляции вихревых структур. В двумерном облаке БЭК вихри могут возникать в результате распада изначально созданных в нем, достаточно протяженных, безвихревых возмущений, неустойчивых по отношению к пространственной модуляции параметров (ширины, скорости распространения и т. д.) [1,2], или при воздействии на конденсат лазерного излучения [3,4]. Причем рождаются вихри всегда парами «вихрь-антивихрь». Эти пары активно взаимодействуют друг с другом, что приводит к турбулизации течения БЭК [1]. Когда вихри сближаются настолько, что расстояние между их центрами становится меньше некоторого критического значения (порядка корреляционного радиуса), то пара как стационарное образование перестает существовать. Она разрушается (аннигилирует), сбрасывая циркуляцию и излучая мелкомасштабные звуковые волны. В данной работе изучаются закономерности такой аннигиляции.

Волновая функция  $\Psi(t, \mathbf{r})$  исходно однородного конденсата в приближении среднего поля удовлетворяет уравнению Гросса-Питаевского (ГП), которое в безразмерных переменных имеет вид:

$$i\partial_t \Psi(t, \mathbf{r}) + 1/2 \Delta \Psi(t, \mathbf{r}) + (1 - |\Psi(t, \mathbf{r})|^2) \Psi(t, \mathbf{r}) = 0. \quad (1)$$

Если интересоваться солитоноподобными подвижными двумерными структурами  $\Psi(t, \mathbf{r}) = \Psi(\xi, y)$ , где  $\xi = (x - Mt)$ , то они, как следует из (1), описываются следующим стационарным нелинейным уравнением Шредингера:

$$-iM\partial_\xi \Psi(\xi, y) + 1/2(\Psi_{\xi\xi}(\xi, y) + \Psi_{yy}(\xi, y)) + (1 - |\Psi(\xi, y)|^2) \Psi(\xi, y) = 0. \quad (2)$$

Проведенный нами численный и аналитический анализ показывает, что у уравнения (2) при любых значениях скорости  $M$ , меньших скорости звука

( $|M| \leq 1$ ), существует два (а не один, как утверждается в [5]) вида двумерных солитонов. В одних из них концентрация БЭК в двух точках, расположенных на линии, перпендикулярной направлению движения, обращается в нуль (Рис. 1,а). Бозе-газ в окрестности этих точек (топологических дефектов) вращается в противоположных направлениях. Это указывает на то, что рассматриваемые стационарные образования представляют собой пары вихревых нитей с топологическими зарядами, равными по модулю, но различающимися по знаку. С увеличением скорости движения «вихрь» и «антивихрь» в паре располагаются все ближе и ближе друг к другу, однако расстояние между ними  $d$  всегда остается больше корреляционного радиуса (в безразмерных единицах  $d > d_{\min} \approx 2$ ). Если  $M \rightarrow 1$ , то  $d \rightarrow d_{\min} \approx 2$ . Данный факт можно объяснить, используя простые представления, основанных на построенном в работе решение нестационарного линейного двумерного уравнения Шредингера (1), справедливым для случая двух близко расположенных вихрей. Из него, в частности, следует, что два вихря с противоположными по знаку топологическими зарядами, центры которых изначально находятся на расстоянии  $d_{in} < 2$ , стягиваются в одну точку и исчезают за время  $t \approx (d_{in}/2)^2$

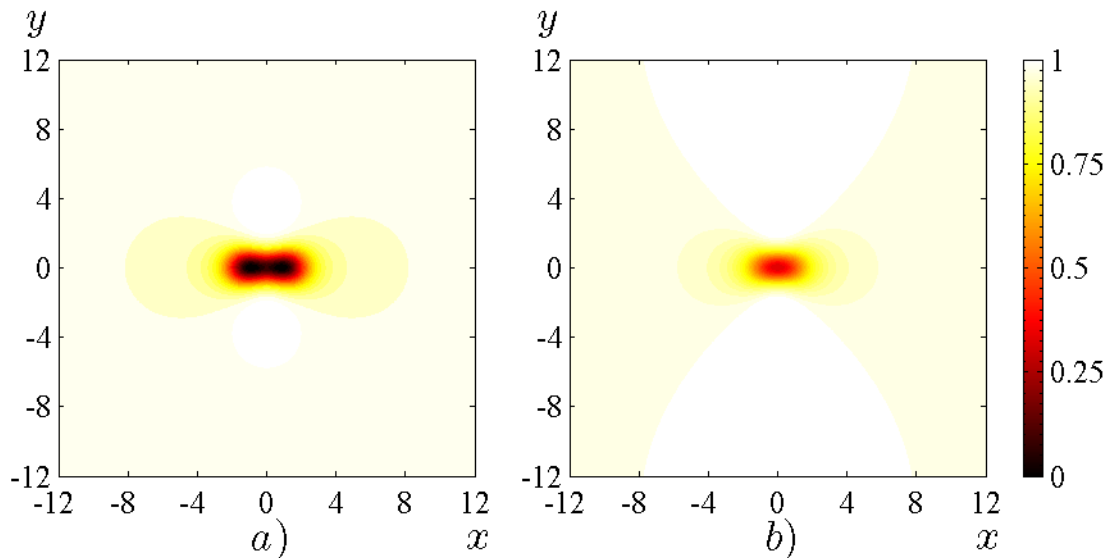


Рис. 1. Распределение плотности БЭК в вихревой паре (а) и в безвихревом солитоне (b) при одинаковой скорости движения  $M = 0.5$ .

Для второго вида двумерных солитонов характерно отсутствие точек, где концентрация БЭК равна нулю (Рис. 1,б). В слабо нелинейном пределе, когда скорость  $M$  стремится к звуковой ( $M \rightarrow 1$ ), данные солитоны совпадают с известными решениями двумерного уравнения Кадомцева-

Петвиашвили.

Нами было проанализированы особенности распределения концентрации, потоков и энергетических спектров БЭК в двумерных стационарных солитоноподобных структурах, а также исследована их устойчивость.

Мы задавали в качестве начального распределения в нестационарном уравнении ГП (1) волновую функцию  $\Psi(t, \mathbf{r}) = \Psi(x, y)$ , найденную в результате численного решения стационарного уравнения (2). Непосредственное компьютерное моделирование нестационарной задачи показывает, что существует некоторое критическое значение скорости  $M_{crit} \approx 0.61$ . При  $M < M_{crit}$  устойчивым оказывается решение в виде вихревых пар, а при  $M > M_{crit} \approx 0.61$ , устойчивым будет уже безвихревое стационарное решение.

Как уже отмечалось выше, вихревые пары в результате взаимодействия с другими вихрями или потоками (течениями) БЭК могут ускоряться. Когда их скорость станет больше критической ( $M > M_{crit}$ ), вихревой солитон теряет свою устойчивость и начинает аннигилировать. В работе аналитически исследована начальная стадия этой аннигиляции и показано, что она сопровождается ростом мелкомасштабных возмущений плотности конденсата. В конечном итоге вихревая пара разрушается, но вместо нее может сформироваться безвихревой устойчивый двумерный солитон. Этот процесс сопровождается существенной перестройкой энергетического спектра возмущений БЭК. Причем закон его спадания после аннигиляции совпадает с коротковолновой асимптотикой энергетического спектра развитой двумерной турбулентности БЭК [6].

Таким образом, при сближении вихрей стационарная вихревая пара теряет свою устойчивость. Из области ее локализации излучаются волны плотности, а вместо нее образуется безвихревой солитон, похожий на известное решение уравнения Кадомцева-Петвиашвили. Такая аннигиляция приводит к существенной перестройке энергетического спектра начального возмущения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Миронов, Л. А. Смирнов // Известия Российской академии наук. Серия физическая. 2009. Т. 73. № 12. С. 1801-1805.
2. В. А. Миронов, А. И. Смирнов, Л. А. Смирнов. // ЖЭТФ. 2010. Т. 137. Вып. 5. С. 1004-1017.
3. В. А. Миронов, Л. А. Смирнов. // Известия РАН. Серия физическая. 2010. Т. 74. № 12. С. 1791-1795.
4. В. А. Миронов, А. И. Смирнов, Л. А. Смирнов. // ЖЭТФ. 2011. Т. 139. Вып. 1. С. 55-70.

5. C. A. Jones, H. Roberts. // J. Phys. A: Math. Gen. 1982. V. 15. P. 2599.
6. T.-L. Horng, C.-H. Hsueh, S.-W. Su, Y.-M. Kao, S.-C. Gou. // Phys. Rev. A. 2009. V. 80. № 2. P. 023618(7).



# НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ КОЛЬЦЕВОЙ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ ФЕРРОМАГНИТНОЙ ПЛЁНКИ В УСЛОВИЯХ ТРЁХВОЛНОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Д.В. Романенко, Ю.П. Шараевский, С.В. Гришин  
Саратовский Государственный Университет  
dmitrii.romanenk@mail.ru

Как показано экспериментально [1], в кольцевых автоколебательных системах на основе ферромагнитных пленок в условиях существования трехволновых параметрических процессов наблюдается автогенерация хаотического сигнала. Одна из первых моделей, описывающих трехволновое взаимодействие в параметрической среде с линейным усилением, была предложена в [2]. Модель описывала параметрическое взаимодействие волн различной природы, включая спиновые волны в системах с усилением [3]. Переход к хаотической автомодуляции в такой модели наблюдался при отстройках частоты спиновых волн от половинной частотой магнитоэлектронной волны (МЭВ)  $\delta$  порядка  $\sim 8$  МГц. Подобные значения отстройки слишком велики и не наблюдаются в эксперименте [4].

В данной работе представлена модель кольцевой автоколебательной системы на основе ферромагнитной пленки при условии существования трехволновых параметрических процессов. Данная модель представляет из себя систему трёх комплексных уравнений, записанных с учётом времени задержки в цепи обратной связи и нелинейности усилителя.

$$\begin{aligned}\frac{da_0}{dt} &= -c_0 a_1 a_2 \exp(-i\delta t) + \gamma f(a_0(t-\tau)) a_0(t-\tau) \\ \frac{da_1}{dt} &= c_1 a_0 a_2^* \exp(i\delta t) - \nu a_1 \\ \frac{da_2}{dt} &= c_2 a_0 a_1^* \exp(i\delta t) - \nu a_2\end{aligned}$$

где  $a_0, a_1, a_2$  - комплексные амплитуды магнитоэлектронной и спиновых волн, соответственно;  $\delta$  - отстройка;  $\nu$  - коэффициент затухания спиновых волн;  $\gamma$  - линейный коэффициент усиления;  $\tau$  - задержка в цепи обратной связи;  $f$  - функция, характеризующая нелинейность усилителя.

Учет нелинейности усилителя и времени задержки в цепи обратной связи позволяет наблюдать режим одночастотной генерации и переход к хаотической модуляции при сравнительно небольших отстройках  $\delta \sim 100-300$  КГц.

При малом значении линейного коэффициента усиления  $\gamma$  в системе устанавливается стационарный режим, что соответствует одночастотному

режиму в исследуемой кольцевой системе. При этом амплитуда МСВ недостаточна велика для возбуждения спиновых волн (Рис.1а). При некотором пороговом значении  $\gamma_{i\delta}$  в системе наблюдается автомодуляция сигнала (Рис.1б). Если коэффициент  $\gamma \approx \gamma_{i\delta}$ , то модуляция близка к синусоидальной. При дальнейшем увеличении  $\gamma$  период автомодуляции уменьшается, а форма сигнала начинает напоминать релаксационные колебания (Рис.1в). При больших значениях коэффициента усиления в системе наблюдается хаотическая автомодуляция (Рис.1г).

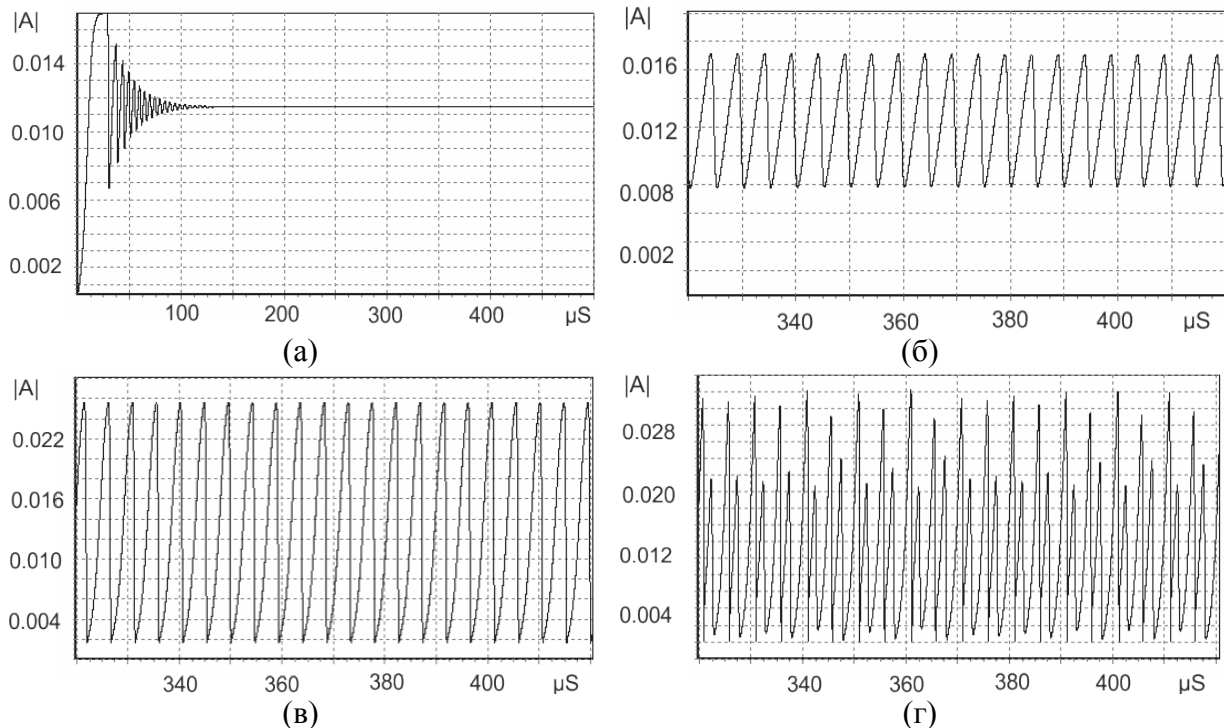


Рис.1. Эволюция модуля комплексной амплитуды МСВ при увеличении коэффициента усиления  $\gamma$  в кольце: 0.30 (а), 0.45 (б), 0.95 (в)б 1.5 (г)

Полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства России для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих учёных в российских ВУЗах (грант № 11.G34.31.0030)

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Демидов, Н. Г. Ковшиков // Письма в ЖТФ 1998 Т. 24, Вып. 7, С. 66.
2. С. Я. Вышкинд, М. И. Рабинович// ЖЭТФ 1976. Т. 71, Вып. 2, С. 557.
3. В. Е. Демидов, Н. Г. Ковшиков// ЖТФ 1999 Т. 69, Вып. 8, 100.

4 Е. Н. Бегинин, С. В. Гришин, Ю. П. Шараевский// Письма в ЖЭТФ  
2008, Т. 88, Вып. 10, С. 743.