

### СЕКЦИЯ 3. НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

<b>Численная мера для оценки степени фазовой синхронизованности</b> Е.И. Боровкова, А.С. Караваев.....	2
<b>О первой краевой задаче теории упругости для цилиндрического слоя с сильно различающимися характерными размерами</b> Т.И. Гаряева, Д.В. Георгиевский .....	7
<b>Автогенератор с инерционной нелинейностью в дискретном времени</b> В.В. Зайцев, А.В. Карлов (мл).....	10
<b>Использование турбулентных электронных потоков для генерации широкополосных хаотических колебаний</b> Ю.А. Калинин, А.В. Стародубов .....	12
<b>Течение бозе-эйнштейновского конденсата в квазиодномерном канале под действием поршня</b> А.М. Камчатнов, С.В. Корнеев .....	16
<b>Исследование осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки под действием неконсервативной нагрузки</b> К.В. Квачев, Д.В. Георгиевский.....	18
<b>Формирование пространственно-временных структур в системе активная среда – волновое поле с полупрозрачной границей</b> В.Н. Корниенко, А.П. Привезенцев.....	21
<b>Синхронизация временных масштабов как обобщение классических типов хаотической синхронизации – экспериментальная иллюстрация</b> А.А.Овчинников, А.А. Короновский, А.Е. Храмов .....	26
<b>Исследование частичной обобщенной синхронизации хаотической динамики в уравнении Гинзбурга-Ландау</b> Н.С. Фролов, А.А. Короновский, А.Е. Храмов .....	28
<b>Оценка запаздывания и направления связи между низкочастотными колебаниями сердечного ритма и кровяного давления человека</b> В.С. Хорев, В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров .....	30
<b>Особенности нелинейных эффектов при распространении магнитостатических волн в магнитных кристаллах</b> С.Е. Шешукова, М.А. Морозова .....	32

## ЧИСЛЕННАЯ МЕРА ДЛЯ ОЦЕНКИ СТЕПЕНИ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗОВАННОСТИ

Е.И. Боровкова, А.С. Караваев

*Саратовский государственный университет имени Н.Чернышевского*

[Rubanei@mail.ru](mailto:Rubanei@mail.ru)

Современная нелинейная динамика предлагает различные информативные количественные меры синхронизованности, но область применения этих мер ограничена в случае анализа сложных (хаотических), нелинейных, нестационарных, зашумленных сигналов, с обработкой которых приходится сталкиваться каждый день. Поэтому необходимо разрабатывать специализированные методы, ориентированные на решение конкретных задач. Работа посвящена разработке методики численной оценки фазовой синхронизованности, ориентированной на анализ и обработку хаотических, нелинейных, нестационарных, зашумленных сигналов, основанной на расчете суммарного процента фазовой синхронизации. Понятие "синхронизация" в современной литературе трактуется широко. В данной работе под фазовой синхронизацией будем понимать процесс подстройки фаз автоколебательных систем в результате их взаимодействия. Согласно этому определению, при наличии фазовой синхронизации зависимость разности фаз от времени колеблется около некоторого постоянного значения. Синхронизацию между исследуемыми колебательными процессами мы диагностировали, анализируя разность их фаз. Возникновение фазовой синхронизации означает, что происходит захват фаз колебательных процессов, в то время как амплитуды сигналов остаются несвязанными друг с другом и могут меняться хаотически. Захват фаз влечет за собой совпадение частот сигналов. Области синхронизации между исследуемыми ритмами могут быть диагностированы по графику разности фаз как области, на которых относительная фаза колеблется около некоторого постоянного значения. Затем подсчитываем суммарную длительность всех областей синхронизации и выражаем ее в процентах от длительности всей записи. Рассчитанный таким способом показатель называем суммарным процентом фазовой синхронизации  $S$ . Для автоматизации процедуры поиска участков синхронизации исследуемых колебательных процессов разработан алгоритм, основанный на линейной аппроксимации мгновенной разности фаз  $\varphi(t)$  в скользящем окне. Метод состоит в следующем. В окне, имеющем ширину  $b$ , с помощью метода наименьших квадратов проводится линейная аппроксимация зависимости  $\varphi(t)$  (рис. 1). В результате, для момента времени  $t_i$ , соответствующего середине окна, получаем угловой коэффициент наклона аппроксимирующей прямой  $\alpha_i$ . Сдвигая окно на одну точку вдоль временной реализации  $\varphi(t)$ , вычисляем

угол наклона  $\alpha_{i+1}$  для момента времени  $t_{i+1}$  и т.д. Областям фазовой синхронизации, на которых зависимость  $\varphi(t)$  имеет почти горизонтальный вид, должны соответствовать участки с малым значением  $\alpha$ . Введем пороговое значение коэффициента наклона  $\alpha$ , равное  $\pm a$ , полагая, что синхронизация колебаний возможна лишь при  $|\alpha| \leq |a|$ . Будем также считать, что вторым необходимым условием синхронизации является достаточно большая протяженность области малых значений  $\alpha$ . Ее длина должна быть не менее величины  $l$ .

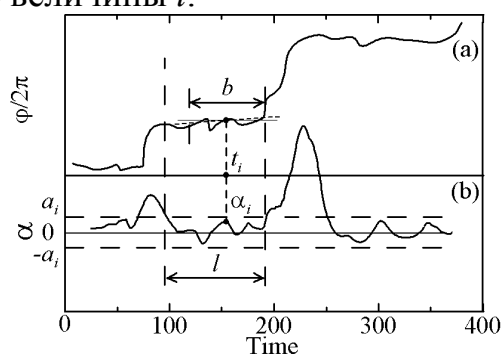


Рис. 1. Иллюстрация процедуры автоматического поиска областей синхронизации колебаний.

Обязательным этапом метода количественной оценки синхронизованности сигналов является анализ статистической значимости рассчитанных показателей синхронизации ритмов. Известно, что при анализе экспериментальных данных, для которых характерна нестационарность, присутствие шумов, малая длина временных рядов или близость основных частот колебаний, можно получить ложный вывод о наличии фазовой синхронизации даже между несвязанными автоколебательными системами [1]. Поэтому при расчете показателей синхронизации важно оценивать статистическую значимость результатов, то есть, вероятность случайного получения рассчитанного значения показателя. Статистическую значимость оценки меры синхронизации определяли с помощью суррогатных данных. В работе использовалась методика генерации суррогатных данных, основанная на рандомизации фазы Фурье-преобразования сигналов [2]. Такой способ приготовления суррогатных данных сохраняет спектральные свойства анализируемых сигналов, но разрушает связи между ними и, как следствие, синхронизацию. В результате, суммарный процент  $S$  фазовой синхронизации, рассчитанный по суррогатным данным, должен быть меньше, чем для исходных сигналов.

Для анализа статистической значимости результатов исследования синхронизации применялась следующая процедура. Сначала из каждого сигнала генерировалось по  $M=10000$  рядов суррогатных данных путем задания равномерного случайного распределения начальных фаз гармоник в разложении сигнала в ряд Фурье. Затем, с помощью описанной выше

процедуры автоматического поиска участков синхронизации для каждой  $i$ -ой пары суррогатов рассчитывалась величина суммарного процента фазовой синхронизации  $S_i$ ,  $i=1, \dots, M$ . По всему ансамблю суррогатных реализаций строилось распределение  $P$  величины  $S_i$ . На рис. 2 показано распределение  $P(S_i)$ , построенное по суррогатным данным, подготовленным из кардиоинтервалограммы и пульсограммы добровольца. В примере использовались ансамбли из 10000 рядов суррогатных данных. Пунктирной линией на рисунке показано значение  $S=77.2\%$  рассчитанное по исходным экспериментальным сигналам.

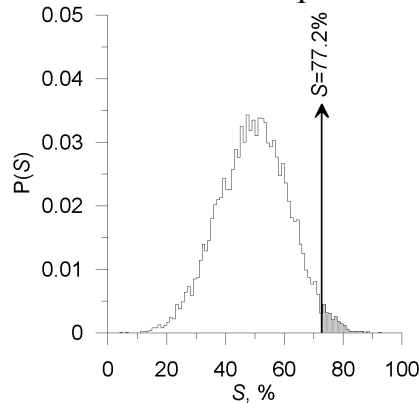


Рис. 2. Распределение суммарного процента фазовой синхронизации  $S_i$ , построенное по суррогатным данным, для одного из здоровых испытуемых. Пунктирной линией показано значение  $S$ , рассчитанное по экспериментальным данным.

Статистическая значимость  $p$  рассчитанного по экспериментальным данным суммарного процента фазовой синхронизации  $S$  оценивалась как отношение площади распределения  $P(S_i)$ , соответствующей  $S_i \geq S$ , (показана на рис. 2 штриховкой) к полной площади распределения. Для случая, изображенного на рис. 2  $p=0.03$ . Это означает, что вероятность случайного получения рассчитанного по экспериментальным рядам значения  $S=77.2\%$  составляет не более 0.03. На практике оценка какой-либо величины по наблюдаемым данным обычно считается достаточно надежной при уровне значимости  $p < 0.05$ .

Главным конкурентом предложенного метода является метод оценки индекса фазовой синхронизации:

$$\gamma_{n,m}^{12} = \left| \left\langle \exp(i\phi_{n,m}^{12}(t)) \right\rangle_t \right| = \sqrt{\left\langle \cos \phi_{n,m}^{12}(t) \right\rangle_t^2 + \left\langle \sin \phi_{n,m}^{12}(t) \right\rangle_t^2}, \quad (1)$$

где скобки означают усреднение по времени.

Метод оценки индекса фазовой синхронизации основан на вычислении распределения разности фаз:

$$\psi_{n,m} = \phi_{n,m} \bmod 2\pi. \quad (2)$$

Взаимодействие между осцилляторами проявляется возникновением максимума этого распределения. Индекс фазовой синхронизации, описывает отклонение распределения разности фаз от равномерного. Индекс хорош для определения слабой связи автоколебательных систем, но очень чувствителен к влиянию шумов. Кроме того, на практике могут возникнуть ситуации, когда в экспериментальных сигналах со статистически значимой синхронизацией распределение разности фаз экспериментальных сигналов равномерное. Решали уравнение фазового осциллятора с линейно нарастающей во время решения от 0.07 до 0.5 амплитудой внешнего воздействия, равномерно распределенным белым шумом  $\eta$  с дисперсией 0.008, расстройкой частот  $w=0.01$ :

$$\frac{dw}{dt} = w + A \sin(w) + \eta. \quad (3)$$

При таких параметрах получали решения уравнения (3), похожие на экспериментальные разности фаз сигналов кардиоритмограмм и пульсограмм. Индекс фазовой синхронизации оценивал нулевое отклонение распределения такой разности фаз от равномерного и давал ложный вывод о синхронизации. Это является подтверждением того, что метод оценки индекса фазовой синхронизации не применим для анализа нестационарных рядов. На количественную оценку  $S$  распределение мгновенной разности фаз не оказывает влияния. В случае, когда метод оценки индекса синхронизации дал ложный вывод об отсутствии синхронизации, оценка  $S$  будет свидетельствовать о наличие синхронизации. При экспериментальной проверке метода оценивалась степень фазовой синхронизованности между 0.1 Гц подсистемами нервной регуляции деятельности сердечно-сосудистой системы в ходе анализа временных реализаций электрокардиограммы и фотоплетизмограммы у 30 добровольцев без признаков сердечной патологии и 30 пациентов с ишемической болезнью сердца. Обнаружено существование синхронизации медленных колебаний кровяного давления и сердечного ритма, имеющих собственную частоту вблизи 0.1 Гц. Также установлено, что у здоровых людей длительность участков синхронизации этих низкочастотных колебаний значительно выше, чем у больных, перенесших инфаркт миокарда. В работе был разработан метод количественной оценки степени фазовой синхронизованности, основанный на расчете величины суммарного процента фазовой синхронизации, ориентированный на обработку нелинейных, нестационарных и зашумленных временных рядов. Показано преимущество предложенного метода перед методом оценки индекса фазовой синхронизации. Проведена проверка работоспособности метода на сигналах биологической природы.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths "Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Science" Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
2. T. Schreiber, A. Schmitz // *Physica D*. 2000. V. 142. P. 346.

О ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ  
ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ С СИЛЬНО РАЗЛИЧАЮЩИМИСЯ  
ХАРАКТЕРНЫМИ РАЗМЕРАМИ

Т.И. Гаряева, Д.В. Георгиевский

МГУ им. Ломоносова, механико-математический факультет

[gti222@mail.ru](mailto:gti222@mail.ru)

Проведен анализ главных членов общих асимптотических разложений решений первой краевой задачи трехмерной теории упругости в перемещениях (квазистатика, сжимаемость) для цилиндрического слоя. Естественным малым асимптотическим параметром является отношение толщины слоя к длине образующей. При этом радиус основания может иметь любой «промежуточный», включая концы, порядок. Такой геометрией обладает, например, цилиндрическое тело, имеющее характерные макро-, микро- и наноразмеры по различным направлениям.

В пространстве  $R^3$  с цилиндрической системой координат  $(r, \theta, z)$  рассматривается трехмерное упругое тело  $V$ , имеющее форму цилиндрического слоя с осью  $z$ . Характерные толщина слоя  $h$ , радиус внутренней границы  $R$  и длина образующей  $2l$  связаны следующим образом:

$$h/l = \alpha \ll 1, \quad R/l = \alpha^c, \quad c \geq 0, \quad (1)$$

где  $\alpha$  – малый параметр.

Для этого тела выписывается система уравнений Ламе квазистатической теории упругости

$$\begin{aligned} 2(1-\nu) \left( u_{r,rr} + \frac{u_{r,r}}{r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + (1-2\nu) \left( \frac{u_{r,\theta\theta}}{r^2} + u_{r,zz} \right) + \frac{u_{\theta,r\theta}}{r} + u_{z,rz} - (3-4\nu) \frac{u_{\theta,\theta}}{r^2} &= 0 \\ 2(1-\nu) \frac{u_{\theta,\theta\theta}}{r^2} + (1-2\nu) \left( u_{\theta,rr} + \frac{u_{\theta,r}}{r} - \frac{u_\theta}{r^2} + u_{\theta,zz} \right) + \frac{u_{r,r\theta}}{r} + \frac{u_{z,z\theta}}{r} - (3-4\nu) \frac{u_{r,\theta}}{r^2} &= 0 \\ 2(1-\nu) u_{z,zz} + (1-2\nu) \left( u_{z,rr} + \frac{u_{z,r}}{r} + \frac{u_{z,\theta\theta}}{r^2} \right) + u_{r,rz} + \frac{u_{\theta,\theta z}}{r} + \frac{u_{r,z}}{r} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $u_r, u_\theta$  и  $u_z$  – физические компоненты вектора перемещений.

Решения уравнений (2) представляются в виде асимптотических рядов по  $\alpha$ :

$$u_{\beta}(r, \theta, z) = l \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{a_{\beta,n}} \bar{u}_{\beta}^{\{n\}}(\rho, \theta, \zeta), \quad \beta = \{r, \theta, z\}, \quad (3)$$

где  $\bar{u}_r^{\{n\}}, \bar{u}_{\theta}^{\{n\}}, \bar{u}_z^{\{n\}}, n=1, 2, \dots$  – неизвестные безразмерные перемещения, зависящие от безразмерных координат  $\rho, \theta, \zeta$ :

$$\zeta = \frac{z}{l} = \frac{\alpha z}{h}, \quad \rho = \frac{r-R}{h}, \quad -1 < \zeta < 1, \quad 0 < \rho < 1 \quad (4)$$

Разложения (3) включают три строго возрастающие последовательности показателей  $\{a_{r,n}\}, \{a_{\theta,n}\}, \{a_{z,n}\}$  степеней асимптотического параметра  $\alpha$ . Выбор этих показателей определяется граничными условиями в перемещениях

$$x \in \partial V: \quad u = U(x) \quad (5)$$

$$U_{\beta}(r, \theta, z) = l \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{a_{\beta,n}} \bar{U}_{\beta}^{\{n\}}(\rho, \theta, \zeta), \quad \beta = \{r, \theta, z\}, \quad (6)$$

которые вместе с системой (2) составляют краевую задачу теории упругости.

В уравнениях (2) переходят к безразмерным параметрам и подставляют в полученные уравнения разложения (3).

Минимальные степени  $\alpha$  в этих уравнениях следующие:

$$\begin{aligned} d_1 &= \min \{a_{r,1} - 2; a_{\theta,1} - 1 - c; -1\}, \\ d_2 &= \min \{a_{r,1} - 1 - c; a_{\theta,1} - 2; -c\}, \\ d_3 &= \min \{a_{r,1} - 1; a_{\theta,1} - c; -2\} \end{aligned} \quad (7)$$

Решается задача о нахождении всех возможных пар показателей  $(a_{\theta,1}, a_{r,1})$ , при которых система главного приближения дает общее решение с произвольными функциями, единственным образом определяющимися при любых граничных условиях

$$\bar{u}_{\beta}^{\{1\}} \Big|_{\rho=0} = \bar{U}_{\beta}^{\{1\}}(0, \theta, \zeta) \equiv \bar{U}_{\beta}^{-}(\theta, \zeta) \quad (8)$$

$$\bar{u}_{\beta}^{\{1\}} \Big|_{\rho=1} = \bar{U}_{\beta}^{\{1\}}(1, \theta, \zeta) \equiv \bar{U}_{\beta}^{+}(\theta, \zeta) \quad (9)$$



ЛИТЕРАТУРА

1. Б.Е. Победря “Численные методы в теории упругости и пластичности” М.: Изд-в 1995.
2. С.А. Назаров “Введение в асимптотические методы теории упругости” Л.: Изд-во ЛГУ, 1993.
3. М.У. Никабадзе // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 3. С. 73.
4. И.И. Аргатов // Журн. выч. математ. и мат. физики. 2000. Т. 40. №4. С. 623.

## АВТОГЕНЕРАТОР С ИНЕРЦИОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ

В.В. Зайцев, А.В. Карлов (мл)

Самарский государственный университет

[zaitsev@ssu.samara.ru](mailto:zaitsev@ssu.samara.ru)

Эффект инерционной нелинейности (ИН) на одном из этапов развития радиотехники широко использовался простых схемах автогенераторов для генерации колебаний с пониженным уровнем гармоник. В настоящее время автоколебания в системах с ИН часто рассматриваются как приближенные модели более сложных физических процессов. Известен, например, модифицированный генератор с ИН Анищенко–Астахова [1], который является примером системы, генерирующей в режиме динамического хаоса.

В сообщении описана автоколебательная система с дискретным временем, синтезированная по инерционно-нелинейному аналоговому прототипу. Продемонстрирована ее способность генерировать хаотические автоколебания.

За основу синтеза принята классическая схема генератора с ИН, предложенная К.Ф. Теодорчиком. При определенных допущениях схема может быть описана системой дифференциальных уравнений относительно нормированного тока  $y(t)$  в индуктивности контура и температуры  $z(t)$  термистора:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = \omega_0 (g - z) \frac{dy}{dt}, \quad (1)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\omega_c (z - y^2). \quad (2)$$

Здесь  $\omega_0$  и  $Q$  – собственная частота и добротность контура,  $\omega_c$  – граничная частота тепловой цепи,  $g$  – параметр глубины обратной связи. Следуя методу [2], аналоговой системе с уравнением движения в непрерывном времени (1) можно поставить в соответствие систему, функционирующую в дискретном времени по рекурсивному алгоритму

$$Y[n] = a_1 Y[n-1] + a_2 Y[n-2] + (\gamma - Z[n-1])(Y[n-1] - Y[n-2]), \quad (3)$$

$$Z[n] = \sigma Z[n-1] + Y^2[n]. \quad (4)$$

Коэффициенты системы (3)–(4) связаны с параметрами аналогового прототипа соотношениями

$$a_1 = 2 \exp(-\pi\Omega_0 / Q) \cos(2\pi\Omega_0), \quad a_2 = -\exp(-2\pi\Omega_0 / Q), \quad \sigma = \exp(-2\pi\Omega_c), \quad (5)$$

где  $\Omega_0$  и  $\Omega_c$  – характерные частоты аналоговой системы, измеряемые в единицах частоты дискретизации ( $\Omega_0, \Omega_c < 0.5$ );  $\gamma > 0$  – независимый параметр, характеризующий глубину положительной обратной связи. Выражения (5) позволяют целенаправленно выбирать параметры дискретного осциллятора, исходя из представлений и динамике аналоговой системы (1)–(2).

Дискретный во времени инерционно-нелинейный осциллятор (ДВИН-осциллятор) (3)–(4) в широкой области значений параметров генерирует регулярные автоколебания. В этом режиме ДВИН-осциллятор предлагается использовать для нелинейной обработки дискретных сигналов [3].

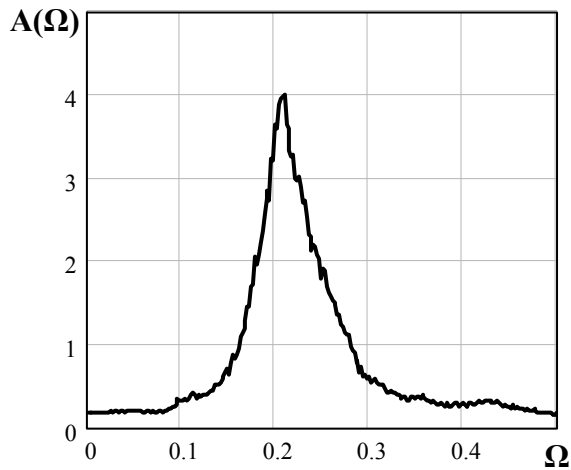


Рис. 1. Амплитудный спектр

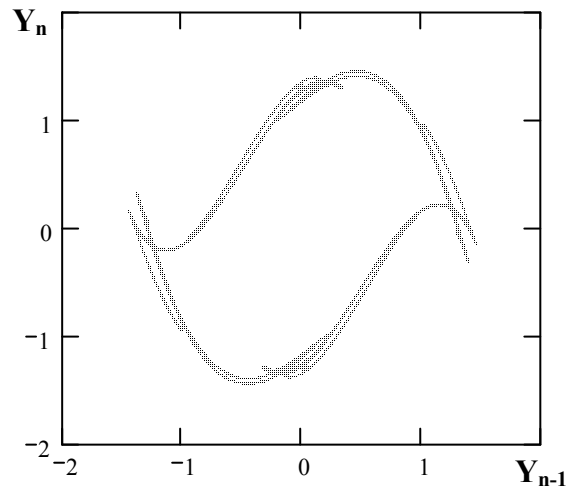


Рис. 2. Фазовый портрет

ДВИН-осциллятор (3)–(4) имеет также режимы генерации динамического хаоса. Примером может служить режим, реализуемый при значениях  $\Omega_0 = 0.156$ ,  $Q = 20$ ,  $\gamma = 1.3$  и  $\Omega_c = 0.1$ . Усредненный амплитудный спектр хаотических автоколебаний показан на рис. 1. Соответствующий ему фазовый портрет на рис. 2 имеет ярко выраженную фрактальную структуру.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В.С. Анищенко “Сложные колебания в простых системах” М.: Наука, 1990.
2. В.В. Зайцев, О.В. Зайцев, А.В. Карлов (мл) // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2008. Т. 11. N 4. С. 98.
3. В.В. Зайцев, О.В.Зайцев // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2005. Т. 8. N 1. С. 82.

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКОВ ДЛЯ ГЕНЕРАЦИИ ШИРОКОПОЛОСНЫХ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Ю.А. Калинин, А.В. Стародубов

*Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского»*

Одним из инновационных направлений развития информационно-телекоммуникационных систем является использование хаотических сигналов в качестве новых носителей информации [1] в системах связи, радиолокации, а также при решении задач радиопротиводействия. Целый ряд технологических процессов [2] (например, промышленная сушка веществ, очистка и повышение качества нефти и нефтепродуктов, медицинские задачи и т.п.) так же может быть заинтересован в использовании подобных сигналов. Для генерации таких сигналов необходима разработка и создание широкополосных микроволновых источников хаотических колебаний разного уровня мощности.

Настоящая работа посвящена исследованию генераторов широкополосных хаотических колебаний, работа которых основана на новых физических принципах, а именно на использовании интенсивных турбулентных электронных пучков. При турбулентном движении [3] электроны совершают неустановившиеся беспорядочные движения по сложным траекториям, при этом скорость и плотность в каждой точке интенсивного пучка хаотически изменяются. В отличие от ламинарного при турбулентном движении происходит интенсивное перемешивание слоев электронного пучка, образуются многочисленные вихри различных размеров, вследствие чего характеристики (плотность и скорость) испытывают хаотические флуктуации, изменяющиеся во времени и в пространстве. В пучках заряженных частиц турбулентность осложняется специфическим характером взаимодействия частиц, связанного с дальнедействующими кулоновскими связями. Турбулентность в этом случае представляет сложное движение заряженных частиц и электромагнитного поля и, таким образом, служит проявлением коллективной природы взаимодействия заряженных частиц между собой. Электронный пучок, состоящий по длине из отдельных сгустков (групп электронов) можно рассматривать как ток, содержащий высшие гармонические составляющие. Такой пучок называется сгруппированным или промодулированным. Сгруппированный электронный пучок при определенных условиях может излучать электромагнитные колебания с частотами, равными частотам гармоник тока. Другими словами, в процессе торможения мощность таких интенсивных неламинарных электронных пучков может быть превращена в радиоизлучение.

В настоящей работе показано, что формирование неламинарных электронных пучков может быть проведено с использованием электростатических полей и полей пространственного заряда, магнитных полей и полей пространственного заряда, а также комбинацией электростатических, магнитных полей и полей пространственного заряда (см. Рисунок 1). Заметим, что в турбулентном электронном пучке возникает внутренняя электронная обратная связь, которая осуществляется путем выхода электронов из сгустков пространственного заряда, что приводит к пространственно-временным колебаниям сгустков.

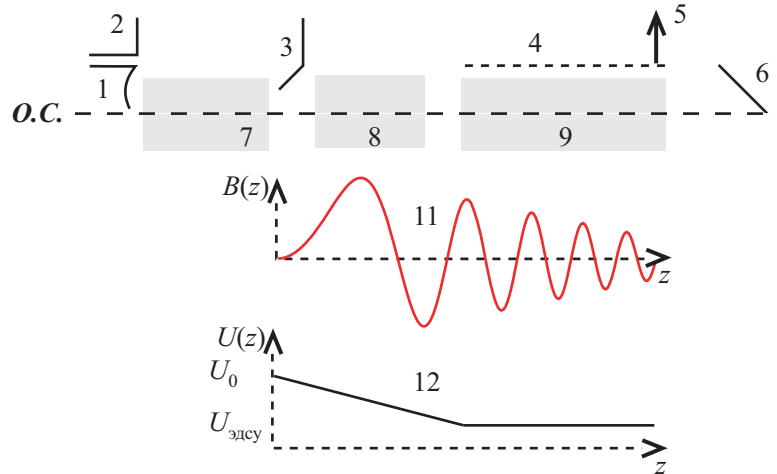


Рис. 1. Принципиальная схема сверхширокополосного генератора хаоса с формированием турбулентных электронных потоков за счет комбинации магнитных полей, тормозящих электростатических полей и полей пространственного заряда. На рисунке обозначено: О.С. – ось симметрии; 1 – катод; 2 – фокусирующий электрод; 3 – анод ( $U=U_0$ ); 4 – электродинамическая система усиления (ЭДСУ); 5 – вывод ВЧ и СВЧ энергии; 6 – коллектор-отражатель; 7 – область формирования ламинарного электронного потока; 8 – область модуляции электронного потока (формирование сгустков пространственного заряда); 9 – область усиления хаотических ВЧ и СВЧ колебаний; 10 – электроды электростатической фокусировки; 11 – возможные типы переменного магнитного поля; 12 – вид распределения неоднородного электрического поля между анодом и электродинамической системой усиления  $U_{\text{ЭДСУ}} < U_0$ .

Проведенные предварительные численные расчеты и детальные экспериментальные исследования подтверждают наличие сгустков пространственного заряда в электронном пучке, фокусируемом периодическим магнитным полем. Поскольку области уплотнения пространственного заряда непостоянны как в пространстве, так и во времени, то в данной системе возникают СВЧ колебания шумоподобного характера. Для эффективного управления поведением электронного пучка необходимо подбирать наиболее оптимальную конфигурацию амплитуды и периода магнитного поля.

Устойчивость электронных пучков в магнитном поле удобно характеризовать параметром магнитной фокусировки  $\alpha$  [см. Алямовский И.В.// Интенсивные электронные потоки. Уч-изд. М. 1991]:

$$\alpha = 2 \cdot 10^8 \frac{B_0^2 \cdot L^2}{U},$$

где  $B_0$ -амплитуда магнитного поля,  $L$ -период магнитного поля,  $U$ -ускоряющее напряжение. Таким образом, если зафиксировать амплитуду и период магнитного поля, но менять потенциал, стоящий в знаменателе, возможна потеря устойчивости электронного пучка. При  $\alpha \gg 1$  пучок становится существенно неламинарным (турбулентным). Изменение напряжения является эффективным способом получения турбулентного пучка с точки зрения конструктивной реализации, поскольку менять амплитуду и период магнитного поля в случае имеющийся готовой промышленной конструкции прибора очень сложно и это требует зачастую изменения конструкции самого прибора. Изменяя напряжение, подаваемое на ЭДСУ, возможно, тем самым, перестраивать генератор на различные режимы генерации. Экспериментальное исследование данной схемы показало, что, изменяя величину  $K=1-U_{\text{дс}}/U_0$  в области модуляции электронного пучка, существует возможность управлять шириной полосы генерируемых частот СВЧ колебаний: при малом  $K$  (рисунок 2,а) генерируются колебания близкие к периодическим, а при  $K=0.6$  (рисунок 2,б) колебания носят хаотический широкополосный характер.

Проведенные исследования позволили разработать методику создания генераторов шумоподобных СВЧ колебаний на базе промышленных ЛБВ.

С этой целью производится трансформация начала МПФС (магнитной периодической фокусирующей системы) в плане увеличения амплитуды и периода магнитного поля. Отметим, что практически такой генератор реализуется на обычных промышленных ЛБВ за счет изменения МПФС системы. Этот факт является существенным преимуществом данной конструкции. Однако такая конструкция имеет и недостаток, связанный с тем, что увеличивать амплитуду и период магнитного поля можно лишь до определенных значений.

В качестве областей применения вышеописанного генератора сверхширокополосных хаотических сигналов на основе промышленной ЛБВ могут быть информационно-телекоммуникационные системы (методы передачи информации, основанные на использовании свойств динамического хаоса [1]), системы радиопротиводействия и радиоподавления, системы шумовой радиолокации [3]. Также, подобные сигналы могут быть использованы в промышленности, в различных технологических процессах [2,5].

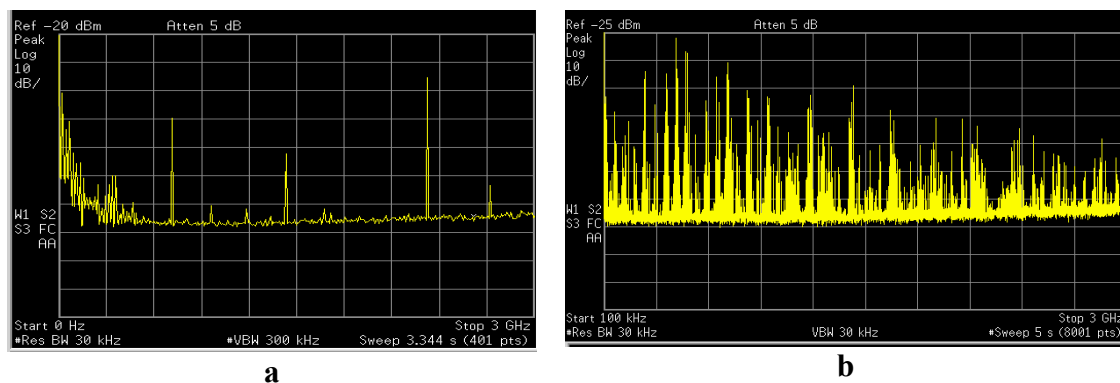


Рисунок 2. Спектры выходного сигнала генератора на турбулентных электронных пучках, полученные при различных коэффициентах торможения электронного пучка  $K$

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 08-02-00102-а, № 10-02-00256-а, Президентской программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-3407.2010.2) и аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009 - 2010 годы)» (РНП 2.1.1./235).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А.С. Дмитриев, А.И. Панас «Динамический хаос: новые носители информации для систем связи» М.: Физматлит, 2002.
2. Д.И. Трубецков, А.Е. Храмов «Лекции по сверхвысокочастотной электроники для физиков» Т. 1,2. М.: Физматлит, 2003, 2004.
3. Н.Н. Залогин., В.В. Кислов «Широкополосные хаотические сигналы в радиотехнических и информационных системах» М.: Радиотехника, 2006.
4. И.В. Алямовский «Интенсивные электронные потоки» Уч-изд. М. 1991.
5. Ю.А. Калинин, А.В. Стародубов, С.В. Березин «О взаимодействии микроволнового излучения с микро- и наноструктурами водонефтяных эмульсий» Наука и технологии в промышленности. 2009. № 3. С. 45.

## ТЕЧЕНИЕ БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКОГО КОНДЕНСАТА В КВАЗИОДНОМЕРНОМ КАНАЛЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОРШНЯ

А.М. Камчатнов, С.В. Корнеев  
*Институт спектроскопии РАН*

После экспериментального получения конденсата Бозе-Эйнштейна (БЭК) из атомов щелочных металлов, внимание многих исследователей стало привлекать изучение его особых свойств. Экспериментальные методы изучения свойств конденсата оказались близки к экспериментальным методам классической газодинамики. Отличие заключается в использовании очень сложного оборудования, например, при исследовании бозе-конденсата приходится работать с магнитными ловушками в качестве емкости и лазерами в качестве источника возмущений. Но основные идеи классической гидродинамики, состоящие в генерации различных волн, и изучение законов их распространения остаются те же. Что касается теоретических исследований, то многие аспекты динамики БЭК можно понять уже из анализа решений уравнений гидродинамики классического газа. Основное отличие динамики конденсата, в отличие от воздуха, например, заключается в отсутствии вязкости и наличии дисперсии, которая оказывает существенное влияние на распространение как линейных волн, так и нелинейных импульсов.

В период активного развития гидродинамики были решены следующие задачи, имеющие большое практическое значение: распад сильного возмущения (задача о плотине), задача о распространении звука и ударных волн, задача о течении по трубе, задача о поршне и сильном взрыве, задача о вязком обтекании шарика (задача Стокса) и другие. Многие из этих задач были экспериментально реализованы в БЭК. Например, сразу после получения конденсата экспериментаторы активно изучали течение конденсата из выключенной ловушки, что соответствует задаче о плотине; далее, много усилий было потрачено на генерацию звуковых волн. В настоящее время одним из основных направлений изучения БЭК является проблема генерации ударных волн. Как и в классической гидродинамике, основным источником ударных волн в конденсате является эволюция больших возмущений и сверхзвуковое обтекание. Задача о сверхзвуковом обтекании конденсатом препятствия была решена А. М. Камчатновым и др. (см., например, [1, 2]).

Ударные волны в классической гидродинамике могут возникать также в случае, когда поршень вдвигается в трубку с постоянной скоростью или с ускорением. Класс этих задач получил название задач о поршне. Если газ в трубке изначально имел равномерное распределение величин, то задача о поршне до момента образования ударной волны сводится к решению одномерной системы Эйлера без учета вязкости, которая легко



интегрируется. После образования ударной волны уже необходимо учитывать вязкость и использовать условия Гюгонио.

В связи с тем что количество экспериментов с БЭК увеличивается и уже идут разговоры о создании атомных чипов, содержащих конденсат, нами было решено рассмотреть задачу о поршне в квазиодномерном бозе-конденсате. Квазиодномерный конденсат получается в случае сильно вытянутой параболической ловушки при небольшой плотности конденсата. Тогда волновая функция факторизуется и движение поперек ловушки описывается волновой функцией осциллятора в основном состоянии, а движение вдоль ловушки описывается одномерным уравнением Гросса-Питаевского (ГП), которое и необходимо решить. Как и в классическом случае, задача является одномерной. Роль поршня в данной задаче играет широко апертурный лазерный луч с отталкивающим потенциалом. Так как уравнение ГП соответствует гидродинамической системе для мелкой воды с показателем адиабаты равным двойке и дисперсионным членом, решение задачи о поршне в БЭК похоже на классическое до момента образования ударной волны. В момент образования ударной волны необходимо вместо условий Гюгонио учитывать дисперсию. Из-за отсутствия вязкости и наличия дисперсии вместо вязкой ударной волны классического газа образуется дисперсионная ударная волна (ДУВ), которая представляет собой конечную, но расширяющуюся область нелинейных осцилляций. Чтобы учесть дисперсию, необходимо использовать метод усреднения Уизема. Решая систему нелинейных уравнений Уизема, можно рассчитать все параметры дисперсионной волны.

В нашей работе [3] была рассчитана дисперсионная ударная волна, образующаяся при произвольном степенном законе движения поршня. Были получены аналитические выражения для закона движения концевых точек ДУВ в случае равномерного ускорения. Также был реализован численный алгоритм решения задачи о поршне в БЭК. На рисунке 1 показана огибающая ДУВ, вычисленная аналитически для равномерного ускорения поршня и результат численных расчетов. Как видно, аналитическое решение хорошо согласуется с численным расчетом.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Yu. G. Gladush, G. A. El, A. Gammal, A. M. Kamchatnov // Phys. Rev. A 75. 2007. 033619.
2. G. A. El, A. Gammal, and A. M. Kamchatnov // Phys. Rev. Lett. 2006. 97, 180405.
3. А.М. Камчатнов, С.В. Корнеев // ЖЭТФ. 2010. Том 137. Вып. 1. С.191.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕКОНСЕРВАТИВНОЙ НАГРУЗКИ

К.В. Квачев, Д.В. Георгиевский

*МГУ им. Ломоносова механико-математический факультет*

[Kvachev1986@yandex.ru](mailto:Kvachev1986@yandex.ru)

В работе представлены основные понятия для систем с распределенными параметрами. Вводится понятие устойчивости подобных систем. Рассматривается цилиндрическая оболочка постоянной толщины из однородного, упругого, изотропного материала, подчиняющегося закону Гука. Используя гипотезы Кирхгофа-Лява, выводятся уравнения движения оболочки.

В работе исследуется устойчивость осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки при обтекании сверхзвуковым потоком газа. Оболочка жестко закреплена с одного края и свободна с другого. Для определения нагрузки, действующей на оболочку со стороны набегающего потока газа, применяется поршневая теория.

Исследование устойчивости проводится на основе теоремы Ляпунова об устойчивости. Для этого строится функционал:

$$\begin{aligned}
 V = & \int_0^1 \left( \rho' \alpha \beta \left( \frac{\partial w_0}{\partial t_0} \right)^2 + \frac{E_0}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2} \right)^2 \right) \alpha^3 \beta + \rho' \alpha \beta \left( \frac{\partial u_0}{\partial t_0} \right)^2 + \frac{E_0}{1-\nu^2} \alpha w_0^2 \\
 & + \frac{E_0}{1-\nu^2} \alpha \beta \left( \frac{\partial u_0}{\partial x_0} \right)^2 - 2\nu \frac{E_0}{1-\nu^2} \alpha w_0 \frac{\partial u_0}{\partial x_0} \Big) dx_0 + \lambda \int_0^1 \left( \rho' \alpha \beta w_0 \frac{\partial w_0}{\partial t_0} - \rho' \alpha \beta u_0 \frac{\partial u_0}{\partial t_0} + \right. \\
 & \left. \frac{R}{2L} w_0^2 + f(x_0) \frac{\partial u_0}{\partial t_0} \frac{\partial u_0}{\partial x_0} \right) dx_0 + \int_0^1 \left( \left( \frac{\partial v_0}{\partial t_0} \right)^2 + \frac{E_0}{2(1+\nu)\rho'} \left( \frac{\partial v_0}{\partial x_0} \right)^2 \right) dx_0
 \end{aligned}$$

$$\rho' = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \alpha = \frac{h}{L}, \quad \beta = \frac{R}{L}, \quad w_0 = \frac{w}{h}, \quad u_0 = \frac{u}{h}, \quad v_0 = \frac{v}{h}, \quad E_0 = \frac{E}{\rho' c_0^2}, \quad x_0 = \frac{x}{L}, \quad t_0 = \frac{c_0 t}{L},$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\lambda$  – некоторая константа, подлежащая дальнейшему определению,  $f(x_0)$  – функция, подлежащая дальнейшему определению.

Введем определение величин, входящих в обезразмеривание:

$u, v, w$  – перемещения точек срединной плоскости в кольцевом, вдоль образующей и в радиальном направлениях соответственно,  $h$  – толщина оболочки,  $L$  – ее длина, а  $R$  – радиус,  $\rho$  – плотность материала оболочки,

$\rho_0$  – плотность газа на бесконечности,  $c_0$  – скорость звука,  $E$  – модуль Юнга.

В силу уравнений движения и граничных условий производная функционала по времени имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt_0} = & \int_0^1 -2\beta \frac{\partial w_0}{\partial t_0} \left( a_0 \frac{\partial w_0}{\partial x_0} + \frac{\partial w_0}{\partial t_0} \right) dx_0 + \lambda \left( \int_0^1 \left( -\frac{E_0}{12(1-\nu^2)} \alpha^3 \beta \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2} \right)^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{E_0}{1-\nu^2} \frac{\alpha}{\beta} w_0^2 \right) dx_0 - \frac{\beta a_0}{2} w_0^2(1) + \int_0^1 \left( \rho' \alpha \beta \left( \frac{\partial w_0}{\partial t_0} \right)^2 - \rho' \alpha \beta \left( \frac{\partial u_0}{\partial t_0} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{E_0}{1-\nu^2} \alpha \beta \left( \frac{\partial u_0}{\partial x_0} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial t_0} \right)^2 \frac{df}{dx_0} - \frac{E_0 \nu}{\rho' \beta (1-\nu^2)} f(x_0) \frac{\partial w_0}{\partial x_0} \frac{\partial u_0}{\partial x_0} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{E_0}{2\rho'(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x_0} \right)^2 \frac{df}{dx_0} \right) dx_0 + \lambda \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial t_0} \right)^2 f(x_0) \Big|_{x_0=1} + \right. \\ & \left. \left. \frac{E_0}{2\rho'(1-\nu^2)} f(x_0) \Big|_{x_0=1} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x_0} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

После применения теоремы Ляпунова об устойчивости получаем систему неравенств для определения критической скорости:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{E_0 \alpha \beta}{1-\nu^2} - \lambda^2 \rho' \alpha \beta \left( \frac{1}{\pi} + \frac{tgc}{c} \right)^2 \right) \left( \frac{E_0 \alpha}{(1-\nu^2) \beta} + \frac{\lambda \beta}{2} - \frac{\lambda^2 \rho' \alpha \beta}{4} \right) > \left( \frac{\nu E_0 \alpha}{1-\nu^2} \right)^2 \\ & \frac{E_0}{1-\nu^2} (2\lambda \beta - \lambda^2 \rho' \alpha \beta) \left( \frac{d}{12} \alpha^3 \beta - \frac{\nu^2 \alpha}{c^2 \beta} \right) \geq (\beta a_0)^2 \\ & 0 < c < \frac{\pi}{2} \\ & 0 < \lambda < \frac{2}{\alpha \rho'} \end{aligned} \right. ,$$

где  $d$  – решение следующей задачи:

$$\int_0^1 \left( f'^2 + \frac{12}{\alpha^2 \beta^2} f^2 \right) dx_0 + \frac{6(1-\nu^2) a_0}{E_0 \alpha^3} f^2 \Big|_{x_0=1} \rightarrow \inf \int_0^1 f'^2 dx_0 = 1$$

Построен алгоритм для нахождения критической скорости обтекания оболочки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А.А. Мовчан “О колебаниях пластинки, движущейся в газе” ПММ. Т 20. В.2 1956 С 211-222.
2. А.А. Мовчан “О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систем” ПММ. Т 23. В. 3 1959 С 483-493.
3. А.М. Слободкин “Об особенностях понятия устойчивости равновесия в смысле Ляпунова для систем с бесконечным числом степеней свободы” Изв. АН СССР. Механика. 1965. Т 5. С 38-46.
4. Т.К. Сиразетдинов “Устойчивость систем с распределенными параметрами” Изд-во Наука, 1987.

## ФОРМИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ СТРУКТУР В СИСТЕМЕ АКТИВНАЯ СРЕДА – ВОЛНОВОЕ ПОЛЕ С ПОЛУПРОЗРАЧНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В.Н. Корниенко<sup>1</sup>, А.П. Привезенцев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ИРЭ РАН, г. Москва,

<sup>2</sup>ЧелГУ, г. Челябинск

[korn@cplire.ru](mailto:korn@cplire.ru), [pap@csu.ru](mailto:pap@csu.ru)

Исследование процессов формирования пространственно-временных структур в нелинейных распределенных системах представляют интерес в различных областях естествознания. Одним из эффективных методов решения таких задач, позволяющих рассмотреть общие закономерности динамики нелинейных волн различной физической природы, являются исследования, проводимые при помощи простых компьютерных моделей.

В представленной работе рассмотрена дискретная по времени и пространственным координатам модель взаимодействия ансамбля активных осцилляторов (автогенераторов) в двумерном волновом поле с выводом энергии волн за пределы области взаимодействия через полупрозрачную для волн границу. С увеличением уровня связи и числа осцилляторов рассматриваемая система формирует своеобразную нелинейную волновую среду, свойства которой определяют самосогласованное взаимодействие парциальных подсистем.

Целью работы является исследование многоволнового механизма взаимодействия активной среды и волнового поля, для случая, когда ансамбль активных осцилляторов эффективно возбуждает многие моды волновой подсистемы. Подобная форма взаимодействия активной среды и поля имеет место в приборах сильноточной электроники со сверхразмерными электродинамическими структурами [1].

Динамику волнового поля, возбуждаемого ансамблем осцилляторов, описывает система уравнений в конечных разностях [2]

$$u(x, y, t + 1) - a_1 u(x, y, t) + a_2 u(x, y, t - 1) - bW(t, x \pm 1, y \pm 1) = gF(x, y, t), \quad (1)$$

где  $W(x \pm 1, y \pm 1, t) = u(x - 1, y, t) + u(x + 1, y, t) + u(x, y - 1, t) + u(x, y + 1, t)$ ,  $u(x, y, t)$  - функция дискретных аргументов, изменяющихся с единичным шагом, которая определяет состояние волнового поля в точке с координатами  $x, y$  в момент времени  $t$ ,  $g$  - коэффициент связи волнового поля с автогенераторами (осцилляторами),  $F(x, y, t)$  - функция, описывающая действие осцилляторов на поле. В точках, где расположены осцилляторы  $F(x, y, t) = 1$ , в других точках  $F(x, y, t) = 0$ . Коэффициенты системы (1) связаны с фазовой скоростью волны  $v$  и декрементом затухания  $\gamma$  равенствами

$$a_1 = 2(1 - 2v^2) \exp(-\gamma), a_2 = \exp(-2\gamma), b = v^2 \exp(-\gamma) \quad (2)$$

Область изменения координат  $x, y$  представляет аппроксимацию на прямоугольной сетке круга радиуса  $r_0$  (мембрану). Для декремента затухания принято нулевое значение. Вывод энергии из системы определяли граничные условия частичного прохождения волн на окружности, ограничивающей мембрану. Граничные условия представляли обобщение на двумерный вариант граничные условия для ограниченной одномерной цепочки, нагруженной некоторым сопротивлением. Запишем для простоты граничное условие для цепочки осцилляторов расположенных на диаметре мембраны, параллельном оси  $x$

$$u(2r_0, r_0, t) = (1 - \xi / v)u(2r_0, r_0, t) + (\xi / v)u(2r_0, r_0, t). \quad (3)$$

Центр окружности, представляющий границу мембраны, в используемой системе координат расположен в точке  $x = r_0, y = r_0$ . Параметр  $\xi$  регулирует степень прозрачности границы для волн. Значение  $\xi = 0$  соответствует условию «свободного конца»  $u(r_0, r_0, t) = u(r_0 - 1, r_0, t)$ . В этом случае имеет место полное отражение волн без изменения фазы. При нулевом граничном условии отражение волны происходит со сдвигом фазы на  $\pi$ . Отметим, что условие (3) было получено для одномерной цепочки в приближении длинных волн синусоидально зависящих от времени и координаты. В этом приближении параметр  $\xi$  равен отношению волнового импеданса цепочки к импедансу нагрузки на ее конце. Тестовые расчеты показали, что для значения  $\xi = 1$  в одномерной цепочке в области умеренных частот и пологих волновых фронтов отражения на конце практически не наблюдается. В двумерной области при приближении значения  $\xi$  к единице система (1) с граничным условием (3) становится неустойчивой. Это обстоятельство накладывает ограничение на возможность исследование случая высокой прозрачности границы в рамках принятой модели.

Динамку осциллятора, взаимодействующего с полем в точке с координатами  $x(n), y(n)$ , описывает уравнение нелинейного фильтра второго порядка

$$z(n, t + 1) - d_1(z)z(n, t) + d_2(z)z(n, t - 1) = g \Delta u(x(n), y(n), t), \quad (4)$$

где функция  $z(n, t)$  ( $1 \leq n \leq N$ ) определяет состояние  $n$ -го осциллятора,  $\Delta u(x(n), y(n), t) = u(x(n), y(n), t) - u(x(n), y(n), t - 1)$ . Коэффициенты этого уравнения нелинейно зависят от состояния осциллятора

$$d_1 = 2 \exp(\varepsilon(1 - \alpha z^2(n, t))) \cos(\beta), d_2 = \exp(2\varepsilon(1 - \alpha z^2(n, t))).$$

При малой нелинейности  $\varepsilon \ll 1, \varepsilon\alpha \ll 1$  уравнение (4) переходит в дискретную модификацию уравнения Ван-дер-Поля, при этом параметр  $\beta$  определяет собственную частоту колебаний осциллятора. В расчетах значения  $\beta$  для осцилляторов ансамбля задавали с разбросом в 1% от среднего значения. Осцилляторы, возбуждающие поле, были расположены на нескольких (от 1 до 4) концентрических окружностях. Радиус максимальной окружности  $r_s$  следующие окружности имели радиусы  $r_s - 2, r_s - 4, \dots$ . Осцилляторы могли полностью занимать окружность или располагаться на ней в виде системы ступок заданной длины.

Идентификацию колебаний системы проводили по временным реализациям поля  $u(x_i, y_i, t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$  записанных в  $M = 21$  точках поля равномерно распределенных на окружности с радиусом  $r_w$  ( $r_s < r_w < r_0$ ), и пространственному распределению поля на окружности с радиусом  $r_s$ .

Количественной мерой когерентности колебаний поля по времени и мерой упорядоченности его пространственного распределения на окружности вдоль которой расположены осцилляторы служил параметр упорядоченности

$$H(t) = \sum_{k=1}^{N-1} S_k(t) \ln(S_k(t)) / (N-1),$$

где спектральные плотности  $S_k(t)$  дискретного преобразования Фурье для временной реализации или пространственного распределения поля нормированы условием

$$\sum_{k=1}^{N-1} S_k(t) = (N-1).$$

Для белого шума с равномерным спектром  $S_k(t) = 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, (N-1)$ , параметр упорядоченности имеет минимальное значение  $H = 0$ , для синусоидальной волны  $S_k(t) = \delta_{k,n}$ , он максимален  $H = 1$ .

Интенсивность колебаний поля определяли по усредненной энергии

$$W(t) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M u^2(x_i, y_i, t).$$

Проведенные численные эксперименты показали, что для различных видов группировки ансамбля активных осцилляторов и для равномерного распределения осцилляторов по окружности близкой к границе мембраны существуют области параметров, для которых наблюдается эффективная синхронизация системы, и возбуждение колебаний поля с близких к монохроматическим с различной формой пространственного распределения. Спектральные характеристики временных реализаций колебаний представлены на рис. 1. Спектры пространственного

распределения поля даны на рис. 2. Конкуренция пространственных гармоник для колебаний со спектрами рис. 1(а), рис. 2(а) приводит к формированию режима, в котором группа гармоник с азимутальными числами  $17 \leq n \leq 29$  формирует поле с заметной периодичностью по азимуту в кольцевой области, содержащей ансамбль осцилляторов. Флуктуационная составляющая спектра пространственного распределения поля на рис. 2(а) соответствующего этим колебаниям имеет форму характерную для белого шума.

На рис. 1(б) и 2(б) представлен колебательный режим, спектр пространственного распределения поля для которого имеет характерную для фрактала степенную зависимость  $S(n) \approx n^{-\alpha}$ . Пространственное распределение поля для таких колебаний не имеет характерных внутренних масштабов.

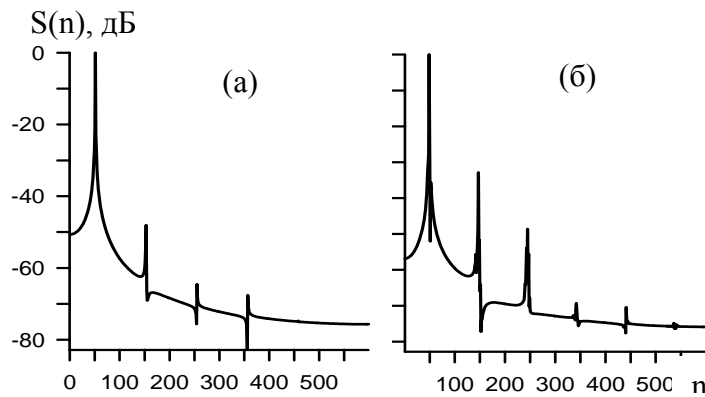


Рис. 1. Спектры мощности временных реализаций поля для  $r_s = 86$  (а) и  $r_s = 87$  (б).

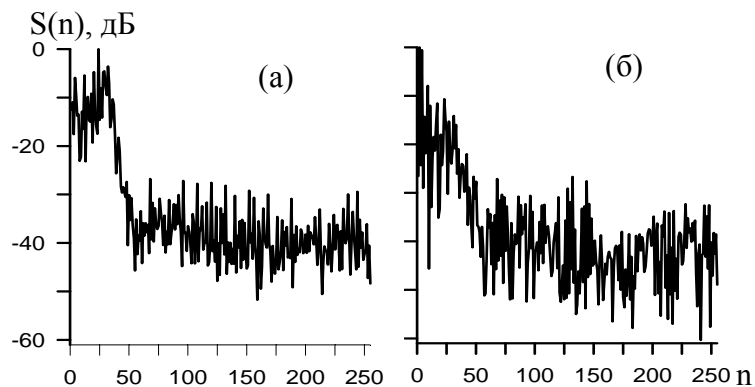


Рис. 2. Спектры мощности пространственного распределения поля для  $r_s = 86$  (а) и  $r_s = 87$  (б).

## ЛИТЕРАТУРА



1. В.А. Черепенин // УФН. 2006. Т. 126. № 10. С. 1124
2. В.Н. Корниенко, А.П. Привезенцев // РЭ.2010.Т.55.№3.С.362.

## СИНХРОНИЗАЦИЯ ВРЕМЕННЫХ МАСШТАБОВ КАК ОБОБЩЕНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ ТИПОВ ХАОТИЧЕСКОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ – ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ИЛЛЮСТРАЦИЯ

А.А.Овчинников, А.А. Короновский, А.Е. Храмов  
*Саратовский государственный университет*

Синхронизация хаотических колебаний является одним из фундаментальных явлений природы, наблюдаемым в системах различной природы, начиная от физических и заканчивая физиологическими [1-3]. Помимо фундаментального значения, данное явление представляет также немалый практический интерес, поскольку может быть положено в основу систем связи нового поколения [4], а также послужить ключом к пониманию процессов, происходящих в сложных биологических системах, например таких как ансамбли нейронов головного мозга [5]. Традиционно в рассмотрение вводится несколько типов хаотической синхронизации: полную, лаг, фазовую и обобщённую синхронизацию [6]. Относительно недавно был предложен новый подход к введению понятия синхронизации систем, демонстрирующих хаотическую динамику, названный авторами синхронизацией временных масштабов [7] и обобщающий описанные ранее типы хаотической синхронизации. Настоящая работа посвящена изучению различных типов хаотической синхронизации и сравнение их с синхронизацией временных масштабов в рамках радиофизического эксперимента с радиотехническими генераторами хаоса, демонстрируются преимущества описания синхронизации в системах с хаотической динамикой в терминах синхронизации временных масштабов.

В настоящей работе в качестве модельного объекта был использован генератор с 1,5 степенями свободы, аналогичный описанному в [8]. Отличительной особенностью данного генератора является большое число колебательных режимов, которые могут им демонстрироваться. В настоящей работе рассматривались наиболее характерные режимы генерации: режим ленточного хаоса и режим с аттрактором типа Double Scroll. Для изучения явления полной, лаг и фазовой синхронизации, а также синхронизации временных масштабов два генератора связывались однонаправленной диссипативной связью, затем при разных значениях параметра связи регистрировались временные реализации, которые впоследствии обрабатывались численно. Исследование обобщённой синхронизации, однако, требует внесения существенных изменений в описанную схему в силу особенностей метода диагностики синхронного режима, называемого методом вспомогательной системы и заключающегося в анализе динамики двух систем, находящихся под воздействием синхронизирующего сигнала – ведомой и вспомогательной. О наличии обобщённой синхронизации возможно говорить в том случае,

если воздействие синхронизирующего сигнала приводит к установлению идентичной динамики в ведомой и вспомогательной системах. При этом существенную трудность для экспериментального изучения явления представляет реализация требования идентичности параметров ведомой и вспомогательной систем. В настоящей работе эта трудность была разрешена способом, предложенным в [9], который устраняет неизбежную неидентичность хаотических генераторов путем использования одного генератора в качестве ведомой и вспомогательной системы.

В работе были изучены особенности установления всех названных типов хаотической синхронизации в описанной радиотехнической системе. Экспериментально показано, что во всем диапазоне параметров связи, в котором наблюдаются различные типы хаотической синхронизации, возможно наблюдать синхронизацию временных масштабов. Показана возможность наблюдения синхронизации на различных основных частотах колебаний, что невозможно сделать, оставаясь в рамках традиционных подходов. Также показана нечувствительность метода к свойствам системы и типу аттрактора.

Работа поддержана проектом ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы и грантов РФФИ (проект 09-02-92421-КЭ\_а).

## ЛИТЕРАТУРА

1. M.G Rosenblum, A.S. Pikovsky // Contemporary Physics. 2003. V. 44. No 5. P. 401.
2. R.A. Filatov, A.E. Hramov, A.A. Koronovskii // Phys. Lett. A. 2006. V. 4, No 358. P. 301.
3. R.C. Elson, et al. // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. No 25. P. 5692.
4. А.А. Короновский, О.И. Москаленко, П.В. Попов, А.Е. Храмов // Изв. РАН. Сер. Физическая. 2008. V. 72. No 1. P. 143.
5. I.V. Belykh, E. Lange, M. Hasler // Phys. Rev. Lett. 2005.V. 94. P. 188101.
6. A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths "Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences" Cambridge University Press, 2001.
7. А.Е. Храмов, А.А. Короновский, // Chaos. 2004. V. 14. No 3. P. 603-610.
8. N.F. Rulkov // Chaos. 1996 V. 6. P. 262.
9. А.А. Овчинников, О.И. Москаленко, А.А. Короновский, А.Е. Храмов // Письма в ЖТФ, 2010. V. 36. No 4. P. 1.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТИЧНОЙ ОБОБЩЕННОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ В УРАВНЕНИИ ГИНЗБУРГА-ЛАНДАУ

Н.С. Фролов, А.А. Короновский, А.Е. Храмов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, факультет  
нелинейных процессов,  
[phrolovns@gmail.com](mailto:phrolovns@gmail.com)

Синхронизация хаотических колебаний – одно из фундаментальных явлений нелинейной физики, которое активно изучается применительно к системам различной природы в радиофизике, физиологии, медицине, передаче информации и т.д. [1]. Одним из интересных и слабоизученных типов хаотической синхронизации является обобщенная синхронизация, под которой понимается установление функциональной связи между состояниями связанных систем [2]. Вызывает интерес изучение обобщенной синхронизации в распределенных автоколебательных системах, которые являются моделями многих реальных систем, используемых на практике. В работах [3] было детально исследовано явление обобщенной синхронизации в связанных уравнениях Гинзбурга-Ландау и обнаружены условия, при которых данный эффект наблюдается. Однако, возникает вопрос относительно возможности установления обобщенной синхронизации между двумя частями пространственно-распределенной системы, находящейся в режиме пространственно-временного хаоса. Иными словами, можно ли наблюдать режим обобщенной синхронизации внутри одной системы, то есть между двумя ее частями?

В представленном докладе проводится исследование данного вопроса на примере уравнения Гинзбурга-Ландау, которое является эталонной моделью пространственно-распределенной системы со сложной динамикой. В ходе исследования было показано, что при определенных параметрах в распределенной системе возможно установление функциональной связи между ее частями. Данный эффект был назван частичной пространственной обобщенной синхронизацией. Исследуемая модель комплексного уравнения Гинзбурга-Ландау формулируется следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u - (1 - i\alpha)|u|^2 u + (1 + i\beta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где  $u$  – функция, описывающая состояние системы,  $\alpha, \beta$  – управляющие параметры. Граничные условия были выбраны соответствующие замкнутой в кольце среде с длиной  $L$ . Для исследования частичной обобщенной синхронизации в пространстве системы (1) были выделены две части с длинами соответственно  $L_1$  и  $L_2$  ( $L_1 + L_2 = L$ ) и рассматривалось

взаимодействие между первой и второй частью системы в области  $L_2$ . Для диагностика режима обобщенной синхронизации между частями пространства была разработана модификация метода вспомогательной системы. Для этого в рассмотрение вводилась еще одна система  $u_a$  с такими же управляющими параметрами как (1), но с другими начальными условиями. На вспомогательную систему были наложены следующие граничные условия, которые обеспечивали связь между частями систем:

$$\left. \frac{\partial u_a}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad \left. \frac{\partial u_a}{\partial x} \right|_{x=L_2} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L_2} \quad (2)$$

По аналогии с методом вспомогательной системы критерием наличия частичной обобщенной синхронизации будет выполнение следующего условия:

$$u(x, t)|_{x \in L_2} = u_a(x, t)|_{x \in L_2} \quad (3)$$

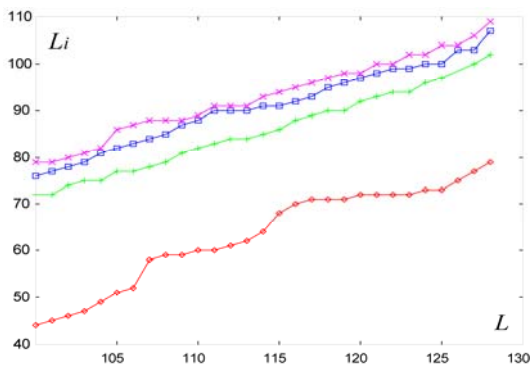


Рис.1

С помощью вышеописанной методики был проведен численный анализ процессов в уравнении Гинзбурга-Ландау с позиций частичной обобщенной синхронизации. Было показано, что с увеличением области  $L_1$  при некотором критическом значении в системе

устанавливался режим обобщенной синхронизации между частями системы. На рисунке 1 показаны зависимости критической длины области пространства  $L_1$ , при которой между состояниями системы в областях  $L_1$  и  $L_2$  наблюдается функциональная связь, от полной длины кольца  $L$ .

Работа поддержана Федеральной целевой программой «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 - 2013 годы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А.С Пиковский., М.Г. Розенблюм, Ю. Куртс “Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление” М.: Техносфера, 2003.
2. N. F. Rulkov et al // Phys. Rev. E. 51. 1995. P. 980.
3. А.Е Нрамов, А.А. Короновский, etc // Phys. Rev. E. 72 .2005. 037201.

## ОЦЕНКА ЗАПАЗДЫВАНИЯ И НАПРАВЛЕНИЯ СВЯЗИ МЕЖДУ НИЗКОЧАСТОТНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ СЕРДЕЧНОГО РИТМА И КРОВЯНОГО ДАВЛЕНИЯ ЧЕЛОВЕКА

В.С. Хорев, В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
[zergs@inbox.ru](mailto:zergs@inbox.ru)

Исследование взаимодействий между различными колебательными процессами в сердечно-сосудистой системе человека уже многие годы привлекает к себе большое внимание [1–3]. Интерес к этой задаче обусловлен тем, что особенности функционирования и взаимодействия элементов сердечно-сосудистой системы отражают ее состояние и могут быть использованы для медицинской диагностики. С помощью различных методов в работе проведено исследование синхронизации и преимущественного направления взаимодействия между низкочастотными колебаниями сердечного ритма и кровяного давления человека с собственной частотой около 0.1 Гц по экспериментальным временным рядам. Нами обследовано 42 практически здоровых человека (из них 18 женщин) в возрасте от 20 до 48 лет, без признаков сердечной патологии (в положениях лёжа и стоя), 62 человек, страдающих артериальной гипертонией (лёжа и стоя) и 112 пациентов, перенёсших инфаркт миокарда через неделю после инфаркта (в положении только лёжа).

Всем обследуемым выполнялась одновременная регистрация электрокардиограммы и пульсограммы, снимаемой со среднего пальца руки. Сигналы снимались с частотой 250 Гц при 16-ти разрядном разрешении, а затем обрабатывались на компьютере. Продолжительность каждой записи составляла 10 минут. Во время регистрации сигналов дыхание у всех обследуемых было произвольным. С каждого испытуемого было произведено по несколько записей в разные дни. Всего было отснято 422 записи. Дополнительно было произведено 120 записей со здоровых людей, находившихся в состоянии ортостатического стресса в течение двух часов. Информацию о вариабельности сердечного ритма мы получали, выделяя из ЭКГ последовательность R-R интервалов. Для выделения низкочастотной компоненты вариабельности сердечного ритма и низкочастотной компоненты сигнала кровяного давления, имеющих частоту около 0.1 Гц, использовалась фильтрация рядов R-R интервалов и кровяного давления, соответственно, полосовым фильтром с полосой пропускания 0.05–0.15 Гц.

После фильтрации синхронизация и взаимодействие между исследуемыми колебательными процессами сердечно-сосудистой системы изучались нами с помощью следующих мер. Для каждого обследуемого были рассчитаны значения коэффициента фазовой синхронизации в

зависимости от пробного времени запаздывания, суммарного процента фазовой синхронизации, а также проведена оценка силы связи с помощью метода, основанного на моделировании фазовой динамики. Коэффициент фазовой синхронизации в зависимости от пробного времени запаздывания отражает преимущественное направление взаимодействия между исследуемыми системами. По величине суммарного процента фазовой синхронизации можно судить о наличии связи между колебательными процессами, а также степени взаимодействия исследуемых систем. При использовании метода, основанного на моделировании фазовой динамики, наличие воздействия одной системы на другую диагностировалось в случае, когда полученная оценка вместе со своим 95% доверительным интервалом превышала нулевой уровень. Нами установлено, что взаимодействие ритмов с частотой 0.1 Гц, наблюдаемых в последовательности R-R интервалов и кровяном давлении, является двунаправленным. Для этих ритмов характерно наличие связи в обоих направлениях. Показано, что эти ритмы могут быть синхронизованы между собой, что может быть объяснимо с точки зрения само- и взаимной адаптации, как регуляторный механизм стабилизации кровоснабжения организма. Обнаружено наличие задержки в связи взаимодействующих ритмов, составляющее порядка четверти характерного периода. Показано, что показатели задержки, синхронизации и направления взаимодействия между исследуемыми колебательными процессами отличаются у здоровых испытуемых и людей, имеющих патологии сердечно-сосудистой системы. Для испытуемых, находящихся в состоянии ортостатического стресса, наблюдаются изменения значений рассчитываемых показателей в промежутке 30-40 минут после начала эксперимента, что может объясняться изменением направления преимущественного взаимодействия исследуемых ритмов. Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 10-02-00980, и аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)», проект № 2.1.1/1738.

## ЛИТЕРАТУРА

1. A. Stefanovska, M. Bračić // *Contemp. Phys.* 1999. V. 40. P. 31.
2. M.A. Cohen, J.A. Taylor // *J. Physiol. London.* 2002. V. 542. P. 669.
3. M.D. Prokhorov, V.I. Ponomarenko, V.I. Gridnev, M.B. Bodrov, A.B. Bespyatov // *Phys. Rev. E.* 2003. V. 68. 041913.

## ОСОБЕННОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТОВ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ ВОЛН В МАГНОННЫХ КРИСТАЛЛАХ

С.Е. Шешукова, М.А. Морозова

Саратовский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского  
[SheshukovaSE@yandex.ru](mailto:SheshukovaSE@yandex.ru)

В последнее время большой интерес представляют исследования нелинейных эффектов самовоздействия волн в различных средах на основе решения системы связанных нелинейных уравнений Шредингера (НУШ). Такие исследования играют важную роль, прежде всего, в задачах нелинейной оптики [1], а также в других областях физики (гидродинамике, физике плазмы, в вакуумной и твердотельной электронике). В частности, такие задачи играют принципиальную роль в случае, когда в среде возможно распространение нескольких типов нормальных волн, в частности, сигнала, содержащего несколько спектральных компонент, в случае необходимости учёта взаимодействия прямой и отражённой волн. Особый интерес такие исследования представляют в случае распространения магнитоэлектрических волн (МЭВ) в ферромагнитных пленках, так как нелинейные эффекты самовоздействия, обусловленные модуляционной неустойчивостью (МН) волн, здесь проявляются при сравнительно небольших уровнях мощности [2].

Новые возможности управления эффектами самовоздействия на МЭВ возникают при использовании в качестве волноведущих систем магнитоэлектрических кристаллов (рис. 1), например, в виде периодической микроструктуры на основе ферромагнитной пленки [2].

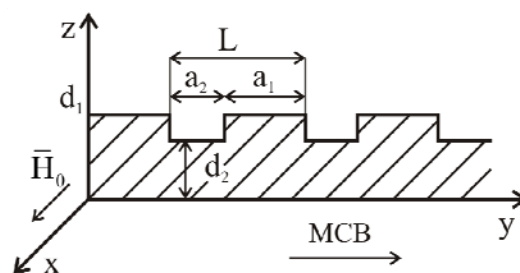


Рис. 1. Исследуемая модель.

В общем случае система уравнений, описывающая нелинейные процессы в таких структурах, представляет собой два связанных нелинейных уравнений Шредингера:



$$\begin{cases} i \left( \frac{\partial \varphi_f}{\partial t} + V_g \frac{\partial \varphi_f}{\partial y} \right) + \delta \varphi_f + \chi \varphi_b + \gamma \left( |\varphi_f|^2 + 2|\varphi_b|^2 \right) \varphi_f = 0 \\ i \left( \frac{\partial \varphi_b}{\partial t} - V_g \frac{\partial \varphi_b}{\partial y} \right) + \delta \varphi_b + \chi \varphi_f + \gamma \left( |\varphi_b|^2 + 2|\varphi_f|^2 \right) \varphi_b = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

где  $\varphi_f$ ,  $\varphi_b$  – медленно меняющиеся амплитуды огибающей связанных волн (прямой и встречной, соответственно);  $V_g$  – групповая скорость,  $\delta$  – отстройка от несущей частоты,  $\chi$  – коэффициент связи,  $\gamma$  – коэффициент нелинейности.

В работе рассчитаны линейные и нелинейные дисперсионные характеристики для системы, представляющей собой ферромагнитную пленку с периодическими неоднородностями, при изменении параметров микроструктуры в широких пределах (рис. 2). Показано, что влияние нелинейности и параметра связи аналогично поведению подобных характеристик в фотонных кристаллах [1].

На основе численного решения системы (1) исследованы особенности нелинейных эффектов самовоздействия магнитостатических волн в периодической структуре, в частности образование брэгговских солитонов (рис. 3).

Работа поддержана Федеральным агентством по образованию РФ (проект РНП 2.1.1/235).

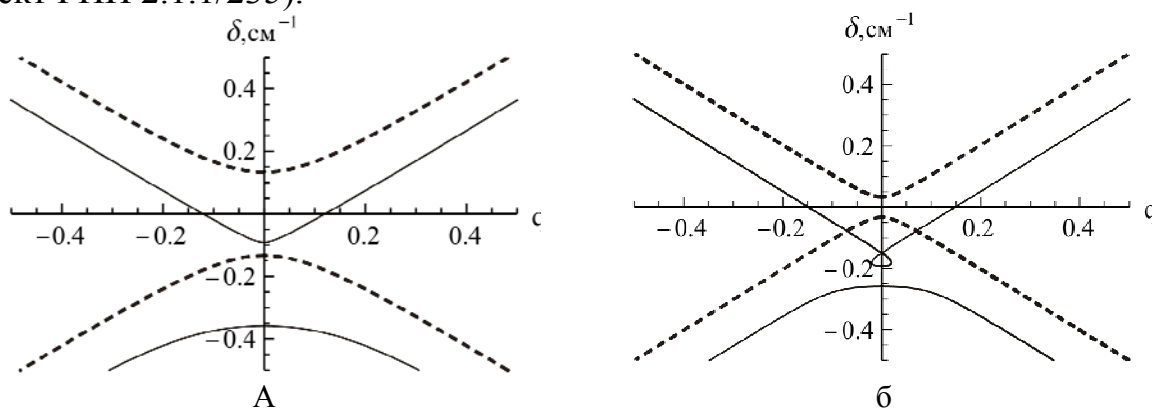


Рис. 2. Дисперсионные кривые, показывающие зависимость отстройки  $\delta$  от волнового числа  $q$  при различных геометрических параметрах периодической структуры. Штриховые кривые соответствуют линейному случаю ( $\gamma = 0$ ).

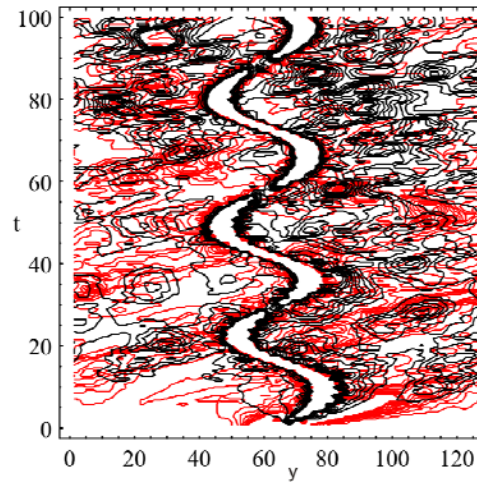


Рис.3. Линии равного уровня эволюции огибающей для  $\varphi_f$  и  $\varphi_b$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Агравал "Нелинейная волоконная оптика" М.: Наука, 1996.
2. А.Б. Устинов, Н.Ю. Григорьев, Б.А. Калиникос // Письма в ЖЭТФ. 2008. Т.88. Вып.1. С.34.