

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ ВОЛНОВОЙ ФИЗИКИ

Динамо-волны и их математическое моделирование

Д.Д. Соколов..... 4

Математический Микроскоп в поточечном анализе изображений с рентгеновских и оптических телескопов

Е.Н. Терентьев, N.E. Shilin-Terentyev..... 5

Метод оценки неравномерности поля в рабочей зоне БЭЖ при размещении антенны вблизи радиопоглощающего материала

А.В. Никитенко, Н.П. Балабуха, А.С. Зубов..... 8

Сервис с графическим интерфейсом для расчета акустической радиационной силы, действующий на упругий сферический рассеиватель в жидкости

А.А. Крохмаль, Н.Е. Крохмаль, О.А. Сапожников 10

Численное решение одномерных уравнений Максвелла в слоистых средах

А.А. Белов, Ж.О. Домбровская..... 12

Структура и свойства свободной конвекции в цилиндрическом слое

Я.Д. Титовец, А.С. Федотов 15

Многомерные кубатуры на последовательностях Соболя

А.А. Белов, М.А. Тинтул..... 18

Фрактальные свойства стохастических дендритов в процессах электроосаждения

А.В. Косырев, Ю.В. Рыжикова 21

Клеточный автомат, описывающий действие топологического изолятора

В.В. Новиков, Д.П. Федченко, И.В. Тимофеев..... 23

Влияние положения малого объекта на опоре на точность измерения его характеристик рассеяния

Н.П. Балабуха, Н.Л. Меньших 26

Фрактальные свойства хиральных дендритов

Д.Д. Ружижская, Ю.В. Рыжикова..... 29

Уменьшение влияния дифракционных эффектов на бистатистические характеристики рассеяния материала за счет использования специальных конфигураций образцов	
<i>Р.В. Гильмутдинов, Н.Л. Меньших, С.А. Фёдоров</i>	33
Анализ влияния пространственной дисперсии на поля металлодиэлектрических наноструктур методом Дискретных источников	
<i>А.С. Пензарь</i>	35
Исследование сингулярности электромагнитного поля вблизи ребра цилиндра с двугольником в сечении	
<i>М.М. Шушарин, И.Е. Могилевский</i>	39
Математическое моделирование дифракции электромагнитной волны на зеркале со скруглёнными краями в векторном случае	
<i>С.С. Новикова, Д.А. Коняев</i>	41
Математическое моделирование электромагнитного поля в рабочей зоне конической безэховой камеры	
<i>А.Д. Сахно, Н.П. Балабуха, Н.Е. Шапкина</i>	45
Задача оптимизации зеркального коллиматора со скруглёнными краями на пучке частот	
<i>Ф.Б. Хлебников, Д.А. Коняев, А.Н. Боголюбов, Н.Е. Шапкина</i>	48
Построение сингулярной части электромагнитного поля в задачах дифракции на объектах с ребрами и коническими точками	
<i>И.Е. Могилевский, А.Н. Боголюбов, В.В. Ровенко</i>	51
Анализ стабильности свойств линейной антенной решётки при параболическом изгибании	
<i>Б.Э. Назаренко, Т.К. Артёмова</i>	53
Исследование влияния наличия опоры на рассеянное объектом электромагнитное поле методом математического моделирования	
<i>Н.П. Балабуха, Е.Е. Евстафьев, Н.Е. Шапкина</i>	56
Получение диаграммы рассеяния объекта на основе значений поля в ближней зоне на отрезке сканирования (двумерный скалярный случай)	
<i>К.М. Шитикова, Н.П. Балабуха, Д.А. Коняев, Н.Е. Шапкина</i>	60

Численное моделирование и визуализация эволюции сдвиговых волн в мягких биологических тканях (реализация метода эластографии SuperSonic Imaging)

А.А. Лисин, И.Ю. Демин, А.Е. Спивак..... 64

Анализ и синтез многослойных дифракционных решеток для практических приложений

А.А. Петухов, М.В. Артемьева, А.Н. Боголюбов..... 67

Погрешность экспоненциально сходящихся квадратур

В.С. Хохлачев, А.А. Белов..... 69

Анализ влияния сильных симметричных колебаний поверхности жидкой струи в составе антенны на свойства антенны

С.В. Ходырев, Т.К. Артёмова, А.А. Очиров 73

Вычисление собственных значений задачи Захарова Шабата

А.С. Долматов 75

Динамо-волны и их математическое моделирование

Д.Д. Соколов
Физический факультет МГУ
sokoloff.dd@gmail.com

На Солнце известны волны различной природы. Большинство из них описывается волновым уравнением и их моделирование укладывается в обычные методы моделирования, используемые в математической физике. Однако один вид волн – динамо-волны -- является интересным исключением, который и составляет предмет лекции. Период этих волн огромен, он примерно равен 22 годам. Он впервые был замечен в XIX веке при осмыслении статистики появления солнечных пятен. Физической причиной этой периодичности является распространение в глубинах солнечной конвективной зоны от средних широт Солнца к солнечному экватору волны квазистационарного магнитного поля. По Солнечные пятна визуализируют лишь модуль этого магнитного поля, поэтому само явление вошло в науку не как 22-летний, а как одиннадцатилетний цикл солнечной активности.

Конечно, волна на Солнце с таким длинным периодом никак не может быть просто электромагнитной волной. Возбуждение и распространение этой волны, получившей название динамо-волны, связано с явлением гидромагнитного динамо. Динамо основано на действии электромагнитной индукции, которое приводит к самовозбуждению квазистационарного магнитного поля за счет перехода кинетической энергии конвекции в магнитную энергию. То, что происхождение магнитного поля Солнца связано с действием электромагнитной индукции, понял еще в 1919 г. Лармор, а на волне всеобщего увлечения автомобилями процесс получил название по одной из составляющих автомобильного мотора. Однако только в 1955 г. Паркер предложил первую жизнеспособную реализацию солнечного динамо. Оказалось, что ключевую роль в этом процессе играет зеркальная асимметрия конвекции, возникающей во вращающемся теле. Само возникновение подобной асимметрии было замечено еще Бэрром и составляет суть принадлежащего ему закона в географии, но долгое время эта небольшая асимметрия не казалась важной. Лишь в 1965 г. эффекты зеркальной асимметрии были последовательно включены в уравнения электродинамики и магнитной гидродинамики Штеенбеком, Краузе и Рэдлером в виде теории среднего поля.

С точки зрения теории среднего поля солнечный цикл представляет собой собственное решение уравнений квазистационарного магнитного поля, которое представляет собой систему уравнений параболического типа, в которой нарушен принцип максимума. Возникновение экспоненциально растущих (с колебаниями) решений и связано с нарушением этого фундаментального принципа.

Математическое моделирование явлений переноса при нарушении принципа максимума представляет заметные трудности, которые в различной мере преодолены современной вычислительной физикой. При этом существенно развиваются и традиционные методы математической физики. Развивается формальная аналогия между динамо-волнами и волнами вероятности в квантовой механики. Возникает также своеобразная версия коротковолнового приближения, напоминающая квазиклассическое приближение квантовой механики, но имеющая разнообразные необычные черты.

Математический Микроскоп в поточечном анализе изображений с рентгеновских и оптических телескопов

Е.Н. Терентьев¹, N.E. Shilin-Terentyev²
¹Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
²EPAM system Moscow
en.teren@physics.msu.ru

Рассматривается применение Математического Микроскопа (ММ) в поточечном анализе изображений трех сталкивающихся галактик, содержащих Черные Дыры (ЧД) в рентгеновских и оптических диапазонах.

Основные понятия ММ

Основная Задача ММ (ОЗММ): Дано: дискретное изображение высокой точности $Y|_A$ и множество дискретных обратимых Диаграмм Направленностей (ДН) или Аппаратных Функций (АФ) $\{O\}$. Требуется найти решение множества систем уравнений $Y|_A = \{O\} X$. Заметим, что мы не знаем ДН или АФ $A = [A_R, A_G, A_B]$, а параметрическое множество дискретных обратимых АФ $\{O\}$ есть наше представление о том, как устроена неизвестная АФ A в данных дискретных измерениях $Y|_A$.

Решение $Y|_A = \{O\} X$ удастся найти в следующем Физическом Фундаментальном Предположении (ФФП): в X есть отдельные изолированные объекты-точки (звезды).

Решение ОЗММ состоит из трех частей: I - обратимая АФ $O = [O_R, O_G, O_B] \sim A$, II - сверх разрешённое изображение (SR) $X = RY$, $R = O^{-1}$ и III - есть объекты-точки в результирующем SR изображении X . В этом случае ФФП становится фактом по результату и это говорит о том, что обратную задачу мы решили корректно. В методе регуляризации АФ A известна, “априорная гладкость X ” не позволяет нам реализовать поточечный анализ SR изображений, поэтому этот метод для нас не приемлем.

Постановка задачи

Задача по обусловленному (по DI от слова Diapason) выбору АФ $pO = pR^{-1}$ ставится как задача на минимум:

$$\min_{LO} \{ \|pR\| | \text{Err}(pO) \leq \text{err} \}, LO = \{pO | [Loc, dx, DI]\} \quad (1)$$

Loc – количество точек в области определения АФ, если $dx < 1$, то АФ O и изображение интерполируются на шаг dx . Выбор параметров задания непрерывной АФ O останавливается вручную оператором исследователем, если в $pR Y$ выявляются – детектируются точечные объекты.

Если имеет место нормировка АФ O : $\sum O = 1$, в нуле Модуляционная Передаточная Функция $M(O)(0,0) = 1$, тогда будем оценивать сверх разрешение величиной:

$$SR = \sum M(pR) * M(O) / \sum M(O) \quad (2)$$

Теорема: если значение индикатора обратимости $\Pi(R * O)(0,0) = (R; O) = 1$, то $R = O^{-1}$. Множества параметрических обратимых $\{O\}$ и DI обусловленных $\{pO\}$ (1) строятся.

ММ для X-ray Chandra

По нашим данным мы наблюдаем две ЧД (в трех галактиках), о наличии которых говорят тонкие “кольца”, которые светят в рентгене только в двух галактиках. Мы полагаем, что в тонких “кольцах” движутся сгустки релятивистского газа.

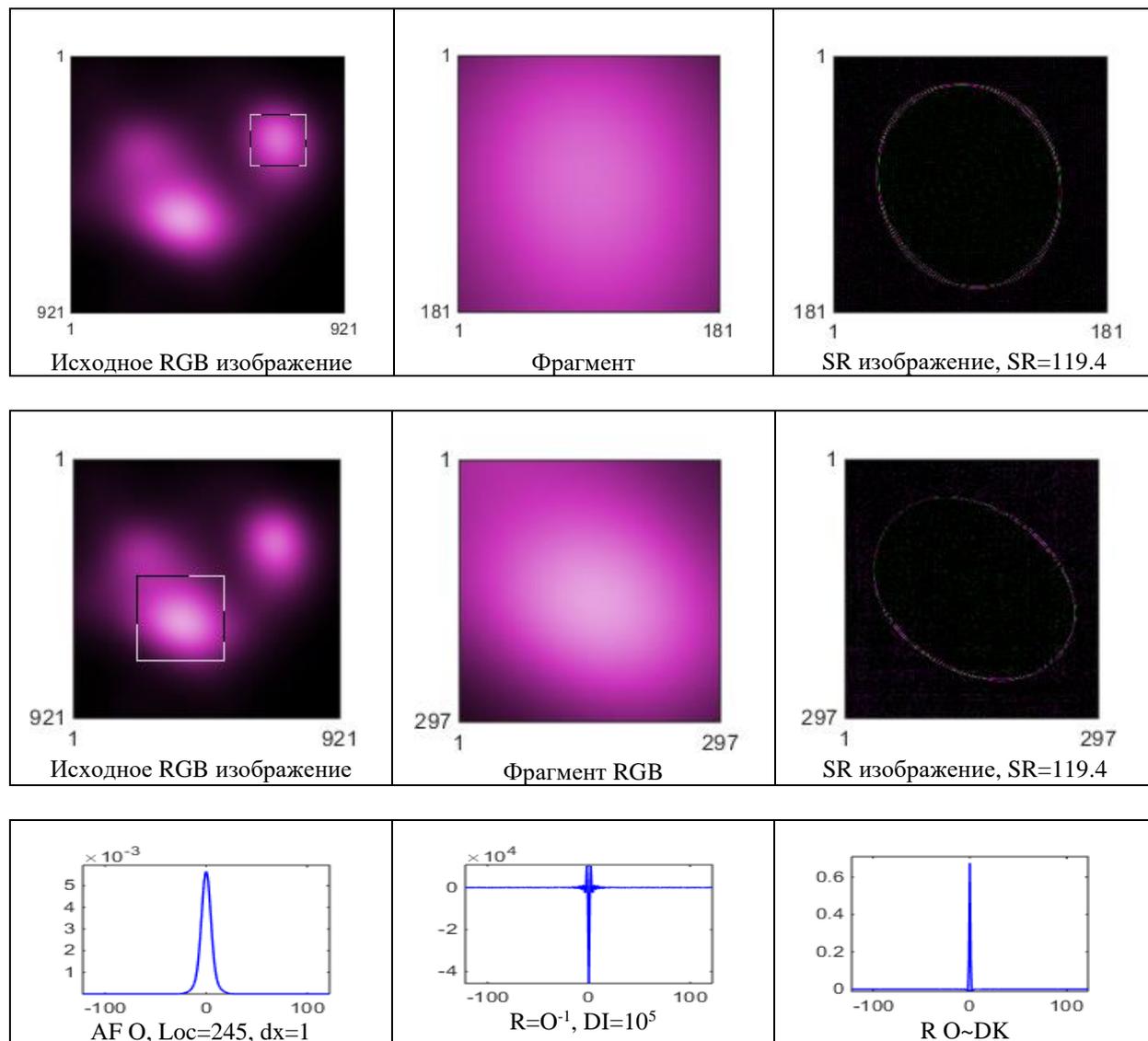
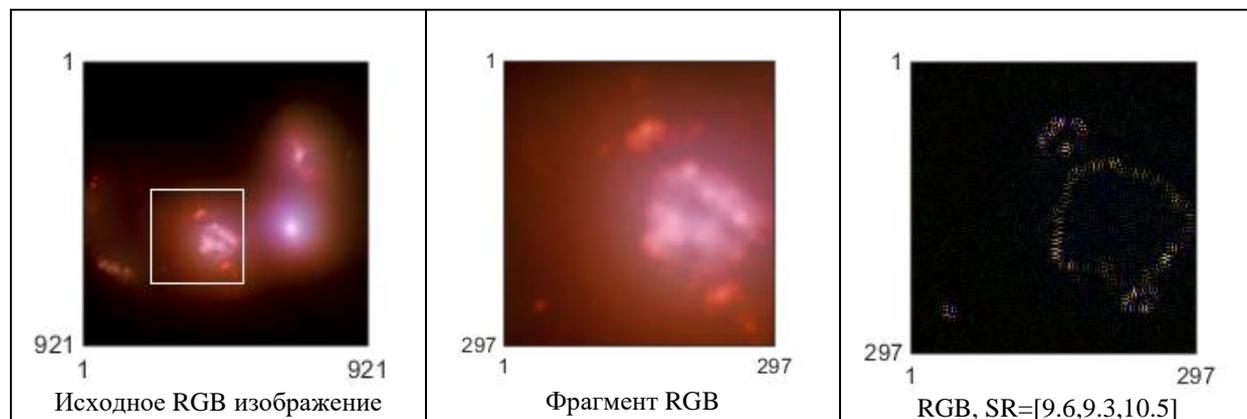


Рис. 1. Пример 3 сталкивающихся галактик с X-ray Chandra телескопа и сечения AF O, разрешающей R и разрешенной R O~DK.

ММ для телескопов в оптических диапазонах

Изображения тех же трех сталкивающихся галактик с оптических телескопов.



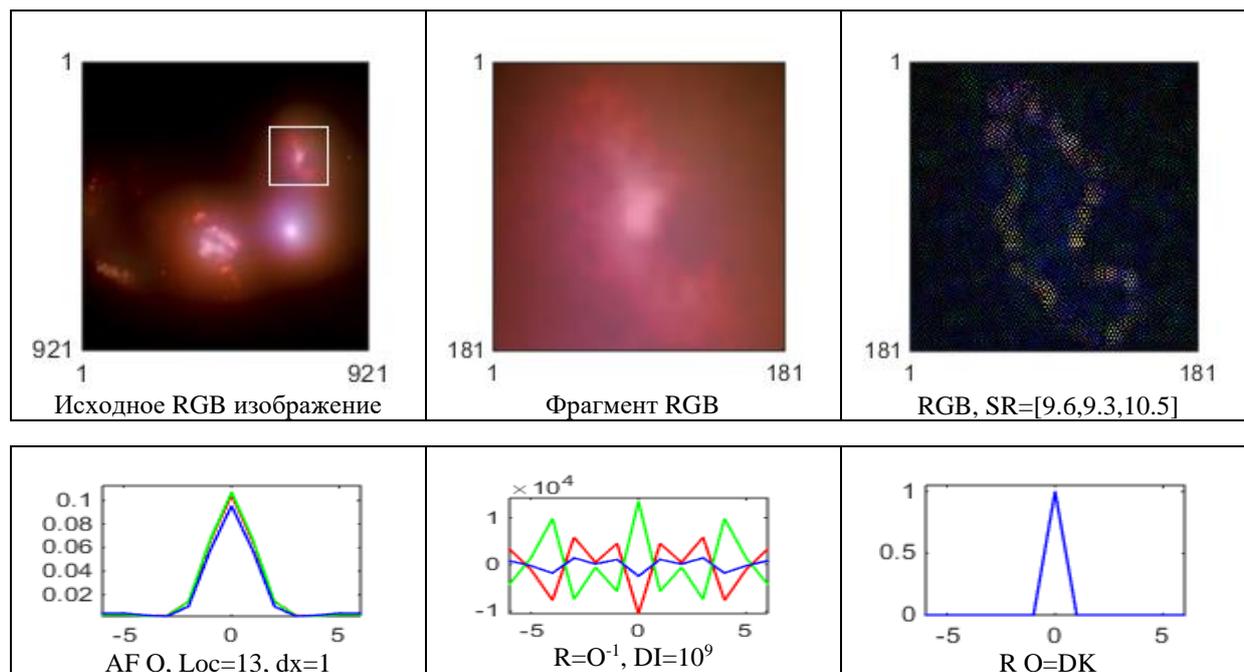


Рис. 2. Пример трех сталкивающихся галактик с оптических телескопов и сечения AF O, разрешающей R и разрешенной RO=DK.

Выводы: ЧД расположены в центрах выделенных квадратов. ФФП позволило нам корректно решать обратную задачу в ММ обычным обращением, см. графики сечений АФ O, обратной $R=O^{-1}$ и разрешенной – $RO=DK$ – символ Дельта-Кронекера, см. Рис. 1-2. Заметим, что поиск решений в методе ММ – трудоемкая задача.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Н. Тихонов, М.В. Уфимцев “Статистическая обработка результатов эксперимента” изд. Московского университета, 1988.
2. https://chandra.harvard.edu/photo/image_use.html.
3. Terentiev, E.N. and Terentiev, N. E. // ISSN 1062-8738, *Bulletin of the Russian Academy of Science. Physics*, 2015, Vol.79, No 12, pp.1427-1431, DOI 10.3103/S1062873815120229
4. Е.Н. Терентьев, ...//УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА, 9 с., №6, 1761005(2017)
5. Terentiev, E.N., Terentiev, N.E., Farshakova, I.I. // DOI: 10.1007/978-3-319-77788-7_19C.
6. E. N. Terentiev, N. E. Shilin-Terentiev // doi.org/10.1007/978-3-030-11533-3_44.
7. E. N. Terentiev, ...//doi: 10.11648/j.sjams.20190705.12, ISSN: 2376-9491 (Print); ISSN: 2376-9513 (Online).
8. E. N. Terentiev, I. I. Farshakova, N. E. Shilin-Terentyev // <http://www.sciencepublishinggroup.com/journal/paperinfo?journalid=301&doi=10.11648/j.ajaa.20190703.11>
8. E. N. Terentiev, I. N. Prikhodko and I. I. Farshakova // Concept of mathematical microscope, AIP Conference Proceedings 2171, 110010(2019); <https://doi.org/10.1063/1.5133244>

Метод оценки неравномерности поля в рабочей зоне БЭК при размещении антенны вблизи радиопоглощающего материала

Н.П. Балабуха, А.С. Зубов, А.В. Никитенко
ИТПЭ РАН
kocheku@gmail.com

При создании безэховых камер (БЭК) важно иметь возможность рассчитывать неравномерность поля в рабочей зоне, обусловленную рассеянием поля облучающей антенны на радиопоглощающем материале (РПМ) [1,2]. Время такого расчета должно быть минимальным, это важно в том числе для решения задачи оптимизации параметров камеры – типа и расположения РПМ, модели облучателя и его положения в пространстве камеры. Поскольку радиопоглощающий материал представляет собой дифракционную решетку, в расчете интерес представляет как зеркальное отражение, так и дифракционные максимумы высших порядков, причем последние могут превышать зеркальное отражение и иметь выраженную локализацию [3]. Поэтому необходимо применение строгих методов расчета отражения от РПМ. В данной работе представлен алгоритм расчета поля в рабочей зоне БЭК с облучающей антенной, задаваемой диаграммой направленности.

Поле в рабочей зоне складывается из прямого поля облучателя и от полей, отраженных от РПМ на стенках БЭК. Задача расчета поля, отраженного от радиопоглощающего материала, может быть решена методом связанных волн [4]. На рисунке 1 слева показана постановка задачи для метода связанных волн, а справа – результат расчета коэффициента отражения главной гармоники для случая ТЕ и ТМ поляризации.

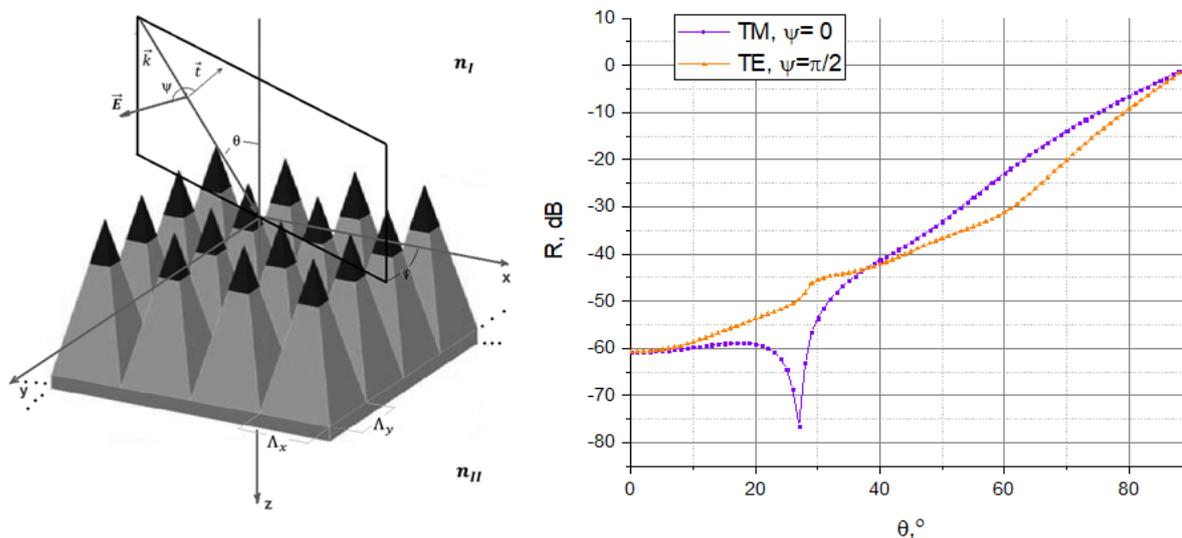


Рис. 1. Слева – постановка задачи метода связанных волн. Справа – результат расчета методом связанных волн коэффициента отражения главной гармоники в зависимости от угла падения θ , для двух поляризаций.

Для того, чтобы свести задачу к постановке метода связанных волн, в заданном направлении (θ, φ) определим амплитуду вектора электрической напряженности E из диаграммы направленности антенны, а направление вектора E определим из следующих условий:

$$(k, E) = 0$$

$$(k, E, e_x) = 0,$$

где k – волновой вектор. Вектор e_x в последнем выражении задает поляризацию, для ортогональной поляризации в последнем выражении необходимо использовать вектор e_y .

На основе разработанной модели была создана программа, реализующая алгоритм расчета поля в рабочей зоне камеры. В качестве примера на рис. 2 приведены результаты расчетов для рупорной камеры [1,2] на частоте 2 ГГц. Размеры прямоугольной части камеры – 10x10x10 м, длина рупорной части – 15 м, облучатель выдвинут из фокуса на 1 м. В качестве облучателя использовалась рупорная антенна Пб-23. Приведено сечение, параллельное задней стенке камеры и находящееся от нее на расстоянии 3.5 м.

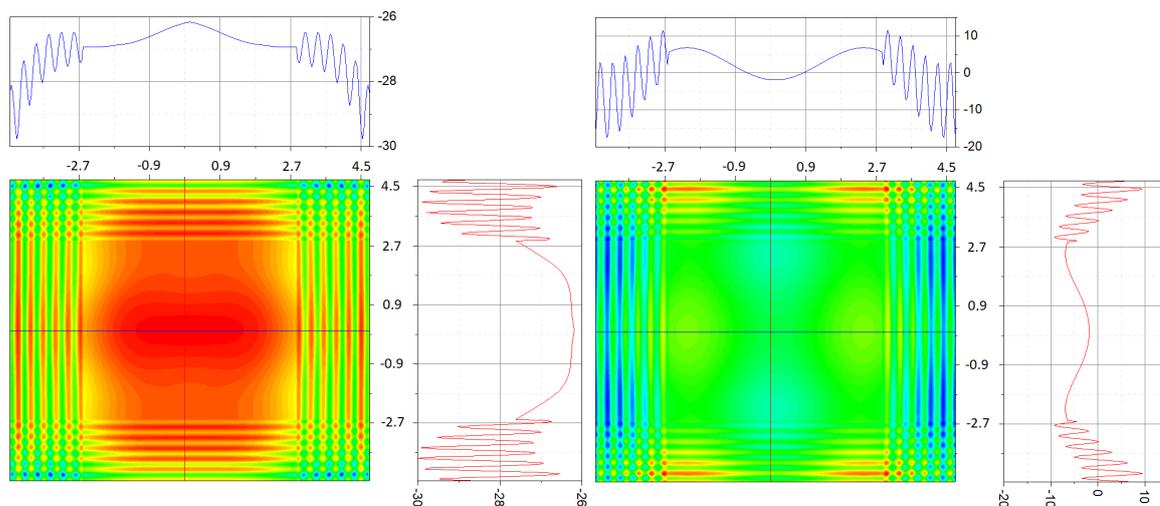


Рис. 2. Распределение амплитуды(слева) и фазы(справа) электромагнитного поля в сечении рабочей зоны, параллельном задней стенке камеры.

Поскольку метод связанных волн дает величину коэффициента отражения с наперед заданной точностью, погрешность расчета поля определяется приближением расчета поля облучателя с использованием диаграммы направленности. Важным преимуществом изложенного алгоритма является его скорость расчета. Часто в диапазоне углов, при которых поле облучателя падает на РПМ и отражается в рабочую зону камеры, коэффициент отражения практически не зависит от угла φ . В этом случае скорость расчета становится меньше 0.01 секунды даже на стандартном персональном компьютере, что позволяет решать на нем обратную задачу оптимизации параметров камеры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.П. Балабуха, А.С. Зубов, В.С. Солосин “Компактные полигоны для измерения характеристик рассеяния” М.: Наука, 2007.
2. L. Hemming “Electromagnetic Anechoic Chambers: A Fundamental Design and Specification Guide”, Wiley-Interscience, John Wiley and Sons and IEEE Press. Piscataway, New Jersey, 2002.
3. А.В. Никитенко, А.С. Зубов, Е.В. Булычев // Журнал Радиоэлектроники (электронный журнал), номер 12, 2014 год. <http://jre.cplire.ru/jre/dec14/15/text.pdf> А.В.
4. Никитенко, А.С. Зубов, А.Н. Боголюбов // Журнал Радиоэлектроники (электронный журнал), номер 11, 2015 год. <http://jre.cplire.ru/jre/nov15/11/text.pdf>

Сервис с графическим интерфейсом для расчета акустической радиационной силы, действующий на упругий сферический рассеиватель в жидкости

А.А. Крохмаль¹, Н.Е. Крохмаль², О.А. Сапожников¹

¹МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра акустики

²МГУ им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятности
aa.krokhmal@physics.msu.ru

Расчет акустической радиационной силы, действующей на твердотельный рассеиватель, является непростой вычислительной задачей, требующей решения задачи рассеяния акустической волны. Существующие упрощения для расчета радиационной силы (например, приближение Горькова [1]) подходят только для рассеивателей малых волновых размеров, тогда как в прикладных задачах часто встает вопрос о воздействии ультразвукового пучка на объект, размер которого существенно превышает длину волны или сравним с ней.

В работе [2] был предложен подход по расчету радиационной силы, действующей со стороны произвольного акустического пучка на упругую сферу в жидкости. Падающий на рассеиватель пучок представляется в виде суммы плоских волн разных направлений (метод углового спектра). Для каждой такой волны применяется классическое решение для рассеяния на упругой сфере и затем результирующее рассеянное поле представляется в виде суперпозиции рассеянных волн от всех компонент углового спектра падающего пучка. Сумма падающей и рассеянной волн позволяет рассчитать компоненты тензора радиационных напряжений на замкнутой поверхности, окружающей рассеиватель, и в итоге вычислить акустическую радиационную силу.

Данный метод расчета акустической радиационной силы был реализован на языке программирования Python 3, чьим преимуществом является открытая лицензия, позволяющая использовать его без ограничений в любых приложениях, и широкий выбор библиотек. Графический интерфейс программы был реализован с помощью фреймворка веб-разработки Flask и может быть доступен в любом браузере. В качестве базы данных, в которой хранятся результаты расчетов и загруженные модели акустического пучка, используется PostgreSQL. Также имеется Docker образ данного сервиса, который может быть запущен на любой операционной системе, а также на облачном сервере.

Для того чтобы рассчитать акустическую радиационную силу, действующую со стороны произвольного пучка на сферический упругий рассеиватель, на вход программы нужно подать информацию об акустическом поле и параметрах рассеивателя. В программу загружается файл в формате .mat, который содержит таблицу $N \times N$ элементов, представляющей распределение комплексной амплитуды давления в плоскости, перпендикулярной направлению распространения пучка. Такой способ подачи информации о поле позволяет использовать не только поля, рассчитанные аналитически от произвольных излучателей, но и измеренные экспериментально в некоторой плоскости с помощью метода акустической голографии [3]. Секущую плоскость следует выбирать в области между источником поля и фокусом и желательно ближе к фокусу, чтобы область высоких амплитуд была более локализована. В отдельные окна добавляется информация о пространственном шаге в распределении комплексной амплитуды давления, плотности и скорости звука в среде, частоте звуковой волны и расстоянии между источником и секущей плоскостью. Каждой модели присваивается уникальное имя, и она загружается в базу данных. К ней будут привязываться все

дальнейшие расчеты радиационной силы с ее использованием без необходимости подгружать модель заново для разных рассеивателей.

Далее вводятся параметры рассеивателя: задается его радиус, плотность, продольная и поперечная скорости звука, а также координаты (x, y, z) , в которых будет проводиться расчет радиационной силы. Оси Ox и Oy направлены перпендикулярно друг другу в секущей плоскости, а ось Oz перпендикулярна секущей плоскости и направлена вдоль распространения пучка. Радиационную силу можно рассчитать вдоль одной из осей (одномерный случай, рис. 1а) в некоторой плоскости (двумерный случай, рис. 1б) или сразу в некоторой области пространства (трехмерный случай) в зависимости от того, какие координаты x , y и z будут заданы. Следует учитывать, что в случае рассеивателя большого волнового размеры расчеты будут довольно тяжеловесными.

После расчета акустической радиационной силы результаты расчета выводятся в виде интерактивных графиков (рис. 1) и сохраняются на вкладке с моделями и результатами расчета. Также сохраняются все параметры поля и рассеивателя, а полученные значения компонент радиационной силы, нормированные на мощность звукового поля и скорость звука в среде, можно скачать в формате .txt.

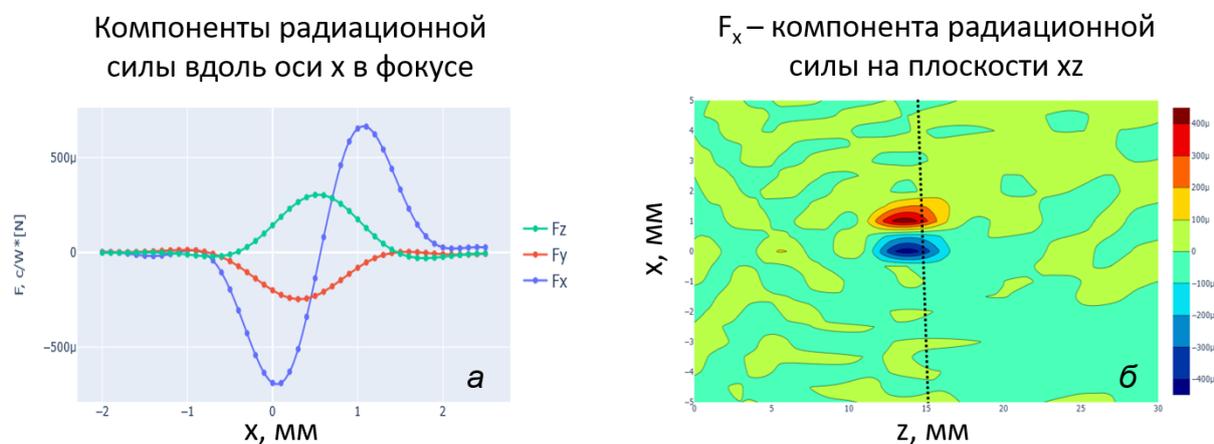


Рис. 1. Радиационная сила вдоль оси x в фокусе (а) и F_x -компонента силы в плоскости xz (б), сфокусированный источник, нейлоновый рассеиватель радиуса 0.1 мм. Область расчета на рис. (а) соответствует пунктирной линии на рис. (б).

Точность расчета акустической радиационной силы зависит от количества итерационных членов, при этом чем больше размер рассеивателя, тем больше требуется итерационных членов. Время расчета квадратично зависит от количества итерационных членов и линейно зависит от количества пространственных точек. В реализованном алгоритме количество итерационных членов было ограничено количеством $n = ka + 5$, где k – волновое число в среде, a – радиус рассеивателя. Было показано, что в таком случае численная ошибка расчета не превышает 10^{-6} .

Открытый код созданного сервиса располагается на платформе GitHub [4].

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 20-32-90093 и Фонда развития теоретической физики «Базис».

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.П. Горьков // Докл. АН СССР. 1961. Т. 140. №. 1. С. 88–91.
2. O.A. Sapozhnikov, M.R. Bailey // J. Acoust. Soc. Am. 2013. V. 133. No. 2. P. 661–676.
3. O.A. Sapozhnikov *et al.* // J. Acoust. Soc. Am. 2015. V. 138. No. 3. P. 1515–1532.
4. https://github.com/nkrokhmal/rfc_calculation

Численное решение одномерных уравнений Максвелла в слоистых средах

А.А. Белов, Ж.О. Домбровская

МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет

aa.belov@physics.msu.ru, dombrovskaya@physics.msu.ru

Введение. Во многих актуальных задачах физики плазмы (сжатие мишеней УТС, динамика плазменного шнура в токамаках, плазменные неустойчивости и др.) требуется решать систему уравнений Максвелла в качестве вспомогательной подзадачи. Известные разностные методы (наиболее популярным из которых является метод FDTD конечных разностей во временной области [1]) дают большую погрешность вблизи границ раздела сред и позволяют учитывать только приближенные модельные законы дисперсии среды. В результате существующие методы не могут обеспечить необходимую количественную точность.

Стационарная задача. Рассмотрим распространение плоской электромагнитной волны частоты ω перпендикулярно набору из Q плоско-параллельных пластин общей толщиной a . Обозначим координаты границ слоев через x_1, x_2, \dots, x_{Q-1} . Пусть все объемные и поверхностные токи зависят от времени как: $\exp(-i\omega t)$.

Направим ось z перпендикулярно пластинам. Тогда электрическое поле E направлено по оси x , магнитное поле H – по оси y , волновой вектор k – по оси z . Здесь $k = \omega/c$, где c – скорость света. Диэлектрическая проницаемость ϵ_q , магнитная восприимчивость μ_q , проводимость s_q , объемная плотность токов J_q q -й пластины, поверхностная плотность токов j_q на q -й границе не зависят от x и y . Вектора J_q и j_q направлены по оси x . Амплитуды полей зависят только от z . Такая задача описывается системой интегральных уравнений Максвелла

$$\oint_S H_q dl = 4\pi c^{-1} \oint_S (J_q + s_q E_q) ds + c^{-1} (-i\omega) \oint_S D_q ds, \quad D_q = \epsilon_q E_q, \quad (1)$$

$$\oint_S E_q dl = -c^{-1} (-i\omega) \oint_S B_q ds, \quad B_q = \mu_q H_q.$$

Здесь S – произвольная поверхность, ограниченная контуром G . Используется система единиц СГС. На внешних границах поставим условия излучения

$$\nabla_z E_1 + i\omega c^{-1} E_1 = 2ikE^0, \quad z = 0; \quad \nabla_z E_Q - i\omega c^{-1} E_Q = 2ikE^a e^{-ika}, \quad z = a. \quad (2)$$

Здесь E^0 , E^a – заданные амплитуды волн, падающих справа и слева. На границах слоев поставим условия сопряжения

$$\begin{aligned} e_z'(E_q - E_{q-1}) &= 0, & e_z(D_q - D_{q-1}) &= 0, \\ e_z'(H_q - H_{q-1}) &= 4\pi c^{-1} j_q, & e_z(B_q - B_{q-1}) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Введем специальную сетку $\{z_n\}$, $0, n, N$, $Dz_{n+1/2} = z_{n+1} - z_n$, у которой границы слоев являются узлами. Составим линейную интерполяцию сеточных значений полей между узлами

$$E(z) = a_n z + b_n, \quad H(z) = g_n z + d_n, \quad z_n \leq z \leq z_{n+1}, \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (4)$$

Здесь a_n , b_n , g_n , d_n – коэффициенты интерполяции. Подставим интерполяцию (4) в задачу (1). При этом интегралы в (1) вычисляются по формуле трапеций, условия сопряжения аппроксимируются точно, а производные $\nabla_z E_1 / \nabla z$, $\nabla_z E_Q / \nabla z$ выразим из дифференциального уравнения Максвелла $\text{rot} E_q = i\omega c^{-1} \mu_q H_q$, записанного в узлах z_0 и z_N соответственно. Это дает систему разностную схему для стационарной задачи

$$\begin{aligned}
 \mathbf{g}_n &= 4\mu c^{-1} J_q(\bar{z}_n) - c^{-1} (i\omega \mathbf{e}_q(\bar{z}_n) - 4\mu \mathbf{s}_q(\bar{z}_n)) (\mathbf{a}_n \bar{z}_n + \mathbf{b}_n); \\
 \mathbf{a}_n &= i\omega c^{-1} \mathbf{m}_q(\bar{z}_n) (\mathbf{g}_n \bar{z}_n + \mathbf{d}_n); \\
 \mathbf{a}_n \bar{z}_{n+1} + \mathbf{b}_n &= \mathbf{a}_{n+1} \bar{z}_{n+1} + \mathbf{b}_{n+1}, \\
 \mathbf{g}_{n+1} \bar{z}_{n+1} + \mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{g}_n \bar{z}_{n+1} - \mathbf{d}_n &= 4\mu c^{-1} j(z_{n+1}); \\
 i\mathbf{m}(\bar{z}_0) \mathbf{d}_0 + i\sqrt{\mathbf{e}(\bar{z}_0) \mathbf{m}(\bar{z}_0)} \mathbf{b}_0 &= 2i\sqrt{\mathbf{e}(\bar{z}_0) \mathbf{m}(\bar{z}_0)} E^0; \\
 i\mathbf{m}(\bar{z}_N) (\mathbf{g}_N \mathbf{a} + \mathbf{d}_N) - i\sqrt{\mathbf{e}(\bar{z}_N) \mathbf{m}(\bar{z}_N)} (\mathbf{a}_N \mathbf{a} + \mathbf{b}_N) &= 2i\sqrt{\mathbf{e}(\bar{z}_N) \mathbf{m}(\bar{z}_N)} E^a.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $\bar{z}_n = 0.5(z_n + z_{n+1})$. Схема (5) является принципиально новой.

1 Шаблон схемы включает только один шаг по пространству, то есть схема является бикompактной. Поэтому при выборе специальных сеток не возникает дифференцирования через границу раздела.

2 В схеме явно учитываются условия сопряжения. Поэтому она консервативна не только для однородной среды, но при наличии границ раздела. Доказано, что схема (5) сходится со 2-м порядком точности при наличии как слабых, так и сильных разрывов на границах раздела. Для нее применим метод сгущения сеток, асимптотически точные оценки погрешности и экстраполяция по методу Ричардсона.

Нестационарная задача. В постановке (1) – (3) заменим множитель $(-i\omega)$ на производную $\mathbb{1}_t$. Объемные $J_q(z, t)$ и поверхностные $j_q(z, t)$ токи могут произвольно зависеть от времени. Слева и справа на рассеиватель падают волновые пакеты $E^0(t) \exp(-i\omega t)$, $E^a(t + a/c) \exp(-i\omega t - ika)$ с несущей частотой ω и заданными огибающими $E^{0,a}$.

При распространении волнового пакета в линейной диспергирующей среде для каждой гармоники реализуются свои \mathbf{e} , \mathbf{m} , \mathbf{s} . Выполним численно преобразование Фурье падающих волновых пакетов, объемных и поверхностных токов по формуле трапеций, используя всюду одинаковые сетки по времени и наборы частот $\{\omega_m\}$, $\omega_{m+1} - \omega_m = \Delta\omega_m$. Для каждой частоты получим свои амплитуды компонент падающих волновых пакетов $E_m^{0,a}$ и источников поля $(J_q)_m$, $(j_q)_m$. Решим описанным выше методом набор стационарных задач, каждая из которых соответствует своей частоте ω_m . Полученные амплитуды просуммируем по всем частотам ω_m . Это и даст решение нестационарной задачи $E(z, t)$, $H(z, t)$. Это принципиально новый подход. Он был назван методом спектрального разложения.

Доказано, что описанный алгоритм сходится со 2-м порядком точности. Для него также применимы ричардсоновские оценки точности и экстраполяционное уточнение. При этом сетки по z , t , ω должны сгущаться одновременно и в одинаковое число раз.

Тестовые расчеты. Пусть граница раздела сред расположена в точке $z = b < a$. Слева от нее $\mathbf{e}_1 = \mathbf{m}_1 = 1$, справа – $\mathbf{e}_2 = 8$, $\mathbf{m}_2 = 2$. Падающие волны $E^{0,a}$ и объемные токи $J_{1,2}$ отсутствуют, а по границе раздела течет поверхностный ток j_1 , излучающий волны в обоих направлениях оси z .

Такая модель описывает переизлучение метаповерхности (одиночного слоя частиц, диаметр которых меньше либо сопоставим с длиной волны) либо тонкого металлического напыления на границе рассеивателя. Подобные конструкции широко применяются в оптике наноструктур.

Точное решение этой задачи имеет вид

$$\begin{aligned} E &= -\chi j_1 ([b-z]/c - t), & H &= -E, & z < b, \\ E &= \chi \sqrt{\epsilon/m} j_1 ([z-b] \sqrt{\epsilon m}/c - t), & H &= \sqrt{\epsilon/m} E, & z > b. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\chi = 4\pi c^{-1} (1 + \sqrt{\epsilon/m})^{-1}$. Задача рассматривалась в двух постановках: стационарной при $j_1 = e^{-i\omega t}$ и нестационарной при $j_1 = \exp\{-t^2/t_0^2 - i\omega t\}$. В первом случае решение показано на рис. 1. Видно, что H имеет сильный разрыв, а E – слабый при $z = b$. Эта задача особенно трудна для численного расчета. В литературе она не рассматривалась.

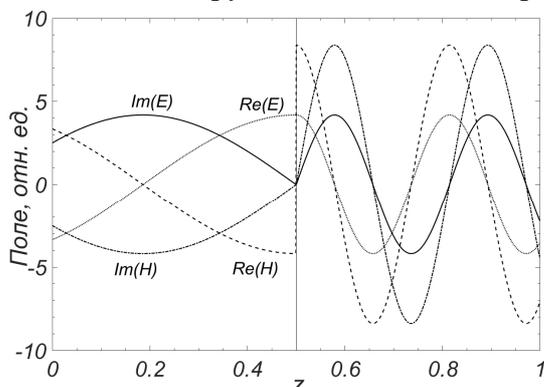


Рис. 1. Решение (6) в стационарном случае, вертикальная линия – граница раздела сред.

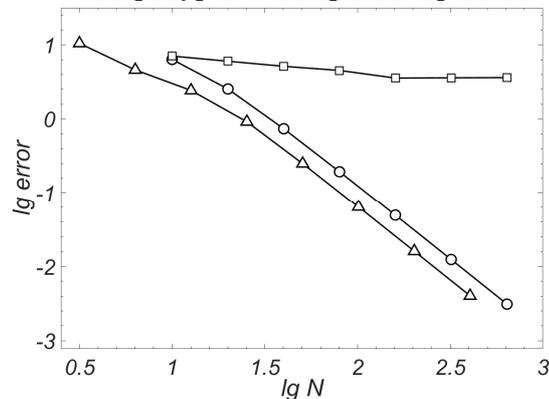


Рис. 2. Погрешности; \circ – стационарная схема, Δ – нестационарная схема, \square – явная схема «крест»

Погрешность определялась как разность численного решения с точными (6). Зависимость погрешности от числа шагов для разных схем приведена на рис. 2. Наклон графиков нашим схем показывает сходимость со вторым порядком точности. Точность 1% достигается уже при $N : 200$ узлов сетки.

Для сравнения был проведен расчет по явной схеме «крест» метода FDTD. Погрешность приведена на рис. 2. Она огромна : 200% и не убывает при уменьшении шага; то есть сходимости нет! Тем самым, общепотребительная схема «крест» абсолютно непригодна для расчета слоистых сред.

Таким образом, тестовые расчеты убедительно верифицируют предложенные схемы. Видно, что последние кардинально превосходят по точности и надежности существующие методы FDTD. Сами демонстрационные задачи можно рекомендовать в качестве представительных стандартных тестов.

Подробное изложение результатов работы приведено в [2].

Работа поддержана грантом РФФИ 19-01-00593

ЛИТЕРАТУРА

1. Yee K. // IEEE Trans. Antennas. Propag. 1966. V. 14, No. 3. P. 302.
2. Белов А.А., Домбровская Ж.О. // ДАН. Матем., информ., процессы управл. 2020. Т. 492. С. 15.

Структура и свойства свободной конвекции в цилиндрическом слое

Я.Д. Титовец, А.С. Федотов

Белорусский государственный университет, г. Минск
yoscrimmer@gmail.com

Конвективная неустойчивость, связанная с неоднородным нагревом, наблюдается во многих технических системах и представляет интерес с точки зрения теории самоорганизации. На сегодняшний день хорошо исследованы простые задачи с конвекцией между плоскими пластинами, однако в реальных инженерных системах часто встречается конвективный обмен в изогнутых и цилиндрических слоях. Примером такой системы является ускорительный комплекс NICA (Nuclotron-based Ion Collider Facility) в Дубне, нацеленный на изучение процессов, происходящих при столкновении ускоренных пучков ионов. Основную роль в исследовании играет детектор MPD (Multi-Purpose Detector). Общая мощность электроники MPD составляет более 1 МВт, что может приводить к существенному тепловыделению как внутри, так и вне объема установки. Кроме того, необходимо обеспечить термостабилизацию с целью уменьшения погрешности определения характеристик частиц. Таким образом, важным этапом оценки надежности системы является теплофизическое моделирование. Исследование подобных случаев представляет интерес как для практических приложений, так и для развития теории самоорганизующихся систем.

Для анализа динамических систем широко применим метод расчета старшего показателя Ляпунова. Наличие положительного старшего показателя Ляпунова является критерием хаоса, поэтому его определение особенно важно.

Текущая среда в конвективных потоках приходит в движение за счет силы Архимеда, возникающей из-за разницы в плотности между горячей и холодной жидкостью. Приближение Буссинеска заключается в учете зависимости плотности от температуры в виде:

$$\rho(T) = \rho_0(1 - \beta\theta), \quad (1)$$

где ρ – плотность жидкости, ρ_0 – плотность жидкости при равновесной температуре, β – коэффициент объемного расширения, θ – отклонение температуры от равновесного состояния. На расчетной области была поставлена начально-краевая задача для системы уравнений движения и теплопереноса в несжимаемой жидкости [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}\nabla)\bar{v} &= -\frac{1}{\rho_0}\nabla P + \nu\Delta\bar{v} + \bar{g}\beta\theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\bar{v}\nabla)\theta &= \chi\Delta\theta \\ \operatorname{div}\bar{v} &= 0 \end{aligned}, \quad (2)$$

где \bar{v} – скорость течения, P – давление, ν – кинематическая вязкость, \bar{g} – ускорение свободного падения, χ – коэффициент температуропроводности.

Решение уравнений проводилось с использованием программного обеспечения COMSOL Multiphysics, которое базируется на численном решении уравнений в частных производных методом конечных элементов. Алгоритм поиска решений методом конечных элементов состоит в определении слабой формы дифференциального уравнения в частных производных, разбиении расчетной области на элементы, выборе интерполирующих решение функций на элементах, заполнении матрицы жесткости и вектора нагрузки, включении граничных условий и решении результирующей системы линейных алгебраических уравнений.

Для расчетов была выбрана дискретизация «P1 + P1», позволяющая рассчитать скорость и давление с ошибкой не хуже $O(h)$. Для температуры была выбрана линейная дискретизация (ошибка не хуже $O(h)$).

Сетка для двумерной расчетной области (рис.1а) была настроена вручную и включала в себя специальные элементы для моделирования пристеночного слоя. Отображенная сетка представлена на рис.1б. Между внешней и внутренней стенками слоя всегда находилось не менее 25 элементов, что позволяет корректно разрешить практически любые картины неустойчивости, способные повлиять на транспорт внутри слоя. Итоговая сетка включала $6,7 \cdot 10^4$ элементов.

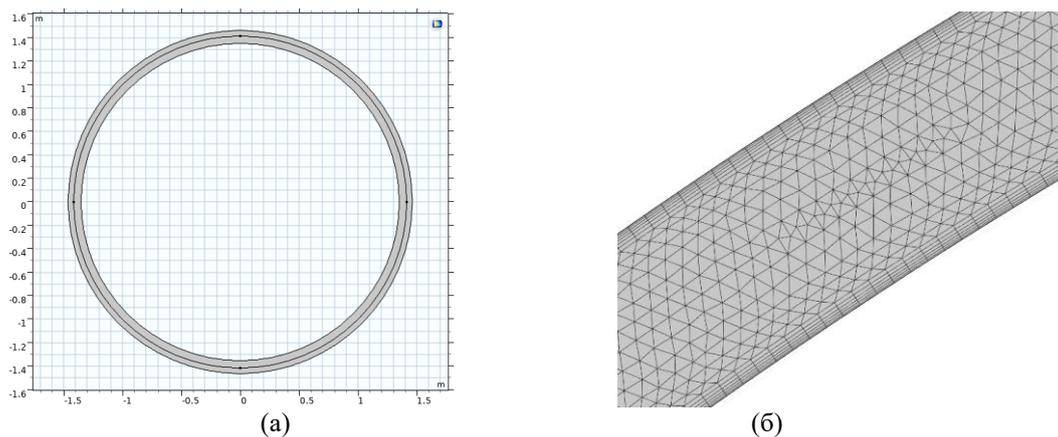


Рис. 1. Геометрические параметры модели двумерного цилиндрического слоя: (а) - расчетная область, (б) - часть расчетной области с отображенной сеткой

Сетка для трехмерной расчетной области (рис.2а) также была настроена вручную. Отображенная сетка в увеличенном виде представлена на рис.2б. Итоговая сетка включала $1,2 \cdot 10^6$ элементов, из которых $8,6 \cdot 10^5$ являлись тетраэдрами и $3,8 \cdot 10^5$ призмами.

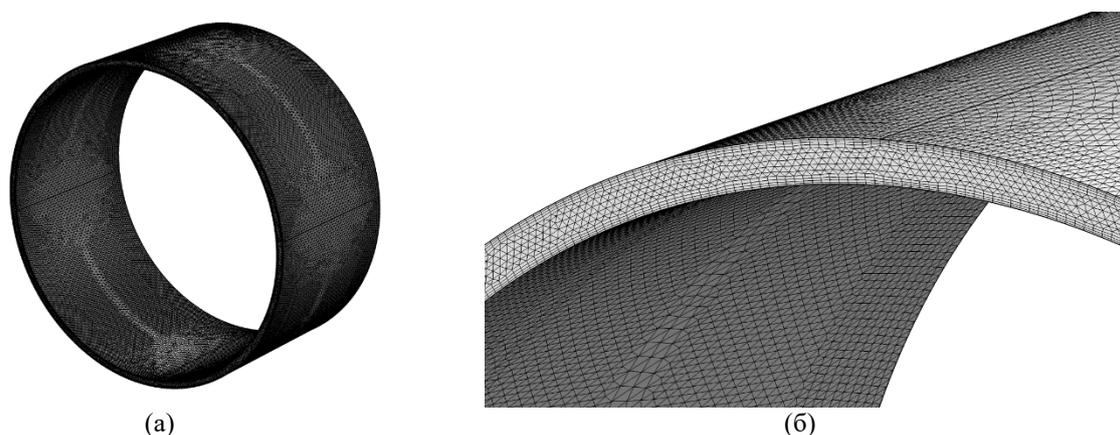


Рис. 2. Геометрические параметры модели трехмерного цилиндрического слоя: (а) - расчетная область с отображенной сеткой, (б) - часть расчетной области с отображенной сеткой

Для расчета показателя Ляпунова использовался метод трассировки частиц. В поток вводились безмассовые частицы, скорость которых в любой точке пространства совпадала со скоростью, полученной из уравнений Навье-Стокса, выбирались частицы с близкими начальными условиями отслеживалась зависимость расстояния между выбранными частицами во времени.

На рисунке 3 приведено распределение скорости в цилиндрическом слое для числа Рэлея $Ra = 2,2 \cdot 10^5$.

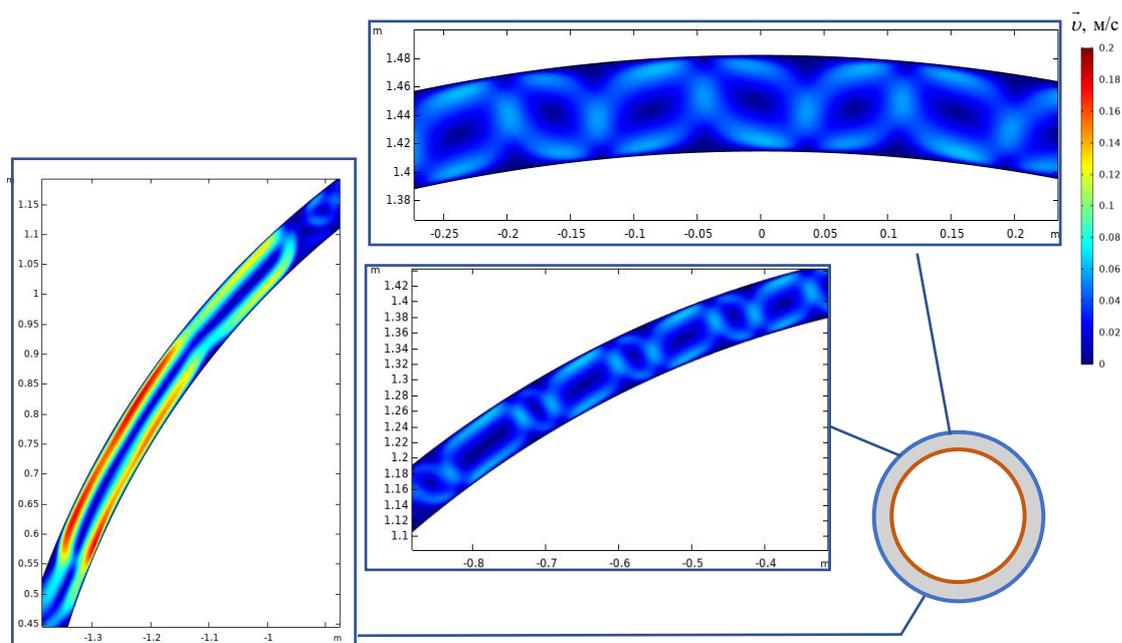


Рис. 3. Распределение скорости в различных участках цилиндрического слоя

При свободной конвекции в цилиндрическом слое систему можно разделить по характеру течения и расположению в пространстве на три области: верхняя, переходная и боковая. В верхней области наблюдается формирование устойчивых классических ячеек Бенара-Рэля, в переходной области конвективные соседние вихри в ячейках становятся асимметричны, в боковой области наблюдается течение без формирования устойчивых структур.

Путем исследования координатных зависимостей показателя Ляпунова установлено, что участок наибольшей хаотичности совпадает с визуально наблюдаемой переходной областью. Там и достигается наиболее эффективное перемешивание в системе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fedotov, A.S. Phase trajectories of fluid control volumes in a system with Benard-Rayleigh convection / A.S. Fedotov, Y.D. Tsitavets, Y. Levy // COMSOL Conference 2020 : Technical Papers and Presentations / COMSOL, Inc. – 2020.
2. Кузнецов С.П. Динамический хаос. Москва: Физматлит, 2001. 294 с.
3. Исследование конвекции Бенара-Рэля методом трассировки частиц / Я.Д. Титовец [и др.] // Учен. зап. физ. фак-та Моск. ун-та. – 2020. – № 5. – С. 2050901.

Многомерные кубатуры на последовательностях Соболя

А.А. Белов^{1,2,*}, М.А. Тинтул^{1,**}

¹119991 Москва, Ленинские горы, МГУ, физ. фак-т, Россия

²115419 Москва, ул. Орджоникидзе, 3, Российский университет дружбы народов, факультет физико-математических и естественных наук, Россия

*email: aa.belov@physics.msu.ru

**email: maksim.tintul@mail.ru

Введение. Многомерные функции встречаются в разнообразных задачах физики. Приведем некоторые примеры. В задачах газодинамики, теории упругости и других все величины зависят от трех пространственных координат. Перенос нейтронов, фотонов и других частиц в среде описывается уравнением для функции распределения; эта функция зависит от трех координат среды и трех компонент вектора скорости частицы, то есть число переменных равно шести. Для определения коэффициентов теплопроводности или электропроводности среды приходится вычислять интегралы рассеяния; в них входят компоненты векторов скоростей двух частиц до момента столкновения и после момента столкновения. Общее число переменных в таком интеграле равно двенадцати. Возникают задачи и с существенно большим числом переменных.

В простейшей постановке рассматривают вычисление интеграла в единичном p -мерном кубе V . Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ есть p -мерный вектор. Требуется найти

$$I = \int_V f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, x_2, \dots, x_p) dx_1 dx_2 \dots dx_p. \quad (1)$$

В физических задачах функция $f(\mathbf{x})$ обычно оказывается непрерывной и достаточно гладкой, то есть имеющей непрерывные производные нескольких порядков. Размерность p может быть достаточно большой, как мы видели выше. Возникает вопрос – какими методами вычислять интегралы (1).

Методы. Как известно, точность сеточных методов стремительно падает с увеличением размерности p . Для получения приемлемой точности приходится брать всё больше и больше точек, что делает расчёты непомерно трудоёмкими и очень затратными по времени. Поэтому при больших размерностях ($p > 3$) используется метод Монте-Карло (МК). Однако он предполагает использование случайных чисел, которые являются математической абстракцией. Приходится использовать последовательности, лишь имитирующие случайные числа. От выбора такой последовательности сильно зависит работоспособность метода.

Наиболее эффективными оказываются последовательности Соболя с так называемыми «магическими» числами точек $N = 2^n, n = 0, 1, \dots$ [1]. Эти точки строятся вполне неслучайным образом, однако их проекции на координатные оси дают равномерную сетку.

В данной работе получены следующие результаты. Во-первых, предложены смещённые точки Соболя – модификация, улучшающая равномерность распределения точек и повышающая точность кубатур. Во-вторых, предложена многосеточная стратегия, дающая апостериорную оценку точности.

Смещённые точки Соболя. Исходные магические точки Соболя расположены немного асимметрично. Например, среднее арифметическое проекций всех точек на любую ось не равно 0.5.

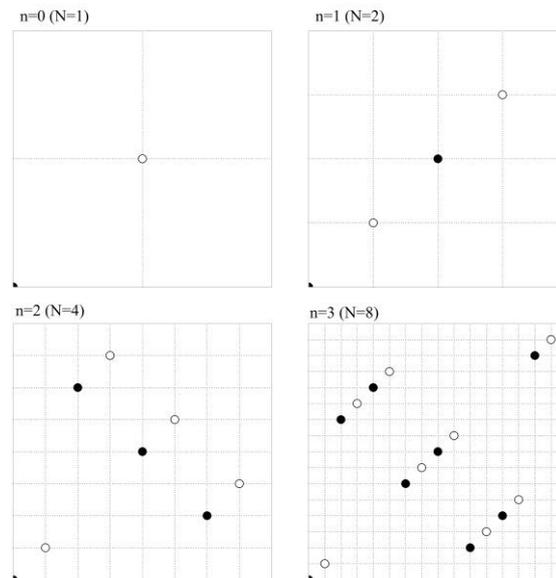


Рис. 1. Магические точки Соболя для $p = 2$: точки – несмещенные, кружки – смещенные; значения n указаны около квадратов.

Чтобы построить смещенные точки Соболя, прибавим ко всем координатам точек $1/(2N)$. Это улучшает равномерность распределения точек. В частности, среднее арифметическое проекций всех точек на любую ось точно равно 0.5. Сравнение смещенных и несмещенных точек в двумерном случае приведено на рис. 1.

Многосеточный расчет. Тестовые расчёты показывают, что фактическая погрешность убывает как $O(N^{-1})$. Выполним расчёт с магическими $N = 2^n, n = 10, 11, \dots$. В результате мы получим последовательность значений интеграла I_N .

Теперь аппроксимируем эту последовательность формулой

$$\Delta_N \approx a + bN^{-1}, \sigma_N \sim N^{-1/2}. \quad (2)$$

Здесь a – уточнённое значение интеграла, σ_a – стандартное отклонение a . Это и есть апостериорная оценка точности величины a . Коэффициенты формулы (2) определяются методом наименьших квадратов.

Сравнение методов целесообразно проводить на задачах с известным точным ответом. В качестве тестового был выбран следующий интеграл:

$$f(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^p \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi x_j}{2}, \int_V f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1, Df = \left(\frac{\pi^2}{8} \right)^p - 1. \quad (3)$$

Дисперсия достаточно медленно растёт при увеличении p . Эффективная размерность теста равна p , то есть максимальна. Поэтому тест не является легким, несмотря на внешнюю простоту.

Проведено сравнение следующих методов: произведение регулярных одномерных сеточных формул, классический метод МК с псевдослучайными точками и последовательности Соболя. Погрешность Δ_N вычислялась как разность точного и численного интегралов. Результаты расчетов показаны на рис. 2. По вертикали отложен

логарифм погрешности, по горизонтали – размерность p . Использовалась реализация точек Соболя в программе [2].

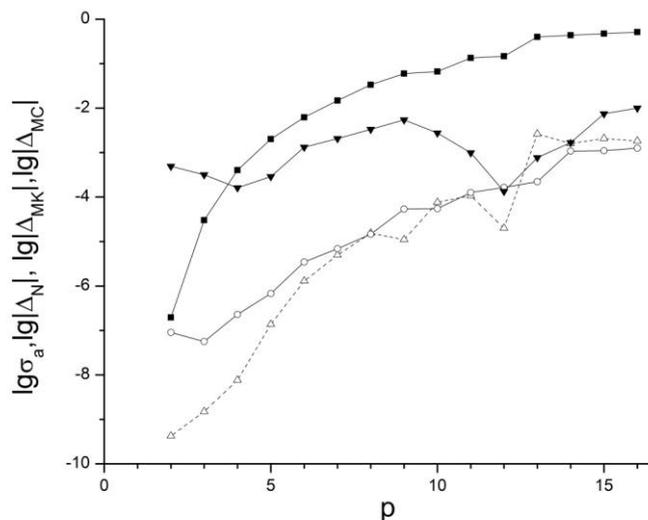


Рис. 2. Логарифмы погрешностей для $N = 2^{20}$: светлый треугольник – Δ_N для смещенных точек Соболя, кружок – стандарт σ_a для смещенных точек Соболя, черный перевернутый треугольник – Δ_N для вихря Мерсенна, черный квадратик – Δ_N для метода средних.

Метод средних дает высокую точность $\lg|\Delta_{MC}| \approx -6.7$ при $p = 2$; это много точнее классического метода МК. Однако с увеличением p погрешность быстро возрастает, и уже при $p \geq 4$ оказывается существенно больше погрешности метода МК. При еще больших размерностях метод средних быстро становится неконкурентоспособным.

Для вихря Мерсенна то величина $\lg|\Delta_{МК}|$ лежит в пределах от -4 до -2 и медленно растёт с увеличением размерности p .

Наилучший результат показывают смещенные точки Соболя. Соответствующая кривая погрешности лежит ниже всех линий на рис. 1. При $p = 2$ погрешность чрезвычайно мала: $\lg|\Delta_N|$ приблизительно равно -9.4 . Несмотря на быстрый рост погрешности с увеличением p , она всё еще мала по сравнению с другими методами. Лишь при $p = 13-16$ погрешность становится близкой к классическим методам Монте-Карло: $\lg|\Delta_N|$ приблизительно равно -2.7 .

Стандарт σ_a для смещенных точек Соболя практически совпадает с фактической погрешностью при $p \geq 6$, а при $p < 6$ является мажорантной оценкой, однако даже эта оценка существенно лучше, чем погрешность метода Монте-Карло.

Результаты работы более подробно изложены в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. И.М. Соболев «Численные методы Монте-Карло» М.: Наука, 1973.
2. URL: <https://www.broda.co.uk/software.html>
3. А.А. Белов, Н.Н. Калиткин, М.А. Тинтул // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2021, № 8.

Фрактальные свойства стохастических дендритов в процессах электроосаждения

А.В. Косырев, Ю.В. Рыжикова

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
физический факультет, Москва, Россия
leshakosyrev@gmail.com

В настоящее время активно ведётся изучение фрактальных свойств дендритоподобных объектов. Обусловлено это тем, что элементы с фрактальной структурой стали широко использоваться в различных областях науки и техники, в частности в биомедицине при диагностике и разработке новых лекарственных средств различных заболеваний, при изучении процессов самоорганизации и самосборки, при исследовании глобальной общетеоретической проблемы возникновения жизни на Земле, в нанотехнологиях при проектировке микросхем литографическими методами, при разработке природоподобных систем и др.

В предыдущих работах был предложен новый метод моделирования стохастических дендритов в процессе самоорганизации, а также выполнено его сравнение с более известными моделями баллистической агрегации (BA) и ограниченной диффузией агрегации (DLA) [1-2]. Разработанный комплекс новых оригинальных алгоритмов и программ позволяет проводить обобщенный анализ структуры дендритов и их фрактальных особенностей. Поскольку результаты фрактального и спектрального анализа показали не только соответствие, но и преимущество разработанной модели перед аналогами, отдельный интерес представляет собой анализ конкретных сфер применения метода – в том числе материалов, используемых в качестве рабочего вещества при экспериментальном получении дендритов.

Целью данной работы является анализ фрактальных свойств дендритных образований в процессах электроосаждения металлов.

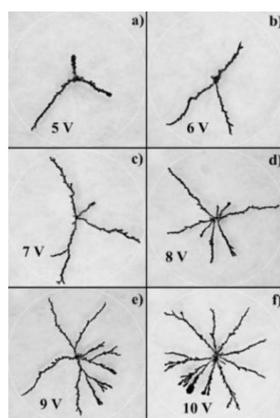


Рис. 1: Примеры экспериментально полученных дендритов электроосаждения меди для различных напряжений [3]

Одним из наиболее простых примеров фракталоподобных систем, представляющих собой вариант реализации исследуемой модели, является рост кластеров за счёт электроосаждения ионов металлов из водного раствора. Фрактальная

природа металлических структур, выращиваемых электроосаждением (рис. 1), в последние годы исследовалась в различных теоретических и экспериментальных работах [3-6] – особенно учитывая её практическое значение в процессах и технологиях нанопроизводства [7-8]. Хорошо известно, что этот необратимый процесс агрегации является результатом сложного взаимодействия между конвекцией, миграцией и диффузией, макроскопические эффекты которых в основном зависят от концентрации водного раствора, а также от приложенного напряжения [4-5].

Рассматриваемая модель не оперирует конкретными свойствами вещества, использующегося в том или ином виде при получении дендрита. Вместо таких базовых характеристик, как масса частицы, её заряд или вязкость среды, предлагается система коэффициентов, описывающая итерационные сдвиги частиц в относительных единицах, будь то общее стохастическое движение частиц или их взаимодействие. В данной работе была проведена оценка возможности и качества явного перехода от одной системы параметров к другой (от экспериментальных к модельным).

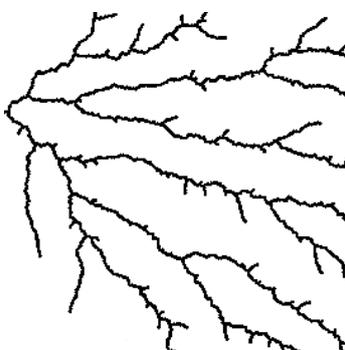


Рис. 2: Пример полученного в рамках исследуемой модели фрактального кластера

В качестве экспериментов для рассмотрения были взяты опыты [3, 9] по получению дендритов посредством электроосаждения меди и цинка. Проведено численное моделирование (рис. 2). В качестве количественной характеристики сравнения результатов использовалась фрактальная размерность. Результаты продемонстрировали качественное соответствие полученных модельных зависимостей экспериментам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.В. Рыжикова et al. // Ученые записки физического факультета Московского Университета. 2020. № 4. С. 2040301.
2. А.В. Косырев, П.В. Короленко, Ю.В. Рыжикова // Известия Российской академии наук. Серия физическая. 2021. Т. 85. № 1. С. 74.
3. N.M. Santos, D.M. Santos // Chaos, Solitons & Fractals. 2018. V. 116. P. 381.
4. F. Sagués et al. // Journal of Electroanalytical Chemistry. 1990. V. 278. P. 351.
5. P.P. Trigueros et al. // Journal of Electroanalytical Chemistry. 1991. V. 312. P. 219.
6. H. Ibrahim et al. // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2017. V. 27. № 8. P. 083111.
8. L.P. Bicelli // International Journal of Electrochemical Science. 2008. V. 3. P. 356.
9. J.R. Bruyn et al. // Physical Review. 1997. V. 56. P. 3326.
10. P. Gębaraa, M. Gębarab, A. Owczarek // Acta Physica Polonica Series A. 2020. V. 138. P. 287.

Клеточный автомат, описывающий действие топологического изолятора

В.В. Новиков¹, Д.П. Федченко^{1,2}, И.В. Тимофеев^{2,1}

¹Сибирский федеральный университет

²Институт Физики им. Л.В. Киренского СО РАН –

обособленное подразделение ФИЦ КИЦ СО РАН

work_vladimir_novikov@mail.ru

Построение абстрактных математических теорий и конкретные физические эксперименты являются сущностями неразрывными, как вдох и выдох. Идеи *топологии*, как науки о сохраняющихся свойствах материи при её непрерывной деформации, получили новые возможности применения в фотонике с момента обнаружения моделей топологических изоляторов [1], которые стали активно изучаться после открытия квантового эффекта Холла в 1980 году. Подобные структуры являются *изоляторами*, то есть не пропускают волны в свою глубину, в то же время допуская прохождение световых волн (проводящие состояния) по краю или поверхности [2]. Описание объемно-краевого соответствия двумерных систем приведено в статье [3] на квантовом языке операторов рождения и уничтожения (вторичное квантование). В обзоре [4] дается новый язык описания топологических изоляторов, обсуждается связь динамической топологической фазы двумерных топологических изоляторов с квантовыми *клеточными автоматами*.

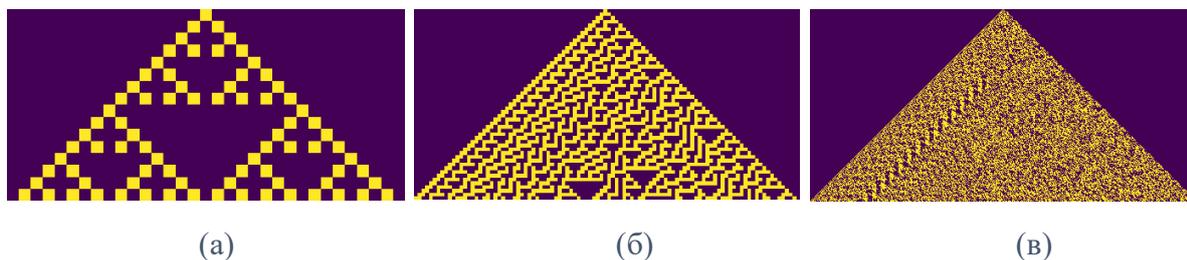


Рис. 1. (а) Правило 26 (код Вольфрама [0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0]). (б) Правило 30 (код Вольфрама [0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0]). (в) 500 шагов КА, задаваемого правилом 30.

Клеточные автоматы стали популярны после изобретения игры «Жизнь» Конвеем в 1970 году. В 1983 Вольфрам опубликовал первую из серии статей работу, посвященную классу элементарных клеточных автоматов [5]. В 2002 вышла в свет книга Вольфрама «A new kind of science» [6], которая стала настоящим манифестом клеточных автоматов. Их чарующая красота заставляет все новых и новых исследователей обращаться к этой, пока еще весьма абстрактной, области математики. При оптической реализации клеточного автомата роль светлой клетки играет резонатор, возбужденный фотоном световой волны.

В данной работе мы программно реализуем в среде Matlab двумерные и трехмерные топологические изоляторы, примеры которых изображены на рисунках 2 и 3.

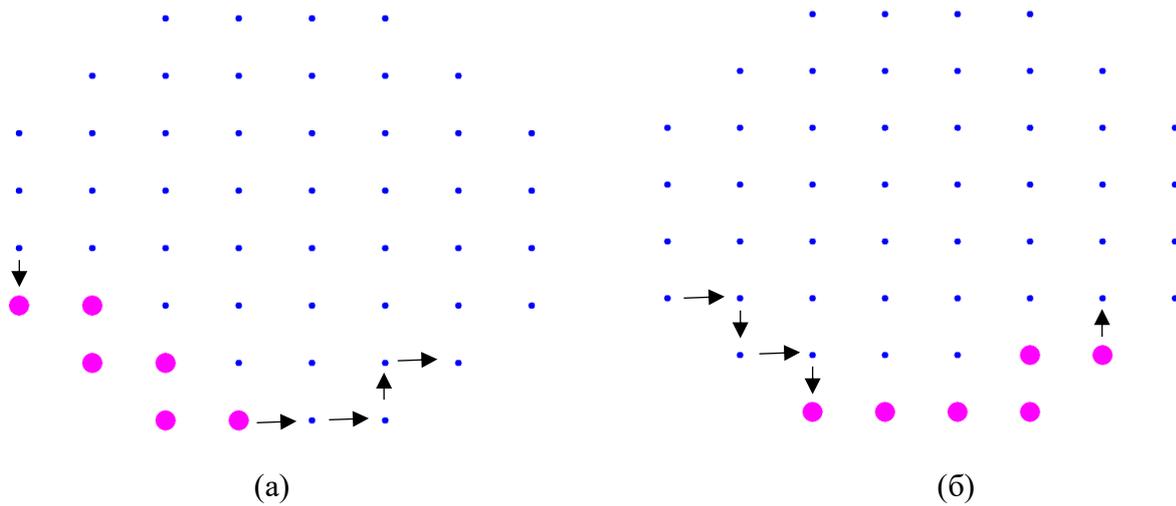


Рис. 2. (а, б) Фотоны, обозначенные розовым цветом, перемещаются по краю структуры против часовой стрелки. Синими точками обозначены оптические резонаторы топологического изолятора

Фотоны могут находиться на любом резонаторе. При этом те из них, что не на поверхности, не изображены на рисунке 2, поскольку перемещаются по циклу из четырех резонаторов и не распространяются, то есть групповая скорость волны равна нулю, дисперсионная линия в координатах волнового вектора и частоты представляет горизонтальную прямую, случай безщелевого топологического изолятора. Это правило внутренней изоляции для клеточного автомата с окрестностью Неймана при некоторых дополнительных построениях можно описать кодами Вольфрама 65280, 61680, 42428, 43690. Остальные фотоны перемещаются по краю топологического изолятора.

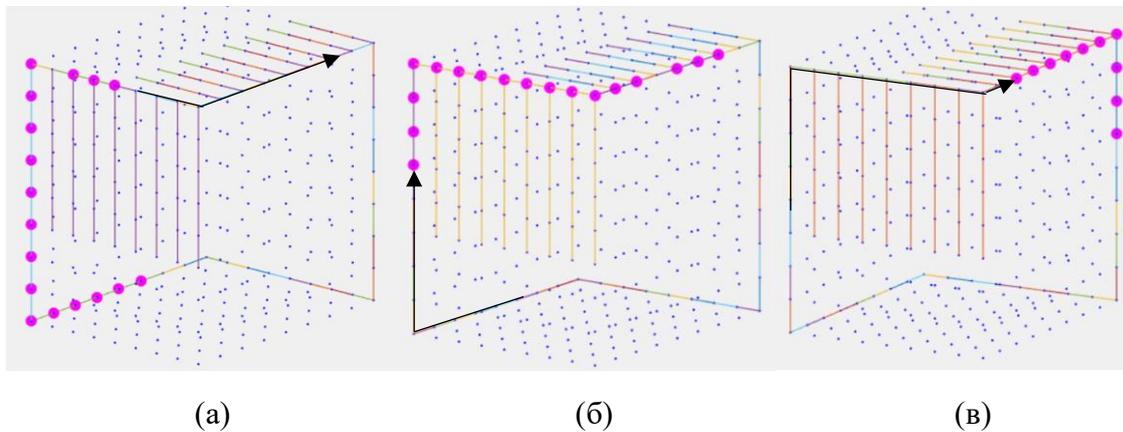


Рис.3. (а, б, в) Фотоны перемещаются по отмеченной траектории вдоль ребер кубического топологического изолятора. Тонкими линиями обозначены направления перескока фотонов между оптическими резонаторами.

В трехмерной модели ситуация аналогичная – фотоны в объеме перемещаются по циклу из шести резонаторов и также никуда не распространяются. Фотоны на некоторых гранях перемещаются в одном направлении до тех пор, пока не попадут на ребро куба топологического изолятора. Фотоны на ребрах перемещаются вдоль большого цикла из шести ребер. Количество возбужденных резонаторов может меняться ввиду того, что в различные моменты времени на одном резонаторе может помещаться различное число фотонов.

В результате работы была написана программа на языке Matlab, моделирующая движение поверхностной волны по трехмерному топологическому изолятору. Данный изолятор может быть физически реализован, например, в оптических, акустических и гидродинамических периодических массивах. Существенное достижение, по сравнению с описанием на языке операторов рождения и уничтожения, представляет интерпретация результатов на языке квантовых клеточных автоматов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lu L. et al. // Nat. Photonics. Nature Publishing Group, 2014. Vol. 8, № 11. P. 821–829.
2. M.Z. Hasan et al // Rev. Mod. Phys. 2010. Vol. 82, № 4. P. 3045–3067.
3. M.S. Rudner et al // Phys. Rev. X. 2014. Vol. 3, № 3. P. 1–15.
4. T.A. Farrelly // Quantum. 2020. Vol. 4. P. 1–59.
5. S. Wolfram // Cellular Automata and Complexity. 2019. 3–69 P.
6. S. Wolfram //Wolfram media.2002. Vol. 5. 130 P.

Влияние положения малого объекта на опоре на точность измерения его характеристик рассеяния

Н.П. Балабуха, Н.Л. Меньших

Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН
n_bala@mail.ru, n.menshikh@gmail.com

При проведении экспериментальных исследований радиофизических характеристик объект устанавливается на пилон [1] – специальное опорно-поворотное устройство, чья форма позволяет минимизировать обратное отражение. При этом могут возникать переотражения между пилоном и исследуемым объектом, что будет влиять на точность измерения его характеристик. Уменьшение этого взаимодействия важная радиофизическая проблема.

Для минимизации взаимодействий с объектом разрабатываются особые формы верхней части пилон. Например, в работе [2] рассмотрена верхняя часть пилон в виде цилиндра с радиопоглощающим покрытием. В работе [3] исследовалась пенопластовая колона оптимальной формы с точки зрения минимизации вклада в отраженное назад электромагнитное поле. Некоторые опоры, не имеющие специальной малоотражающей формы, могут быть расположены по отношению к падающей на них электромагнитной волне так, чтобы вносить минимальный вклад в характеристики рассеяния. В работах бразильских ученых [4-5] исследовалось оптимальное положение опоры при экспериментальных измерениях эффективной площади рассеяния (ЭПР) больших объектов.

При проведении экспериментальных исследований как правило используется метод замещения, в котором сигнал от объекта нормируется на сигнал от эталонного объекта с известным (рассчитанным строгим методом) значением ЭПР. В работе [6] оценена численным методом погрешность измерения ЭПР объектов, связанная с неточностью используемой калибровки.

Целью данной работы является исследование влияния взаимодействия между объектом измерения и опорой на точность полученных результатов. Строгим методом интегральных уравнений моделировалось измерение ЭПР объекта в зависимости от его положения, чтобы оценить влияние переотражений между объектом и опорой, а также влияние возмущений в распределение поля, внесенных опорой, на измеренные значения ЭПР.

Рассмотрены пилон вместе с поворотным валом и планшайбой, радиопоглощающее укрытие, призванное уменьшить вклад от верхней части пилон, а также сам объект измерения, установленный на пенопластовой опоре. Моделирование производилось с помощью программы FEKO методом моментов. На объект падает монохроматическая линейно-поляризованная плоская волна. В качестве объекта выбран сферический металлический отражатель, имеющий примерное значение ЭПР на уровне -30 дБм² при частотах около 3 ГГц. Такой отражатель рассеивает падающую волну изотропно во все направления, что позволяет обнаружить зоны потенциального взаимодействия объекта (или отдельных его частей) с пилоном. Шаг используемой сетки во всех моделированиях составлял $1/10$ длины волны. Исследования проводились в диапазоне частот 2.7 – 3.3 ГГц.

В укрытии пилон используется промышленный радиопоглощающий материал (РПМ) разных типов. Характеристики этих материалов предоставляются производителем. Радиопоглощающее укрытие состоит из материалов двух типов: материал в форме клина для укрытия поворотного вала и пирамидальный материал над ним для укрытия более широкой планшайбы. Плоские материалы моделируются слоем

диэлектрика заданной толщины. Эффективная диэлектрическая проницаемость материала для каждой исследуемой частоты известна [7], магнитная проницаемость составляет 1. Пирамидальные материалы моделируются с сохранением своей геометрии. Все материалы считаются однородными. Пилон имеет очень большие размеры, потому в модели рассматривается лишь его небольшая верхняя часть. Пенопластовая колонна также считается однородной и с постоянной диэлектрической проницаемостью во всем исследуемом диапазоне частот.

Схема модели экспериментальной установки представлена на рисунке 1. Планшайба и поворотный вал укрыты плоским РПМ, что позволяет уменьшить взаимодействие между объектом и опорой [8]. Рассмотрим четыре положения сферы на опоре: в центре, смещена в бок, смещена вперед и назад. На рисунке ниже представлена ситуация с расположением сферы со смещением назад.

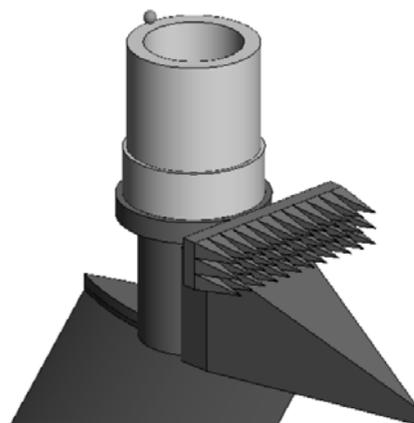


Рис. 1. Расположение объекта на опоре

Полученные значения для моделирования погрешности измерения ЭПР сферы для четырех ее положений на опоре при частоте 3 ГГц представлены в таблице 1. Из таблицы видно, что наибольшая погрешность измерений ЭПР возникает в случае, когда сфера расположена дальше от центра по направлению падения волны (сфера переместилась назад). Отметим, что данная погрешность в значении ЭПР наблюдается для случая, когда задняя плоская площадка пилонa закрыта слоем плоского РПМ. Наличие поглощающего материала не исключает полностью взаимодействие объекта с этой зоной пилонa, но значительно снижает его.

Таблица 1. Погрешности измерения ЭПР сферы в зависимости от ее положения на опоре

<i>Положение сферы</i>	<i>Погрешность ЭПР, дБ</i>
В центре	0.6 дБ
Выдвинута вперед	0.9 дБ
Выдвинута назад	1.9 дБ
Выдвинута в бок	0.5 дБ

Необходимо отметить, что положение сферы влияет не только на взаимодействие ее с верхней частью пилонa, но и на то, в каком поле происходят измерения ее ЭПР. Рассеяние на укрытии перед поворотным валом вносит неравномерность в распределение амплитуды поля, что вносит дополнительную погрешность в результаты измерения. Для объектов с размерами существенно меньше длины волны локальные неравномерности поля могут оказывать существенное влияние на измерение их характеристик, не смотря на тот факт, что ЭПР вычисляется через интегрирование токов по поверхности.

Исследовано распределение поля вблизи места нахождения объекта. Результаты этого исследования показывают, что наибольшая неоднородность поля наблюдается именно в области за осью вращения и составляет около 0,5 дБ. В области, смещенной

вперед относительно оси вращения, неоднородность поля, наоборот, минимальна. Это означает, что большая погрешность измерения ЭПР при положении объекта перед осью вращения обусловлена именно его взаимодействием с укрытием и другими элементами верхней части пилона. Но погрешность определения значений ЭПР при нахождении объекта за осью вращения вызвана в первую очередь неоднородностью поля в этом месте, создаваемой возмущением со стороны укрытия. В этом случае, конечно же, присутствует взаимодействие объекта с пилоном тоже.

Таким образом, на точность измерения ЭПР объекта влияет взаимодействие объекта с пилоном и положение объекта на опоре. Взаимодействие объекта с опорой может давать существенную погрешность измерения (порядка 2 дБ при уровнях -30 дБ). Отметим, что данные результаты можно распространить на протяженные объекты имеющие локальные центра рассеяния.

ЛИТЕРАТУРА

1. E.F. Knott "Radar cross section measurements" Springer Science & Business Media, 2012.
2. J.A. Berri, G.L. Wilson, "Design of target support columns using EPS foam," IEEE Antennas and Propagation Magazine, 2003, vol. 45, no.1, pp. 198–206.
3. P. Chen, X. Xu, Y. Jiang. "Comparison of methods to extract target scattering from scattering of target-metal pylon combination," 2014 International Radar Conference, Lille, France, 13-17 Oct. 2014.
4. Alves M. A., Peixoto G. G and Rezende M. C., " Orientation of a support pylon used in radar cross section measurements", 2007 SBMO/IEEE MTT-S International Microwave and Optoelectronics Conference, Oct. 2007, Salvador, Brazil.
5. M.A.S. Miacci; I.M. Martin; M.C. Rezende. "Radar cross section measurements of complex targets (missile parts) in C-band in anechoic chamber", 2007 SBMO/IEEE MTT-S International Microwave and Optoelectronics Conference, Oct. 2007, Salvador, Brazil.
6. P.S.P. Wei, A.W. Reed, C.N. Ericksen, R.K. Schuessler. "Measurements and Calibrations of Larger Squat Cylinders," IEEE Antennas and Propagation Magazine, 2009, vol. 51, no.2, pp. 205-212.
7. V.N. Semenenko, V.A. Chistyayev, A.A. Politiko, et al. "Test Stand for Measuring the Free-Space Electromagnetic Parameters of Materials over an Ultrawide Range of Microwave Frequencies" Meas. Tech. 62, 161–166 (2019). <https://doi.org/10.1007/s11018-019-01601-5>
8. Н.П. Балабуха, Н.Л. Меньших "Исследование влияние взаимодействия пилонa с объектом измерения на точность результатов" Сборник тезисов докладов двадцатой ежегодной научной конференция ИТПЭ РАН. — ИТПЭ РАН Москва, 2019. С. 36–37.

Фрактальные свойства хиральных дендритов

Д.Д. Ружицкая, Ю.В. Рыжикова

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
физический факультет
dariaruzh@yandex.ru

В настоящее время активно ведется изучение различных свойств дендритных структур. Обусловлено это тем, что элементы такой формы стали широко использоваться в различных областях науки и техники. В частности, в биомедицине при диагностике различных заболеваний. Сильно разветвленные дендритные структуры часто проявляются в таких процессах как рост колоний бактерий, пробой диэлектрика, ячейке Хеле-Шоу, росте жидких кристаллов, электроосаждении и др. [1-4]. Дендриты относятся к отдельной группе фракталоподобных структур, которые не обладают фрактальностью пространственных Фурье-спектров [4]. Целью данной работы является оценка фрактальных характеристик хиральных дендритных структур и анализ особенностей их формирования.

В настоящей работе реализован алгоритм формирования дендритов, представляющий собой модификацию классической модели Т. Виттена и Л. Сандера «диффузия, ограниченная агрегацией (ДОА)» [5], учитывающий особенности влияния внешнего магнитного поля на рост кластера.

Тщательный анализ экспериментальных дендритных структур [3, 6] указывает на то, что в классической модели ДОА отсутствуют важные физические составляющие. Например, наличие внешнего магнитного поля приводит к резкому изменению морфологии кластеров [3, 6], они приобретают спиральную форму, как показано на рис. 1. Хиральность дендритных структур определяется внешним полем, а направление закручивания противоположно направлению приложенного поля.

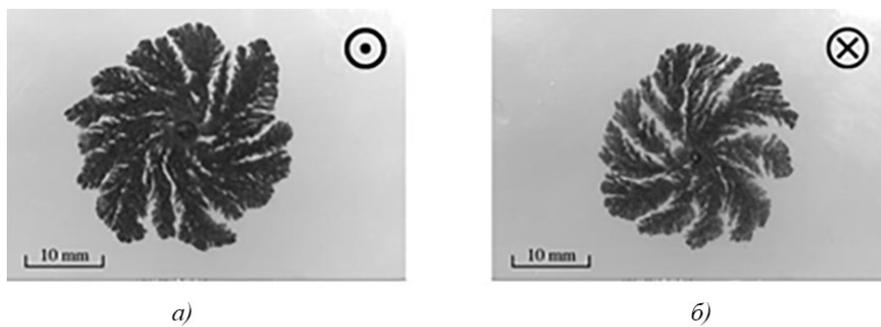


Рис. 1. Кластеры $ZnSO_4$, выращенные под действием внешнего магнитного поля 0,35 Т: а) поле приложено вертикально вверх; б) поле приложено вертикально вниз [3].

Разработанная модель имеет следующие условия роста. В центр ячейки роста (её форма выбрана круглой) помещается затравочная частица. Далее, на значительном расстоянии R_{gen} ($R_{gen} = 2048d$, d – диаметр одной частицы) выпускается новая частица. Эта частица может свободно перемещаться по ячейке в любом направлении с шагом $S = 10d$, пока расстояние между блуждающей частицей и частицами в кластере $R > 512d$. Как только это расстояние станет меньше, частица перейдет на меньший шаг ($S = 0.1d$) и на нее будут действовать присоединенные к кластеру частицы. Так как рост кластера происходит в фиксированной ячейке, частица не может выйти за её пределы и при столкновении со стенкой она «отскакивает» в другом направлении.

Движение заряженных частиц под влиянием магнитного поля описывается изменением направления движения, относительно предыдущего шага. На рис. 2(а)

показана схема модели. Для упрощения, показаны четыре фиксированных направления перемещения одной частицы. Под действием магнитного поля на заряженные частицы действует сила Лоренца с параметром θ . Для оптимизации работы программы, отклонение движения частицы от ожидаемого рассчитывается для каждых 100 шагов движения частицы. Чтобы задать отклонение движения, на каждом 100-м шаге перемещения частицы рассчитывается её возможное направление движения с учетом предыдущих шагов (пунктирная линия и параметр α на рис. 2(а)). Вместо ожидаемого положения на этом шаге частица отклоняется от текущей траектории на угол θ . Направление отклонения определяется направлением приложенного магнитного поля (в представленной реализации рассматриваются случаи поля, приложенного перпендикулярно ячейке, в которой происходит рост).

В остальных случаях направление движения определяется минимальным изменением энергии:

$$\Delta U = U_i - U_j, \quad (1)$$

где U_i – энергия частицы в текущем положении, U_j – энергия, которую приобретет частица при перемещении. Энергия частицы складывается из двух составляющих: потенциальной энергии Кулоновского взаимодействия и энергии дипольного взаимодействия частиц.

На рис. 2(б) приведен кластер, выращенный в ячейке, к которой было приложено внешнем поле 0,2 Т.

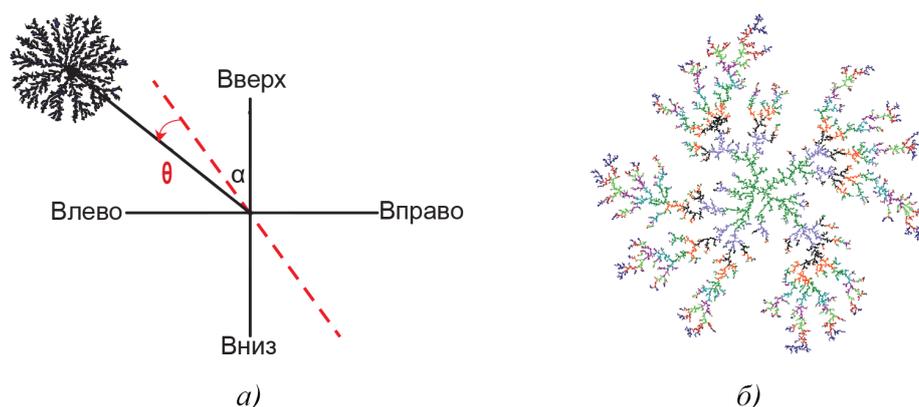


Рис. 2. а) Иллюстрация алгоритма роста кластера: α – текущий угол движения частицы, θ – отклонение, определяемое силой Лоренца; б) кластер, выращенный в рамках представленной модели, содержащий 10 000 частиц при приложенном магнитном поле 0,2 Т.

Анализ смоделированных дендритных систем проводился путем привлечения элементов фрактальной параметризации. Количественная оценка самоподобных свойств дендритов осуществлялась на основе определения фрактальной размерности разными методами (Фурье, клеточный, кластерный) и области скейлинга [4, 7-8]. Алгоритмы, реализующие расчет фрактальной размерности, были протестированы на строгих математических фракталах, таких как: фрактал Вичека, снежинка Коха, множество Жулиа и др. [8-9].

Суть клеточного метода состоит в разбиении объекта исследования на участки (клетки) и подсчета занятых кластером ячеек. Размер ячеек меняется от большего к меньшему. При этом, минимальный размер ячейки определяется минимальным размером в кластере, т.е. минимальным размером частицы в нем. Затем производится построение структурной функции в двойном логарифмическом масштабе, как число

занятых ячеек в зависимости от размера одной ячейки. Фрактальная размерность D_{cell} определяется по наклону полученной структурной функции [8].

При определении фрактальной размерности кластерным способом дендрит покрывается концентрическими окружностями различного диаметра и внутри каждой ведется подсчет частиц. Фрактальная размерность D_{mass} определяется по наклону структурной функции, построенной в двойном логарифмическом масштабе [10].

Алгоритм определения фрактальной размерности с помощью Фурье-преобразования состоит из следующих этапов: 1) Фурье-преобразование кластера; 2) получение спектра мощности (рис. 3(а)); 3) построение структурной функции в двойном логарифмическом масштабе (рис. 3(б)); 4) определение фрактальной размерности:

$$D_f = (6 - \beta_f) / 2, \quad (2)$$

где D_f – фрактальная размерность объекта, β_f – угол наклона структурной функции. Отметим, что оценка фрактальной размерности с помощью Фурье-преобразования дает заниженное значение, по сравнению с другими способами определения фрактальности [8-9]. Так, для дендрита, показанного на рис. 2(б) значение клеточной размерности составило 1,74, а Фурье-методом 1,70.

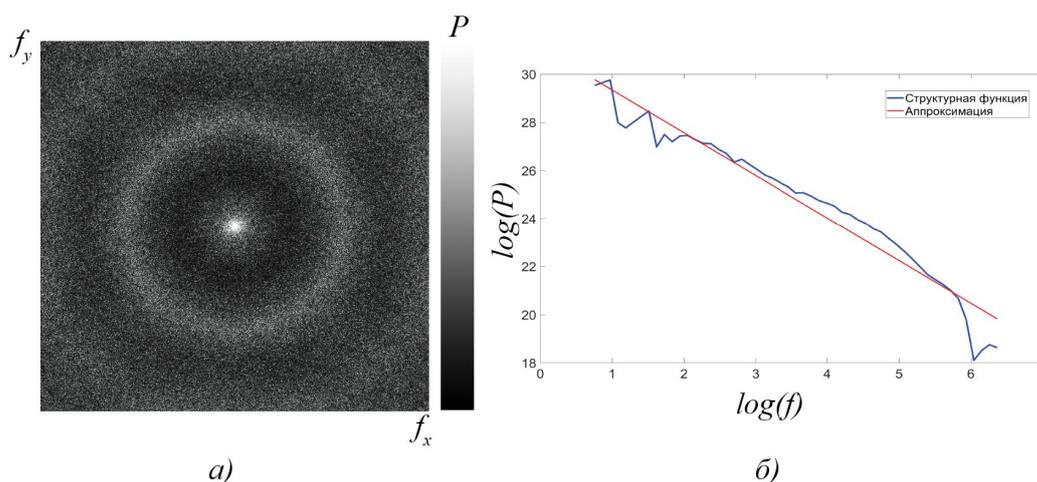


Рис. 3. Иллюстрация определения фрактальной размерности Фурье-методом: а) Спектр мощности, полученный в результате Фурье-преобразования дендрита с рис. 2(а), вид сверху; б) структурная функция спектра мощности (синяя линия): по горизонтальной оси отложен логарифм частоты, по вертикальной логарифм мощности. Красным показана аппроксимация структурной функции.

Результаты исследования дендритов, выращенных при различной величине приложенного внешнего магнитного поля приведены на рис. 4. В случае, когда магнитное поле отсутствует, в рамках предложенной модели образуется кластер с массовой фрактальной размерностью $D_{mass} = 1,71$, что согласуется с известными литературными данными [5, 7]. Оценки, полученные другими методами, имеют несколько отличающиеся значения, что обусловлено способом деления структуры.

Однако, при приложении магнитного поля и изменении морфологии кластера все рассмотренные методы определения фрактальной размерности демонстрируют чувствительность. Как показано в экспериментальной работе [6], а также на рис. 4, при наличии слабого поля, дендритные кластеры не имеют выраженной хиральности, и их внешний вид близок к классической модели ДОА. При увеличении приложенного поля, ветви кластера начинают закручиваться по спирали, а в некоторых случаях способны вырождаться в игольчатые структуры. И эти изменения находят отражение в

изменении фрактальной размерности. Имеется тенденция к её росту при увеличении приложенного внешнего поля. Это обусловлено тем, что при закручивании ветви кластера начинают занимать большее пространство ячейки, в которой осуществляется процесс роста.

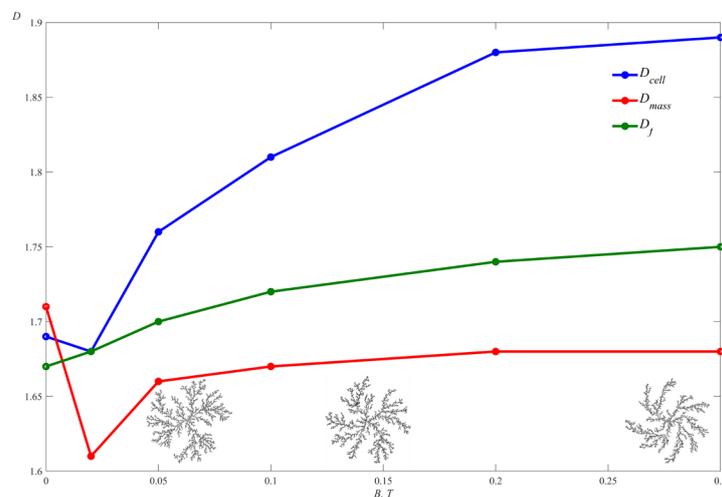


Рис.4. Изменение фрактальной размерности кластеров полученных при различном значении приложенного внешнего магнитного поля: B – величина приложенного магнитного поля, T ; D_{cell} – фрактальная размерность, определяемая клеточным способом; D_{mass} – кластерная фрактальная размерность; D_f – фрактальная размерность, определённая с помощью Фурье-преобразования. Данные усреднены по 5 реализациям кластеров. На вставках показано изменение морфологии кластеров при увеличении приложенного внешнего магнитного поля B .

Таким образом, предложенная в работе модель позволяет описывать и исследовать дендритные кластеры, обладающие хиральными свойствами. Фрактальная параметризация дендритов позволяет оценить влияющие на процесс роста факторы. Этот результат может быть использован для диагностики дендритных структур различной природы на основе фрактального анализа. Проведенное исследование показывает, что изменение фрактальной размерности кластера может служить маркером для определения начальных условий роста дендрита.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Tokita et. all. // J. Phys. Soc. Jpn. 2009. V. 78. P. 074005.
2. F. Ciuchi et. all. // Eur. Phys. J. E. 2009. V. 29. P. 139.
3. T.R. Ní Mhíocháin et. all. // Electrochim. Acta. 2004. V. 49. P. 4813.
4. D.D. Ruzhitskaya, Yu.V. Ryzhikova, S.B. Ryzhikov. // Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys. 2018. V. 82. No 11. P. 1375.
5. T.A. Witten, P. Meakin. // Phys. Rev. B. V. 1983. 28. P. 5632.
6. S. Bodea, R. Ballou, P. Molho. // Phys. Rev. E. 2004. V. 69. P. 021605.
7. P. Meakin. “Fractals, Scaling and Growth Far from Equilibrium”. Cambridge University Press. 1998.
8. J.S. Russ. “Fractal Surfaces”. Springer US. 1994.
9. J.B. Florindo, O.M. Bruno. // Chaos Solitons Fractals. 2011. V. 44. Iss. 10. P. 851.
10. J. Feder. “Fractals”. Springer US. 1988.

Уменьшение влияния дифракционных эффектов на бистатистические характеристики рассеяния материала за счет использования специальных конфигурации образцов

Гильмутдинов Р.В.¹, Фёдоров С.А.², Меньших Н.Л.²

¹ МФТИ

² ИТПЭ РАН

E-mail: Gilmutdinov.rv@phystech.edu

В последнее время все больший интерес вызывают бистатистические свойства рассеяния объектов. В связи с этим, увеличивается интерес и к изучению бистатистических свойств материалов, создаются новые измерительные стенды [1] для проведения экспериментальных исследований рассеивающих свойств объектов.

Для плоского образца чьи линейные размеры составляют несколько длин волн могут наблюдаться существенные отличия между измеренными характеристиками рассеяния и аналитическими значениями для бесконечного слоя материала. Это связано с дифракционными эффектами на краях, такими как рассеяние волны на ребре, излучением ползучих волн [2] и др. Влияние этих эффектов определяется размером, формой и материалом образцов. При этом на самой экспериментальной установки имеются свои ограничения по возможности измерения, связанные с размерами рабочей зоны и рабочим диапазоном частот.

Целью настоящей работы является исследование уменьшения влияния краевых эффектов на измеряемые значения модуля коэффициента отражения (МКО) материала путем изменения конфигураций образцов. Для этого предложены несколько вариантов конфигураций образцов модельного материала одного размера и формы. Исследования рассеивающих свойств образцов проводились методом моментов в программе FEKO. Результаты численных экспериментов сравнивались между собой, а также с аналитическим расчетом по формулам Френеля [3] для бесконечного слоя материала.

Экспериментальные значения характеристик рассеяния, в том числе и МКО, обычно определяются методом замещения. На исследуемый объект падает плоская линейно-поляризованная волна. Для каждого угла падения волны измеряется поле в дальней зоне, зеркально отраженное от объекта. Помимо исследуемого образца объектом является калибровочная металлическая пластина такого же размера для нормировки полученного сигнала.

В своей работе мы исследуем образцы в форме оживала, поскольку данная геометрия оптимальна (на ряду с некоторыми другими формами) для измерения методом замещения [4]. В качестве материала используется модельный магнитодиэлектрик без частотной дисперсии.

На рис. 1 представлены схемы четырех конфигураций плоских образцов в сечении. Для уменьшения влияния излучения ползучих волн предполагается укрывать обратную сторону образца радиопоглощающим материалом (РПМ). Для снижения дифракционного рассеяния на ребре можно покрывать ребра образца исследуемым материалом. На рис. 1а представлена традиционная конфигурация образца. В конфигурации “Обертка” (рис. 1б) нормировочная пластина представляет собой металлическую пластину в форме оживала размером 38x15.5 см, а в качестве исследуемого образца выступает пластина, со всех сторон покрытая материалом. Конфигурация “Губка” (рис. 1в) предполагает укрытие обратной стороны образца с материалом и нормировочной пластины слоем РПМ. Конфигурация “Гибрид” (рис. 1г) представляет собой симбиоз двух обозначенных конфигураций. Нормировочный объект представляет собой металлическую пластину, покрытую с обратной стороны

слоем РПМ, а исследуемый образец покрыт со всех сторон материалом и с обратной стороны дополнительно укрыт слоем РПМ.

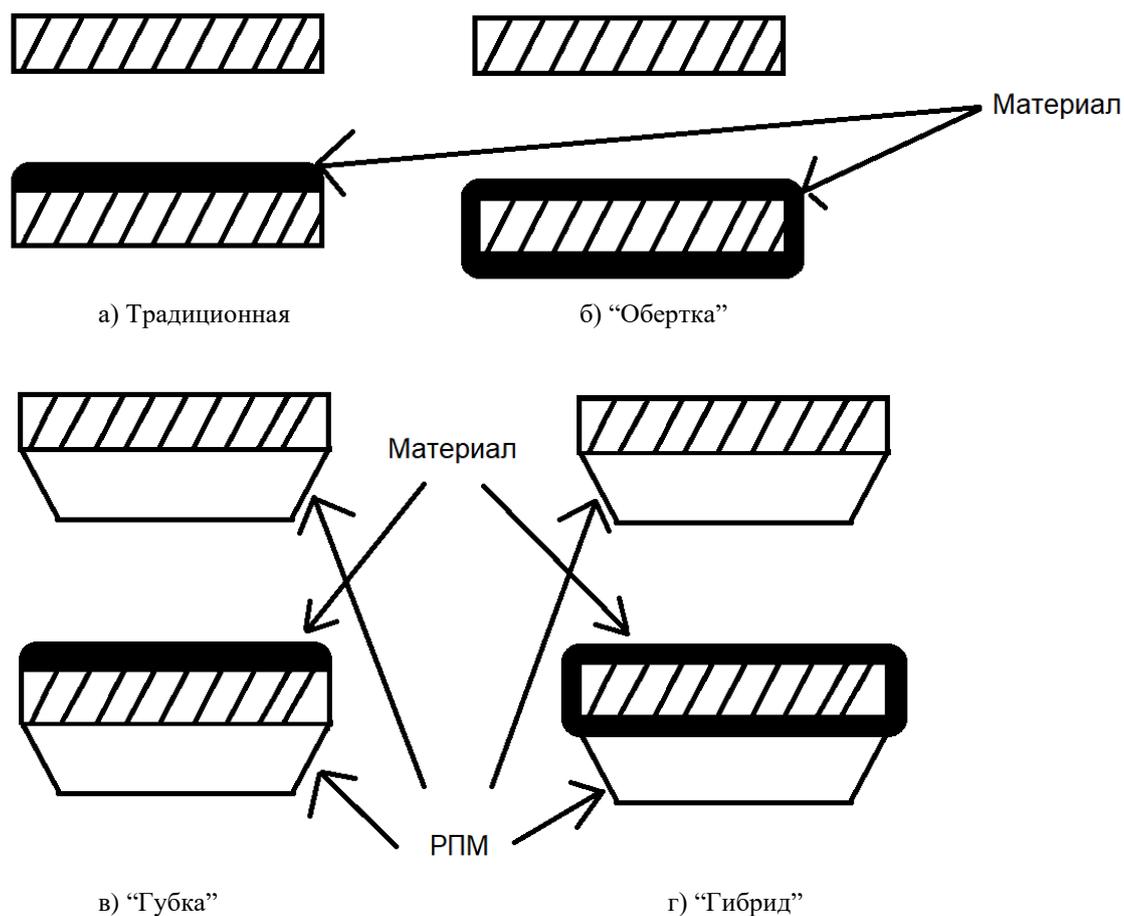


Рисунок 1. Схемы конфигураций образцов в сечении

Результаты численного моделирования показали, что в области малых углов нанесение материала на ребра и обратную сторону образца позволяет существенно увеличить точность измерения значений МКО. В области больших углов необходимо наличие слоя РПМ на обратной стороне образца. Таким образом наилучшей конфигурацией является «Гибрид» как совокупность конфигураций «Обертка» и «Губка».

Применение представленных выше конфигураций образцов позволяет уменьшить влияние дифракционных эффектов, увеличить точность измерений значений МКО.

ЛИТЕРАТУРА

1. Saleh H., Geffrin J.-M., Eyraud C., Tortel H. "Upgrading the settings of a microwave experimental setup for better accuracy in bistatic radar cross section measurement" 2017 Mediterranean Microwave Symposium (MMS).
2. Балабуха Н.П., Зубов А.С., Солосин В.С. "Компактные полигоны для измерения характеристик рассеяния" М., Россия: Наука, 2007.
3. Бреховских Л.М. "Волны в слоистых средах" М.: Наука, 1973. 503 с.
4. Кобак В.О. "Радиолокационные отражатели" Советское радио, 1975. 212 с.

Анализ влияния пространственной дисперсии на поля металлодиэлектрических наноструктур методом Дискретных источников

А.С. Пензарь

МГУ им. М.В. Ломоносова, Физический факультет, кафедра математики
sashapenzar@yandex.ru

Благодаря плазмонным эффектам, которые являются следствием гибридизации между поверхностными зарядами и электромагнитными полями, стало возможным получать сверхвысокое усиление поля и его концентрацию в объемах, на порядки превышающих рэлеевский предел разрешающей способности оптического оборудования [1]. В результате появился широкий спектр практических приложений, таких как наноразмерные фотонные схемы, оптические усилители, спектроскопия комбинационного рассеяния поверхности, биосенсирование и др. Когда размеры частиц сравнимы с длиной волны Ферми, возникает эффект нелокальности. Одной из моделей, рассматривающих подобные нелокальные эффекты, является модель обобщенного нелокального оптического отклика (ОНОО) [2], которая и используется в данной работе для описания поведения полей. В рамках этой модели зависящее от размера затухание плазмона возникает естественным образом, благодаря дополнительной составляющей гидродинамического описания индуцированных зарядов в металле, а именно, коэффициенту диффузии электронов.

При уменьшении размеров частиц до десятков нанометров, электрон-электронные взаимодействия в наноструктурах требуется учитывать гораздо строже. Когда характерный размер частицы становится сравнимым с длиной волны Ферми электронов в металле (5нм для золота и серебра), возникает так называемая пространственная дисперсия металла. В этом случае обычных локальных материальных соотношений, включенных в систему уравнений Максвелла, оказывается недостаточно для строгого описания электромагнитных свойств металла. Суть пространственной дисперсии заключается в том, что связь между смещением $\mathbf{D}(\mathbf{M})$ и электрическим полем $\mathbf{E}(\mathbf{M})$ становится нелокальной:

$$\mathbf{D}(\mathbf{M}) = \varepsilon(\mathbf{M})\mathbf{E}(\mathbf{M}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D}(\mathbf{M}) = \int \varepsilon(\mathbf{M} - \mathbf{M}')\mathbf{E}(\mathbf{M}')d\mathbf{M}'.$$

Следствием эффекта нелокальности (ЭН) является появление внутри металла продольных электромагнитных полей. Таким образом электрическое поле внутри металла перестает быть чисто поперечным ($\text{div } \mathbf{E}^T=0$) за счет формирования объемного заряда и возникает необходимость дополнительного притяжения продольных полей ($\text{rot } \mathbf{E}^L=0$), которые в случае биметаллической частицы могут возникать как внутри ядра, так и внутри оболочки.

Рассмотрим задачу дифракции плоской Р-поляризованной электромагнитной волны на биметаллическом бесконечном цилиндре в однородной изотропной среде D_0 . Запишем полную математическую постановку рассматриваемой задачи дифракции, воспользовавшись основным уравнением для напряженности электрического поля в плазмонной среде, условиями излучения и необходимыми граничными условиями [2,3]:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H}_i(\mathbf{M}) &= ik[\varepsilon_{T_i}\mathbf{E}_i(\mathbf{M}) + \xi_i^2 \text{grad div } \mathbf{E}_{L_i}(\mathbf{M})], & \text{rot } \mathbf{H}_0(\mathbf{M}) &= ik\varepsilon_0\mathbf{E}_0(\mathbf{M}), \\ \text{rot } \mathbf{E}_i(\mathbf{M}) &= -ik\mu_i\mathbf{H}_i(\mathbf{M}), & \text{rot } \mathbf{E}_0(\mathbf{M}) &= -ik\mu_0\mathbf{H}_0(\mathbf{M}), \\ \mathbf{E}_i(\mathbf{M}) &= \mathbf{E}_{T_i}(\mathbf{M}) + \mathbf{E}_{L_i}(\mathbf{M}), \quad \mathbf{M} \in D_i, & \mathbf{E}_0(\mathbf{M}) &= \mathbf{E}^S(\mathbf{M}) + \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{M}), \quad \mathbf{M} \in D_0, \\ \mathbf{n}_P \times [\mathbf{E}_2(\mathbf{P}) - \mathbf{E}^S(\mathbf{P})] &= \mathbf{n}_P \times \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{P}), & \mathbf{n}_P \times [\mathbf{H}_2(\mathbf{P}) - \mathbf{H}^S(\mathbf{P})] &= \mathbf{n}_P \times \mathbf{H}^{inc}(\mathbf{P}), \\ \mathbf{n}_P \cdot \varepsilon_{L_2}\mathbf{E}_2(\mathbf{P}) &= \mathbf{n}_P \cdot \varepsilon_0\mathbf{E}_0(\mathbf{P}), & \mathbf{P} &\in S_2, \\ \mathbf{n}_P \times [\mathbf{E}_1(\mathbf{P}) - \mathbf{E}_2(\mathbf{P})] &= 0, & \mathbf{n}_P \times [\mathbf{H}_1(\mathbf{P}) - \mathbf{H}_2(\mathbf{P})] &= 0, \end{aligned}$$

$$\left[\frac{1}{\omega_{p_2}^2} (\text{rot } \mathbf{H}_2 + i\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{L_2} \mathbf{E}_2) \times \mathbf{n}_P \right] = \left[\frac{1}{\omega_{p_1}^2} (\text{rot } \mathbf{H}_1 + i\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{L_1} \mathbf{E}_1) \times \mathbf{n}_P \right],$$

$$v_{F_2}^2 \varepsilon_{L_2} \text{div } \mathbf{E}_2 = v_{F_1}^2 \varepsilon_{L_1} \text{div } \mathbf{E}_1, \quad P \in S_1$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} [\sqrt{\varepsilon_0} \mathbf{E}^S(M) \times \frac{\mathbf{r}}{r} - \sqrt{\mu_0} \mathbf{H}^S(M)] = 0, \quad r = |M| \rightarrow \infty,$$

$\{\mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H}^{\text{inc}}\}$ - поле падающей волны, $\{\mathbf{E}^S, \mathbf{H}^S\}$ - рассеянное поле в D_0 , $\{\mathbf{E}_{0,i}, \mathbf{H}_{0,i}\}$ - полное поле в каждой из областей $D_{0,i}$, $i = 1, 2$. ε_0, μ_0 - материальные характеристики среды D_0 .

Параметры, относящиеся к полю \mathbf{E}_L определяются из ОНОО следующим образом:

$$\varepsilon_{L_i} = \varepsilon_{T_i} - \frac{\omega_{p_i}^2}{-\omega^2 + i\gamma_i \omega}, \quad k_{L_i}^2 = \frac{\varepsilon_{L_i}}{\xi_i^2}, \quad \xi_i = \varepsilon_{L_i} \frac{(\beta_i^2 + D_i(\gamma_i + i\omega))}{(\omega^2 + i\gamma_i \omega)},$$

где ω_p - плазменная частота металла, γ - частота столкновений электронов, ω - частота колебания электромагнитного поля, β - гидродинамическая скорость в плазме, связанная со скоростью Ферми: $\beta^2 = \frac{3}{5}(v_F)^2$, D - коэффициент диффузии электронов.

В качестве внешнего возбуждения в данной работе рассматривается плоская Р-поляризованная волна (вектор \mathbf{E}^{inc} лежит в плоскости падения волны), распространяющаяся вдоль оси x декартовой системы координат:

$$\mathbf{E}^{\text{inc}}(M) = \mathbf{e}_y e^{-ik_0 x}, \quad \mathbf{H}^{\text{inc}}(M) = n_0 \mathbf{e}_z e^{-ik_0 x}.$$

Здесь $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ - базис декартовой системы координат, $n_0^2 = \varepsilon_0 \mu_0$. Пусть $\text{Im } \varepsilon_T, \text{Im } \varepsilon_L > 0$ и все среды являются немагнитными. Предполагается также, что выбрана временная зависимость $e^{-i\omega t}$. Тогда будем полагать, что граничная задача дифракции с внешним возбуждением имеет единственное решение.

Задача дифракции на круговом цилиндре допускает аналитическое решение, тогда как задачу дифракции на эллиптическом цилиндре необходимо решать численно. Одним из наиболее подходящих численных методов является Метод дискретных источников (МДИ). В данной работе реализованы оба случая. Для начала рассмотрим и аналитически построим решение задачи дифракции на круговом цилиндре, затем применим МДИ. Для МДИ также проведем анализ влияния вытянутости частицы на поглощение энергии. В конце сравним результаты и проанализируем влияние пространственной дисперсии.

В случае аналитического решения электромагнитное поле можно представить через векторные гармоники и составить систему линейных уравнений для неизвестных коэффициентов p на основе граничных условий [4]:

$$\mathbf{E}^{\text{inc}}(M) = \mathbf{e}_y e^{-ik_0 x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i}{k_0} i^n \mathbf{M}_n^I(k_0 r), \quad \mathbf{M}_n^I(k_0 r) = \nabla \times [\mathbf{e}_z J_n(k_0 r) e^{in\varphi}].$$

$$\mathbf{H}^{\text{inc}} = \frac{1}{\omega \mu_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \mathbf{N}_n^I(k_0 r), \quad k_0 \mathbf{N}_n^I = \nabla \times \mathbf{M}_n^I$$

$$\mathbf{E}_{T_2} = \mathbf{E}_{T_2}^+ + \mathbf{E}_{T_2}^- = \frac{i}{k_{T_2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_S^+ i^n \mathbf{M}_n^{T+}(k_{T_2} r) + \frac{i}{k_{T_2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_S^- i^n \mathbf{M}_n^{T-}(k_{T_2} r),$$

$$\mathbf{M}_n^{T+}(k_{T_2} r) = \nabla \times [\mathbf{e}_z H_n^{(2)}(k_{T_2} r) e^{in\varphi}], \quad \mathbf{M}_n^{T-}(k_{T_2} r) = \nabla \times [\mathbf{e}_z H_n^{(1)}(k_{T_2} r) e^{in\varphi}]$$

$$\mathbf{H}_{T_2} = \mathbf{H}_{T_2}^+ + \mathbf{H}_{T_2}^- = \frac{1}{\omega \mu_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_S^+ i^n \mathbf{N}_n^{T+}(k_{T_2} r) + \frac{1}{\omega \mu_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_S^- i^n \mathbf{N}_n^{T-}(k_{T_2} r),$$

$$k_0 \mathbf{N}_n^{T+} = \nabla \times \mathbf{M}_n^{T+}, \quad k_0 \mathbf{N}_n^{T-} = \nabla \times \mathbf{M}_n^{T-}$$

$$\mathbf{E}_{T_1} = \frac{i}{k_{T_1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_i i^n \mathbf{M}_n^T(k_{T_1} r), \quad \mathbf{M}_n^T(k_{T_1} r) = \nabla \times [\mathbf{e}_z J_n(k_{T_1} r) e^{in\varphi}],$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{T_1} &= \frac{1}{\omega\mu_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_i i^n \mathbf{N}_n^T(k_{T_1} r), \quad k_0 \mathbf{N}_n^T = \nabla \times \mathbf{M}_n^T. \\ \mathbf{E}^S &= \frac{i}{k_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_e i^n \mathbf{M}_n^S(k_0 r), \quad \mathbf{M}_n^S(k_0 r) = \nabla \times [\mathbf{e}_z H_n^{(1)}(k_0 r) e^{in\varphi}], \\ \mathbf{H}^S &= \frac{1}{\omega\mu_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_e i^n \mathbf{N}_n^S(k_0 r), \quad k_0 \mathbf{N}_n^S = \nabla \times \mathbf{M}_n^S. \\ \mathbf{E}_{L_2} &= \mathbf{E}_{L_2}^+ + \mathbf{E}_{L_2}^- = \frac{i}{k_{L_2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_L^+ i^n \mathbf{L}_n^{L^+}(k_{L_2} r) + \frac{i}{k_{L_2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_L^- i^n \mathbf{L}_n^{L^-}(k_{L_2} r), \\ \mathbf{E}_{L_1} &= \frac{i}{k_{L_1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_L i^n \mathbf{L}_n^L(k_{L_1} r), \quad \mathbf{L}_n^L(k_{L_1} r) = \nabla [J_n(k_{L_1} r) e^{in\varphi}].\end{aligned}$$

Далее, решив систему уравнений и определив коэффициенты p_e , найдем полные сечения рассеяния и экстинкции по следующим формулам:

$$\sigma_{ext} = -\frac{2}{\pi k_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2n+1) \operatorname{Re}(p_e), \quad \sigma_{sca} = \frac{2}{\pi k_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2n+1) |p_e|^2$$

Перейдем к построению приближенного решения граничной задачи дифракции на металлическом эллиптическом цилиндре с полуосями a, b ($\mathbf{b} \uparrow \mathbf{e}_x$), руководствуясь схемой МДИ для Р-поляризованного излучения. Запишем падающую волну в следующем виде:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{inc}(M) &= (-\mathbf{e}_x \sin \varphi_0 + \mathbf{e}_y \cos \varphi_0) e^{-ik_0(x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0)}, \\ \mathbf{H}^{inc}(M) &= -n_0 \mathbf{e}_z e^{-ik_0(x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0)}.\end{aligned}$$

Запишем представления полей, удовлетворяющие системе уравнений Максвелла и условиям излучения, с помощью системы дискретных источников $\{M_n\}$ [5]:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_T^N &= \sum_{n=1}^N p_n^T \left(\operatorname{rot}(\mathbf{e}_z J_0(k_T R_{MM_n})) \right), \quad \mathbf{H}_i^N = \sum_{n=1}^N p_n^T \left(\frac{1}{k_T} \operatorname{rot} \operatorname{rot}(\mathbf{e}_z J_0(k_T R_{MM_n})) \right), \\ \mathbf{E}_L^N &= \sum_{n=1}^N p_n^L \left(\operatorname{grad}(\mathbf{e}_z J_0(k_T R_{MM_n})) \right), \quad \mathbf{E}_S^N = \sum_{n=1}^N p_n^e \left(\operatorname{rot}(\mathbf{e}_z H_0^{(1)}(k_T R_{MM_n})) \right), \\ \mathbf{H}_S^N &= \sum_{n=1}^N p_n^e \left(\frac{1}{k_e} \operatorname{rot} \operatorname{rot}(\mathbf{e}_z H_0^{(1)}(k_T R_{MM_n})) \right), \quad R_{MM_n} = \sqrt{(x-x_n)^2 + (y-y_n)^2}.\end{aligned}$$

Определив из граничных условий амплитуды дискретных источников с помощью метода коллокаций, легко вычислить диаграмму направленности, которая определяется следующим образом [2,5]:

$$\frac{\mathbf{E}_S^N(M)}{|\mathbf{E}^{inc}(M)|} = \mathbf{F}(\varphi) \cdot \frac{e^{-ik_e r}}{\sqrt{r}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \rightarrow \infty,$$

И на её основе вычислим полное сечение рассеяния:

$$\sigma_{sca} = \int_{\Omega} |F(\varphi)|^2 d\Omega.$$

Результаты моделирования для биметаллического цилиндра, состоящего из золота и серебра, в аналитическом случае показывают, что учет влияния эффектов нелокальности оказывает значительное влияние на интенсивность рассеяния и незначительное влияние на положение максимума плазмонного резонанса (рис. 1).

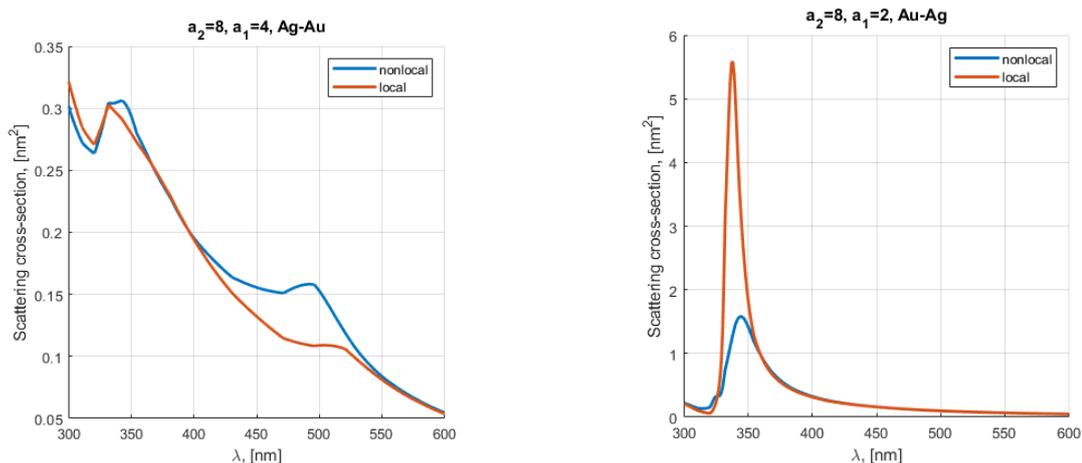


Рис. 1. Зависимость полного сечения рассеяния от длины падающей волны при разных размерах и составах частиц.

В случае анализа рассеяния на металлическом цилиндре установлено, что в случае некругового цилиндра деформация может существенно влиять на положение и амплитуду плазмонного резонанса (рис. 2).

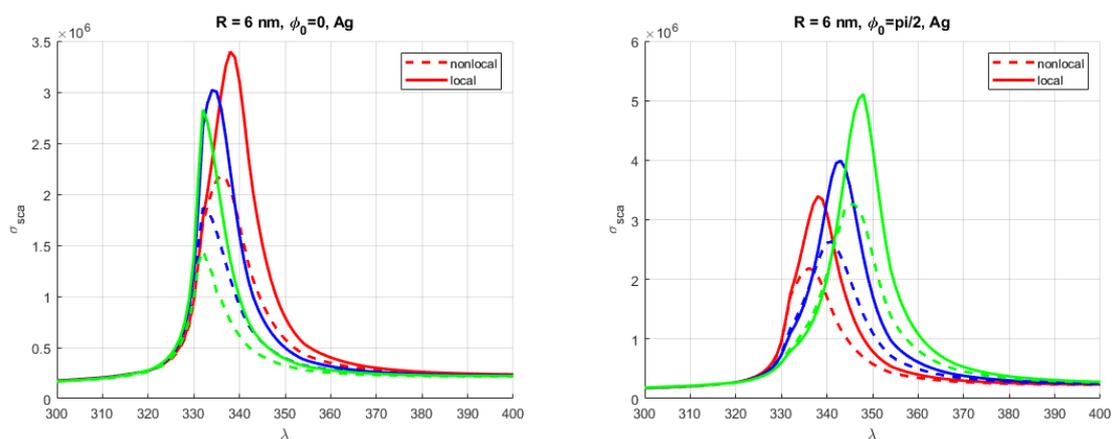


Рис. 2. Красный – $r = 1$, синий – $r = 1.25$, зеленый – $r = 1.5$; $r = b/a$.

Таким образом, для анализа рассеяния электромагнитных волн на плазмонном двухслойном наночилиндре была предложена вычислительная схема на основе аналитического решения, учитывающая эффект нелокальности в рамках теории обобщенного нелокального оптического отклика, а также схема для локального случая. Также была предложена вычислительная схема метода дискретных источников для анализа рассеяния электромагнитных волн на плазмонном металлическом эллиптическом цилиндре для локального и нелокального случая. Данные примеры наглядно демонстрируют важность учета вклада ЭНЛ в спектральные характеристики рассеяния.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект 20-01-00558).

ЛИТЕРАТУРА

1. В.В. Климов «Наноплазмоника» М.: Физматлит, 2009.
2. Ю.А. Еремин, А.Г. Свешников // ЖВМиМФ. 2021. Т. 61. № 4. С. 580-607.
3. A.D. Boardman, R. Ruppin // Surface Science. 1981. V. 112, No 1-2. P. 153-167.
4. S. Raza «Plasmonic Nanostructures: A Hydrodynamic Approach» DTU Fotonik. 2011.
5. Ю.А. Еремин, А. Г. Свешников // Вестник МГУ. Сер. 3. 2016. № 5. С. 31-36.

Исследование сингулярности электромагнитного поля вблизи ребра цилиндра с двуугольником в сечении

М.М. Шушарин, И.Е. Могилевский

Кафедра математики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова
nirashush1999@gmail.com

Проведение экспериментов по отражению электромагнитных волн от различных объектов на открытых полигонах часто бывает затруднено. В таких случаях исследования проводятся в закрытых помещениях, где имитируются условия открытого пространства. Такие помещения называются безэховыми камерами. Они создаются так, чтобы максимально уменьшить отражение волн от стен. Однако оборудование, необходимое при проведении эксперимента, также может вносить помехи в измерения. В частности, пилон — подставка, на которой размещается исследуемый объект, имеет специфическую (оживальную) форму, подобранную из соображений геометрической оптики. Он представляет собой наклонный цилиндр с двуугольником (фигура, образованная пересечением двух кругов) в сечении. Для увеличения точности измерений требуется учесть вклад, вносимый в электромагнитное поле подставкой. Известно, что наличие рёбер на границе может привести к возникновению особенности у электромагнитного поля в их окрестности [1].

В данной работе пилон предполагается бесконечным цилиндром с двуугольником в сечении, на который под углом падает плоская гармоническая волна произвольной поляризации. На границе цилиндра поставлены либо условия идеальной проводимости, либо условия Щукина-Леонтовича. Проводится теоретическое исследование электромагнитного поля в окрестности ребра цилиндра вышеописанной формы. При этом используется метод построения асимптотического представления решения в окрестности особой точки границы, впервые предложенный В.А. Кондратьевым [2].

Для условий идеальной проводимости полное поле можно представить как суперпозицию полей электрического и магнитного типа. Поэтому, учитывая гармоническую зависимость поля от времени и от вертикальной координаты, рассматриваемую задачу можно свести к двум двумерным краевым задачам для уравнения Гельмгольца. На бесконечности для дифрагированного поля справедливы условия Зоммерфельда. На границе для поля электрического типа справедливы условия Дирихле, для поля магнитного типа — условия Неймана. На бесконечности дифрагированное поле удовлетворяет условию Зоммерфельда. Для полей электрического и магнитного типа соответственно постановка задачи примет следующий вид:

$$\begin{cases} \Delta E_z + k^2 E_z = 0 \\ E_z|_{\partial\Omega} = 0 \\ \frac{\partial E_z^{(s)}}{\partial r} - ikE_z^{(s)} = \bar{o}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta H_z + k^2 H_z = 0 \\ \frac{\partial H_z}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0 \\ \frac{\partial H_z^{(s)}}{\partial r} - ikH_z^{(s)} = \bar{o}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right). \end{cases} \quad (1)$$

Для импедансных условий поля электрического или магнитного типа могут существовать отдельно только в случае падения волны под прямым углом к оси цилиндра. В противном случае рассмотреть отдельно две поляризации не удаётся.

Для выделения особенности поля вводится нормированное функциональное пространство, предложенное в работах В.А. Кондратьева [2]. Метод, используемый в работе, изначально был разработан для эллиптических дифференциальных уравнений в областях с коническими точками. В настоящей работе он применяется для двумерного случая. Основная проблема применения метода к построению сингулярной части

электромагнитного поля состоит в специфике уравнений Максвелла, сложности области и граничных условий.

Сначала рассматривается задача для случая сектора в поперечном сечении идеально проводящего пилона. Решение представляется в виде суммы сингулярной части и гладкой добавки, для которой получена оценка в норме соответствующего функционального пространства.

Для случая идеальной проводимости полученное представление решения имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} E_z(r, \varphi) &= \sum_{0 < \frac{\pi n}{\alpha} < 2} C_n r^{\frac{\pi n}{\alpha}} \sin \frac{\pi n \varphi}{\alpha} + R_E(r, \varphi), \\ H_z(r, \varphi) &= \sum_{0 < \frac{\pi n}{\alpha} < 2} C_n r^{\frac{\pi n}{\alpha}} \cos \frac{\pi n \varphi}{\alpha} + R_H(r, \varphi), \end{aligned} \quad (2)$$

где α - угол раствора сектора.

На угле сектора сингулярная часть поля обращается в ноль, но уже её первая производная стремится к бесконечности, а именно через первые производные вертикальной выражаются горизонтальные компоненты поля.

Для того, чтобы свести задачу в области вне двуугольника к задаче в секторе, используется дробно-линейное преобразование. Как известно, оно переводит прямые и окружности в прямые и окружности, а также сохраняет углы. Главная часть уравнения Гельмгольца не изменится, но правая будет домножена на гладкий в нуле коэффициент, связанный с заменой координат. Поэтому оценка для правой части останется прежней. Однородные граничные условия Дирихле и Неймана не изменятся. В новых переменных вид решения будет тем же, что и в бесконечном секторе.

В случае импедансных граничных условий переменные не разделяются. Поэтому удобнее в граничных условиях выразить все горизонтальные компоненты поля через вертикальные и оставить в левой части только нормальную производную, обозначив правую часть за неизвестную неоднородность. Используя стандартные приёмы, можно свести неоднородную задачу Неймана к однородной [3]. При этом в правой части уравнения Гельмгольца появятся новые слагаемые, которые ухудшат оценку для правой части. Дробно-линейное преобразование не изменит оценки правой части. Из-за этого в сингулярной части решения будет выделено меньше слагаемых, а оценка для гладкой добавки станет слабее. Однако, главная особенность поля будет той же, что и для случая идеальной проводимости.

Полученное представление решения может быть использовано для повышения скорости сходимости численных методов при математическом моделировании безэховой камеры. Поскольку сингулярная часть поля благодаря полученному представлению аппроксимируется точно, проблема сводится к аппроксимации гладкой части.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Г. Свешников, И.Е. Могилевский, Избранные математические задачи теории дифракции, Физический Факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2012.
2. В.А. Кондратьев, Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками, Труды Московского Математического Общества, т.16, 1967, с. 227-313.
3. А. Г. Свешников, А. Н. Боголюбов, В. В. Кравцов, Лекции по математической физике, Физический Факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 1993

Математическое моделирование дифракции электромагнитной волны на зеркале со скруглёнными краями в векторном случае

С.С. Новикова¹, Д.А. Коняев^{1,2}

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра Математики

²Институт теоретической и прикладной электродинамики Российской академии наук (ИТПЭ РАН)
sofnovik@gmail.com

Для решения задач радиолокации и маскировки требует подробного изучения характеристик рассеяния плоской электромагнитной волны для различных объектов [1]. С этой целью применяются компактные полигоны, одной из основных частей которых является коллиматор [1,2]. На сегодняшний день типичным коллиматором является зеркало в виде несимметричного выреза параболоида вращения [1]. Дифракционные эффекты, образующие на кромке зеркала, могут существенно исказить поле в рабочей зоне [3]. Существует два основных способа борьбы с дифракцией на краях параболического зеркала [4]. Это построение зазубренной кромки на зеркале и скругление кромки зеркала. В работах [2]-[4] показано, что зеркало со скругленной кромкой дает более качественный и точный результат.

Данная работа посвящена разработке программы, позволяющей решать задачу дифракции на зеркале со скругленными краями в трёхмерном векторном случае. Эффективным подходом к решению задачи дифракции на идеально проводящих телах является сведение краевой задачи для уравнений Максвелла к интегральному уравнению и поиск численного решения этого уравнения [5].

Для упрощения в данной работе было выбрано симметричное зеркало. При этом сразу рассматривается полная векторная постановка задачи без упрощений, связанных с симметрией. Такое условие позволяет перейти к рассмотрению несимметричного зеркала, разработав лишь алгоритм его триангуляции. Зеркало является поверхностью вращения кривой. Она состоит из АВ – дуги параболы; АС, ВD – скруглений на основе дуг эллипса; CD – дуги эллипса, замыкающая фигуру в области тени [6]. Кривая представлена на Рис. 1.



Рис. 1. Образующая кривая параболического зеркала со скруглениями

Для триангуляции параболического зеркала со скругленными краями в настоящей работе применяется прямой метод [7]. Генерация сетки на поверхности производится при помощи параметрического пространства [8], так как поверхность удобно задать параметрически [6]. Прямой метод в данном случае является наиболее подходящим, так как класс рассматриваемых поверхностей сильно ограничен. В прямых методах сетка строится за один шаг, и координаты всех узлов, как и связи между узлами, известны заранее. Главные преимущества прямых методов – скорость работы и надежность. Сетка строится при минимальной затрате ресурсов, так как её топология определяется некоторым набором правил [8].

Рассмотрим задачу дифракции на идеально проводящем теле. Внутри тела электромагнитное поле равно нулю. Поле вне тела удовлетворяет уравнениям

Максвелла. Будем рассматривать установившейся режим с временной зависимостью $e^{j\omega t}$. Как известно, в таком случае вне области металлического тела вектор напряженности электрического поля можно представить в виде [9]:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^s + \mathbf{E}^i = \mathbf{E}^i - j\omega\mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\Phi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S, \quad (1)$$

где \mathbf{E} – полное поле вне рассеивателя, \mathbf{E}^s – рассеянное поле, \mathbf{E}^i – падающая волна, ω – круговая частота, j – мнимая единица, $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ – векторный потенциал, $\Phi(\mathbf{r})$ – скалярный потенциал.

Обозначим поверхность рассеивателя буквой S . Также обозначим за \mathbf{n} внешнюю единичную нормаль к поверхности S . Тогда векторный и скалярный потенциал можно представить в виде [9]:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} dS, \quad (2)$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \sigma(\mathbf{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} dS, \quad (3)$$

где μ – магнитная проницаемость, ϵ – диэлектрическая проницаемость, \mathbf{J} – поверхностная плотность тока, σ – поверхностная плотность заряда, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ – расстояние между наблюдателем и точкой на поверхности S .

Поверхностная плотность распределения зарядов σ связана с поверхностным током \mathbf{J} через уравнение непрерывности:

$$\nabla_s \mathbf{J} = -j\omega\sigma, \quad (4)$$

где ∇_s – оператор поверхностной дивергенции.

Воспользуемся граничным условием на поверхности идеально проводящего тела S :

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s)|_S = 0 \quad (5)$$

Подставляя (1) в (5) и используя (2), (3) и (4), получаем интегральное уравнение для поверхностной плотности тока \mathbf{J} на поверхности зеркала S :

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}^i = \mathbf{n} \times \left(\frac{j\mu\omega}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} dS - \nabla \frac{1}{4\pi\epsilon j\omega} \int \nabla_s \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \frac{e^{-jkR}}{R} dS \right) \quad (6)$$

В общем случае аналитическое решение этого уравнения получить невозможно, следовательно, будем его решать численно с использованием метода моментов. Будем использовать базисные функции Рао-Вильтона-Глиссона [4]:

$$\mathbf{f}_n(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{l_n}{2A_n^+} \boldsymbol{\rho}_n^+, & \mathbf{r} \in T_n^+ \\ \frac{l_n}{2A_n^-} \boldsymbol{\rho}_n^-, & \mathbf{r} \in T_n^- \\ 0, & \mathbf{r} \notin T_n^+ \cup T_n^- \end{cases} \quad (7)$$

где T_n^+ , T_n^- – пара соседних треугольников с площадью A_n^+ , A_n^- соответственно, имеющие общее ребро с номером n и длиной l_n ; $\boldsymbol{\rho}_n^+ = \mathbf{r}_n^+ - \mathbf{r}$, $\boldsymbol{\rho}_n^- = \mathbf{r} - \mathbf{r}_n^-$ (\mathbf{r}_n^+ , \mathbf{r}_n^- – радиусы-вектор свободной вершины в треугольниках T_n^+ , T_n^- соответственно)

Поверхностный ток \mathbf{J} приближается линейной комбинации базисных функций \mathbf{f}_n со скалярными коэффициентами I_n :

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N I_n \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) \quad (8)$$

Коэффициенты I_n находятся из системы линейных алгебраических уравнений.

Реализованная программа протестирована при помощи точного решения задачи дифракции плоской волны частотой 3 ГГц на идеально проводящей сфере радиуса 2,5 см. Проведено сравнение поверхностных токов, посчитанных численно и аналитически. При приближении поверхности сферы треугольной сеткой состоящей из 768 треугольников ошибка поверхностных токов в сеточной норме L_2 составляет 2.1 %. При увеличении числа треугольников до 3072 ошибка в сеточной норме L_2 составляет 0.8 %. При дальнейшем увеличении числа треугольников до 6912 в сеточной норме L_2 составляет 0.5%. То есть со сгущением сетки ошибка токов на поверхности уменьшается.

На Рис.2 представлено распределение квадрата модуля комплексной амплитуды вектора напряжённости электрического поля в плоскости OXY при облучении параболического зеркала со скругленными краями высотой ≈ 12 м плоской волной частотой 150МГц. На аналогичном зеркале была решена задача дифракции для поля точечного источника с частотой 150МГц, расположенного в фокусном расстоянии зеркала (Рис.3). В результате численных расчётов на расстоянии от 9 и 15 метров образовалось поле, похожее на поле плоской волны.

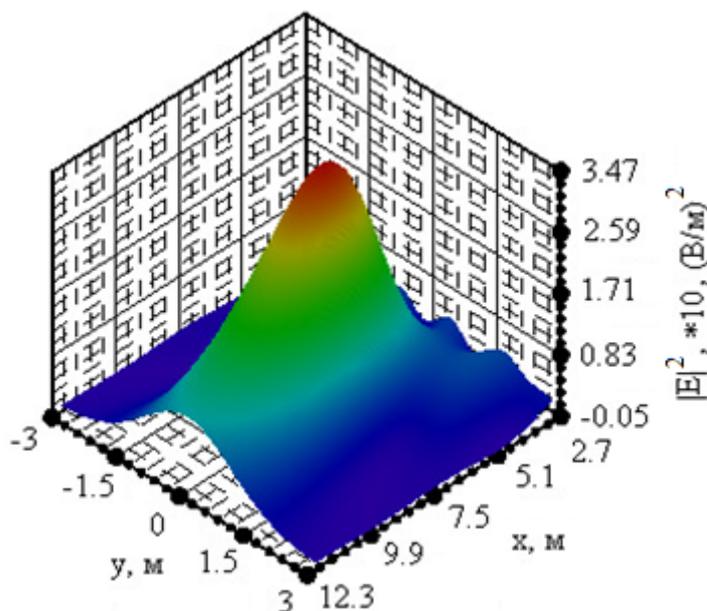


Рис. 2 . Распределение квадрата модуля вектора \mathbf{E}^s (рассеянного поля) в плоскости OXY при дифракции плоской волны частотой 150 МГц на зеркале со скругленными краями.

В результате проделанной работы был реализован численный алгоритм для решения задачи дифракции электромагнитных волн на зеркале со скругленными краями в векторном случае. Получены токи на поверхности параболического зеркала со скругленными краями и поле в ближней зоне при дифракции плоской волны и поля точечного источника. В дальнейшем для получения полей максимально приближенных к полю плоской волны в ближней зоне зеркала следует перейти к задаче синтеза зеркал со скругленными краями, используя представленную программу в качестве подпрограммы построения численного решения прямой задачи.

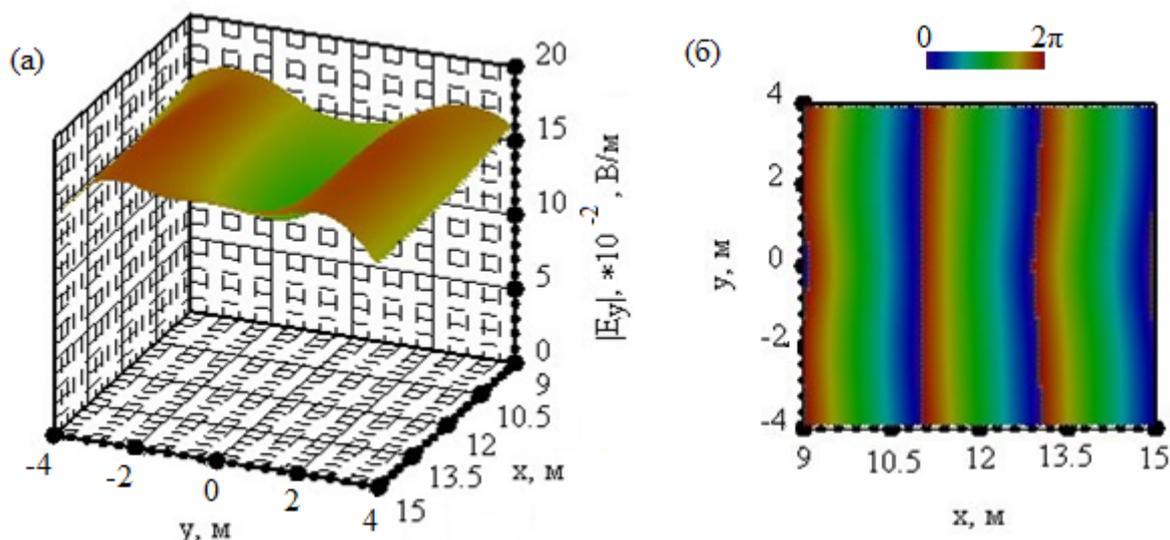


Рис. 3. Распределение E_y^s в плоскости OXY при дифракции поля точечного источника с частотой 150 МГц на зеркале со скругленными краями: (а) модуль; б) фаза (синий цвет соответствует значению фазы равной 0, красный 2π)

ЛИТЕРАТУРА

1. Балабуха Н. П., Зубов А. С., Солосин В. С. Компактные полигоны для измерения характеристик рассеяния объектов. – 2007.
2. Lee T. H., Burnside W. D. Performance trade-off between serrated edge and blended rolled edge compact range reflectors //IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 1996. – Т. 44. – №. 1. – С. 87-96.
3. Burnside W. et al. Curved edge modification of compact range reflector // IEEE transactions on antennas and propagation. – 1987. – Т. 35. – №.2. – С. 176-182.
4. Pistorius C., Burnside W. An improved main reflector design for compact range applications //IEEE transactions on antennas and propagation. – 1987. – Т. 35. – №. 3. – С. 342-347.
5. Rao S., Wilton D., Glisson A. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape //IEEE Transactions on antennas and propagation. – 1982. – Т. 30. – №. 3. – С. 409-418.
6. Боголюбов А. Н. и др. Математическое моделирование электромагнитного поля в рабочей зоне компактного полигона //Физические основы приборостроения. – 2018. – Т. 7. – №. 2. – С. 54-60.
7. Pascal Jean Frey, Paul-Louis George. Mesh Generation: Application to Finite Elements // HERMES Science Europe Ltd, 2000
8. Галанин М.П., Щеглов И.А. Разработка и реализация алгоритмов трёхмерной триангуляции сложных пространственных областей: прямые методы // Препринты ИПМ им. МВ Келдыша. 2006. № 10.
9. Стрэттон Д. А. Теория электромагнетизма/Дж. А. Стрэттон //М.: Гостехиздат. – 1948. – Т. 539.

Математическое моделирование электромагнитного поля в рабочей зоне конической безэховой камеры

Н.П. Балабуха¹, А. Д. Сахно², Н.Е. Шапкина^{1,2}

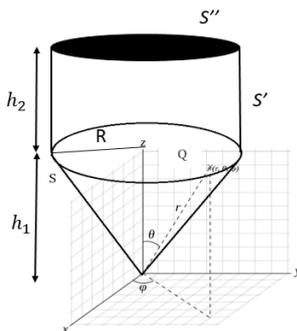
¹ Институт теоретической и прикладной электродинамики Российской академии наук (ИТПЭ РАН)

² Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики

sakhno.ad18@physics.msu.ru

Компактный полигон – это измерительный комплекс, позволяющий проводить физическое моделирование рассеяния электромагнитных волн в помещении безэховой камеры. Безэховая камера представляет собой помещение, стены которого не отражают радиоволны, для чего их покрывают радиопоглощающим материалом [1]. В компактном полигоне в рабочей зоне безэховой камеры формируется электромагнитное поле, близкое к полю плоской волны.

В данной работе анализируется структура электромагнитного поля в рабочей зоне камеры, исследуется, насколько оно близко к полю плоской волны. Рассматривается камера, состоящая из конической и цилиндрической частей, как показано на рисунке.



Параметры системы:

Высота конуса – 3 м.

Углы раствора конуса γ - 15°, 20°, 30°.

Поверхность конуса считается идеально проводящей, источник (электрический диполь) расположен на оси конуса на расстоянии 0.3м от вершины конуса перпендикулярно его оси.

Математическая постановка задачи.

Поле внутри конуса удовлетворяет уравнениям

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{E} = ik\mathbf{H} \\ \text{rot } \mathbf{H} = -ik\mathbf{E} \end{array} \right. \text{ в } Q : \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \theta < \gamma, 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ 0 < z < h_1 \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \rho < R, 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ h_1 \leq z < h_1 + h_2 \end{array} \right\},$$

за исключением области источника излучения ($r = r_0$), и граничным условиям:

$$E_\varphi = 0, E_r = 0 \text{ на поверхности конуса } S;$$

$$E_\varphi^1 = E_\varphi^2, E_z^1 = E_z^2, E_\rho^1 = \varepsilon E_\rho^2 \text{ на боковой поверхности цилиндра } S';$$

$$E_\varphi^1 = E_\varphi^2, E_z^1 = \varepsilon E_z^2, E_\rho^1 = E_\rho^2 \text{ на крышке цилиндра } S''.$$

Здесь индексы 1 и 2 означают внешнюю и внутреннюю поверхности камеры, причем цилиндрическая часть покрыта радиопоглощающим материалом, который моделируется слоем диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε .

Допустимыми в рабочей зоне будем считать неравномерность распределения амплитуды поля не более 1,5 дБ и неравномерность фазы не более 10° .

Оптимальным расположением области, в которой находится рабочая зона, будем считать ту, в центре которой максимальна площадь прямоугольника, перпендикулярного оси конуса, для которого неоднородности амплитуды и фазы поля являются допустимыми [2].

Для определения оптимального расположения плоскости (оптимальной плоскости) ищется максимум функции:

$\Phi = S(z)$, где $S = \pi r^2$ – площадь прямоугольника, перпендикулярного оси конуса, для которого неоднородности амплитуды и фазы поля являются допустимыми. Сначала моделирование отдельно проводится для конической части камеры, при этом получены следующие результаты.

Найдено положение оптимальной плоскости рабочей зоны $z_0 = 3.175$ м для частоты 300 МГц и угла раствора 15° . Размер сечения рабочей зоны оптимальной плоскостью составил $0,73 \text{ м} \times 0,52 \text{ м}$. Поле представлено на рис. 1. Как видно из графиков, неоднородность поля в Н плоскости значительно выше, чем в Е плоскости.

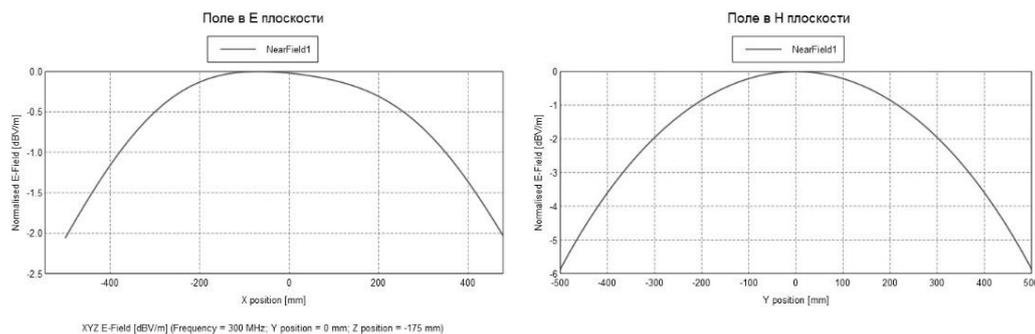


Рис.1.

Для частоты 700 МГц и угла раствора 15° найдено положение оптимальной плоскости для центра рабочей зоны $z_0 = 3$ м. Размер сечения рабочей зоны оптимальной плоскостью составил $0,65 \text{ м} \times 0,52 \text{ м}$.

Было найдено положение оптимальной плоскости рабочей зоны $z_0 = 3.245$ м для частоты 300 МГц и угла раствора конуса 20° . Размер сечения рабочей зоны оптимальной плоскостью составил $0,96 \text{ м} \times 0,88 \text{ м}$.

Также было найдено положение оптимальной плоскости для центра рабочей зоны $z_0 = 3.335$ м для частоты 300 МГц и угла раствора 30° . Размер сечения рабочей зоны оптимальной плоскостью составил $1,11 \text{ м} \times 0,73 \text{ м}$.

Затем была добавлена цилиндрическая часть камеры, поверхность которой покрыта диэлектриком с заданной диэлектрической проницаемостью.

Была добавлена цилиндрическая часть радиусом 0.81 м и высотой 1 м, покрытая изнутри диэлектриком с $\epsilon = 1.32 + 1.15i$. Было рассмотрено влияние данной

цилиндрической части на однородность поля при $z_0 = 3.175\text{м}$ для частоты 300 МГц и угла раствора конуса 15° :

При толщине диэлектрика 0.05 м величина сечения рабочей зоны оптимальной плоскостью составила $0,84\text{м} \times 0,54\text{м}$. Поле представлено на рис. 2. Как видно из графиков, неоднородность поля в обеих плоскостях уменьшилась.

При толщине слоя диэлектрика 0.1 м величина сечения рабочей зоны оптимальной плоскостью составила $0,84\text{м} \times 0,62\text{м}$.

При дальнейшем увеличении толщины слоя диэлектрика величина сечения рабочей зоны оптимальной плоскостью не изменяется.

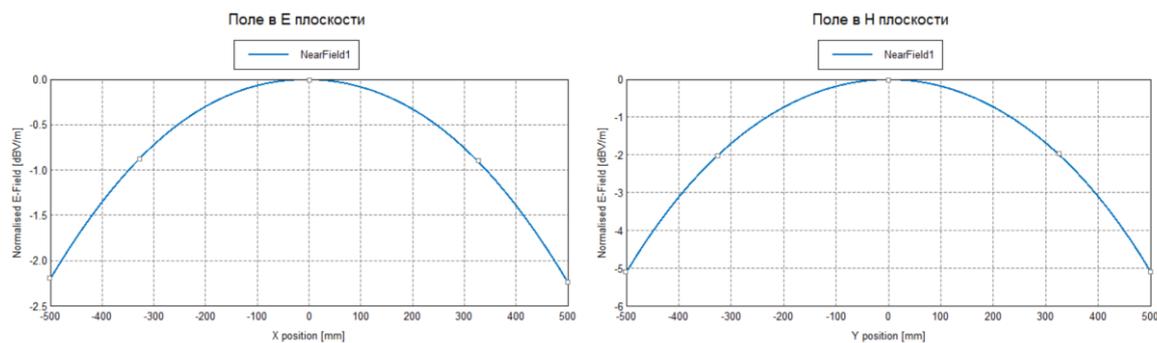


Рис.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.П. Балабуха, А.С. Зубов, В.С. Солосин Компактные полигоны для измерения характеристик рассеяния объектов под общ. ред. Н.П. Балабухи. — М.: Наука, 2007. — 266 с
2. Кузьмич Т.А., Шапкина Н.Е., Балабуха Н.П., Меньших Н.Л., Сборник трудов Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи имени А.С. Попова, серия Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации.
3. А. Г. Свешников, И. Е. Могилевский, Математические задачи теории дифракции/. М.: Физический факультет МГУ, 2010.

Задача оптимизации зеркального коллиматора со скруглёнными краями на пучке частот

Ф.Б. Хлебников¹, Д.А. Коняев^{1,2}, А.Н. Боголюбов¹, Н.Е. Шапкина¹

¹Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова

²Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН

mnfkh1@gmail.com

Возможность проводить точные исследования эффектов рассеяния плоской волны на различных объектах является ключевой для многих задач современной практической электродинамики, особенно в области радиолокации. Для таких измерений конструируют специализированные измерительные стенды — компактные полигоны, в которых коллиматоры формируют плоскую электромагнитную волну на основе излучения точечного источника. Наиболее распространены однозеркальные коллиматоры, принцип действия которых основан на оптическом свойстве параболы [1].

Коллиматоры играют важнейшую роль в функционировании компактного полигона, но в то же время являются и крупнейшими источниками погрешности измерения: дифракционные эффекты на границах зеркала искажают отражённое поле, увеличивая его неоднородность. В меньшей степени эти эффекты проявляют себя при использовании коллиматоров со скруглёнными краями, спроектированными для перенаправления лучей, отражённых от боковых областей, мимо рабочей зоны — области пространства, в которой ведутся измерения [2].

Как показывают результаты численного моделирования, эффективность скруглённых краёв существенно зависит от геометрических параметров зеркала. Подобрать наилучшую комбинацию этих параметров можно при помощи методов математического моделирования.

В настоящей работе рассмотрена математическая модель протяжённого зеркала, представляющего собой цилиндрическую поверхность с сечением сложной формы, облучаемого протяжённым источником. Помимо параболического участка, формирующего плоскую волну в рабочей зоне, сечение дополнено также скруглениями на краях зеркала и дополнительной дугой в области тени, замыкающей фигуру. К сечению предъявляется требование гладкости вплоть до второй производной, обоснованное физическими соображениями. Построенная математическая модель позволяет в широких пределах менять геометрические параметры задачи, такие как фокусное расстояние, размер зеркала, размеры скруглений, сохраняя все основные свойства задачи. Это позволяет применять модель для решения обратных задач, в которых параметры зеркала могут изменяться динамически [3].

В области, внешней по отношению к построенной поверхности, ставится задача дифракции, состоящая из системы уравнений Максвелла с импедансными граничными условиями и условий излучения Зоммерфельда, причём рассматривается только поле, отражённое от зеркала. Такую задачу можно свести к системе уравнений Гельмгольца, из которых, в свою очередь, выводится интегральное уравнение следующего вида:

$$\frac{1}{2}u(M) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u(P)}{\partial n} - i\alpha g(M, P) \right) u(P) dl_p = u_0(M),$$

которое решается численно при помощи метода Крылова-Боголюбова.

Для оптимизации формы зеркала ставится задача минимизации функционала

$$\tilde{F}(a, b) = \sum_l F^{\lambda_l}(a, b),$$

где

$$F^{\lambda_l}(a, b) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_n (u_n - u_0)^2},$$

среднее квадратичное отклонение поля в рабочей зоне от среднего значения $u_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_k$ на заданной частоте λ_i , рассматриваемое как функционал от ширины и толщины скруглений зеркала. Таким образом, меньшие значения функционала $\tilde{F}(a, b)$ соответствуют лучшим параметрам зеркала, поле в рабочей зоне такого зеркала будет более однородным по амплитуде на выбранных частотах.

В настоящей работе задача минимизации функционала решается при помощи метода Нелдера-Мида. Был произведён численный эксперимент для зеркала апертурой 7м. и фокусным расстоянием 6м. на пучке из трёх частот. Сравнение поля в рабочей зоне оптимизированного зеркала с одним из начальных приближений показывает значительные улучшения однородности амплитуды и фазы на каждой из выбранных частот. По сравнению с зеркалом, полученным путём оптимизации на одной частоте, равномерность поля в рабочей зоне стала предсказуемо хуже, тем не менее даже на самой высокой из выбранных частот отклонение амплитуды не превышает 10%, что считается вполне допустимым для практических измерений.

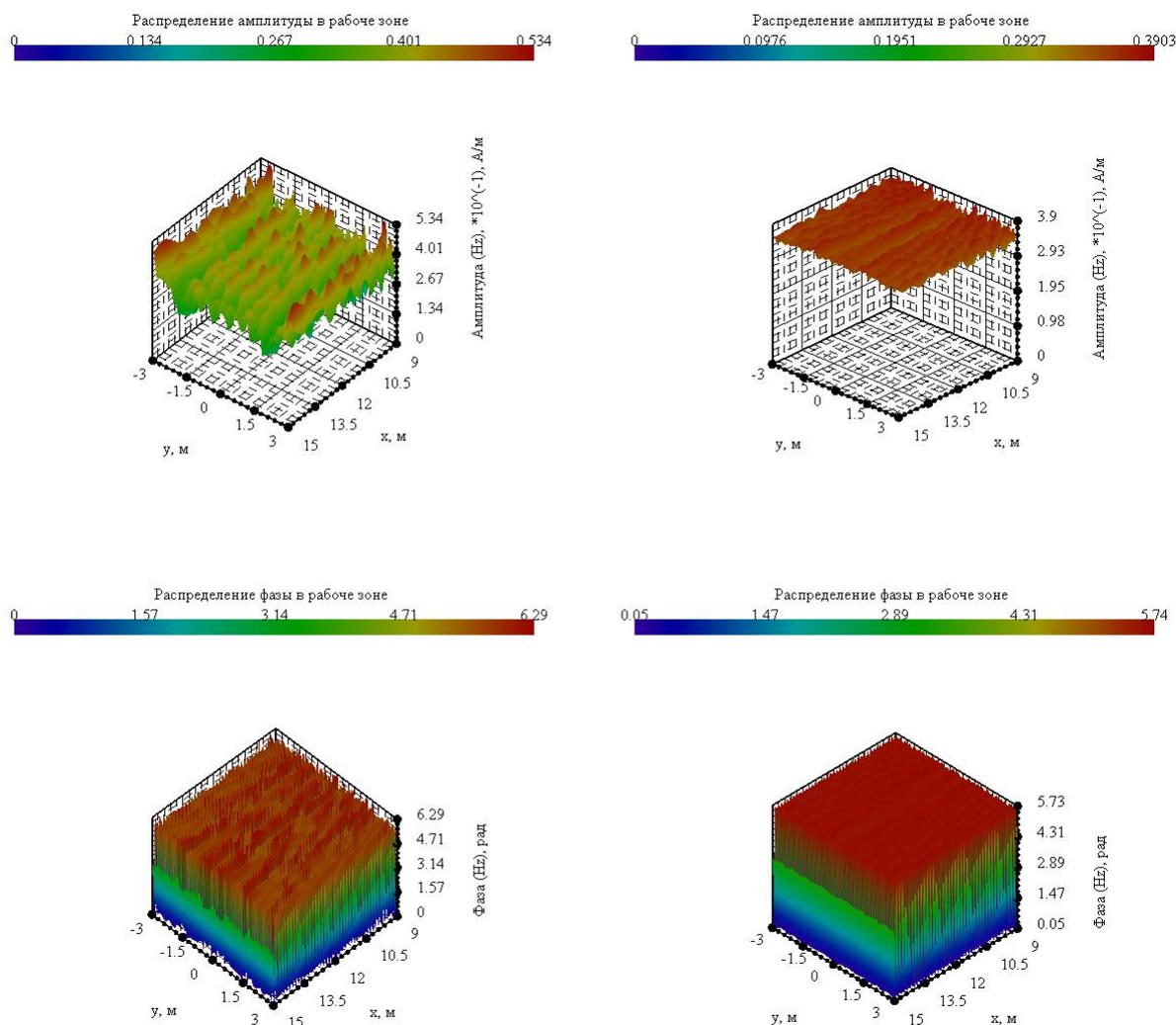


Рис. 1. Амплитуда и фаза поля в рабочей зоне до и после оптимизации на частоте 0.15м.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балабуха Н.П., Зубов А.С., Солосин В.С. // Компактные полигоны для измерения характеристик рассеяния объектов. М.: Наука, 2007.
2. Gupta I. J., Ericksen K. P., Burnside W. D. A method to design blended rolled edges for compact range reflectors //Antennas and Propagation, IEEE Transactions on. – 1990. – Т. 38. – №. 6. – С. 853-861.
3. Оптимизация формы зеркального коллиматора со скругленными краями / А. Н. Боголюбов, Н. А. Боголюбов, Д. А. Коняев и др. // *Физические основы приборостроения*. — 2019. — Т. 8, № 3. — С. 19–27.

Построение сингулярной части электромагнитного поля в задачах дифракции на объектах с ребрами и коническими точками

А.Н. Боголюбов, И.Е. Могилевский, В.В. Ровенко

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет

bogan7@yandex.ru

imogilevsky@mail.ru

rovenko.vladimir@physics.msu.ru

В настоящее время весьма актуальными являются задачи дифракции электромагнитного поля на сложных диэлектрических структурах при наличии ребер на их границах. В частности, волноводы сложного сечения (ВСС) находят широкое применение при конструировании различных СВЧ-устройств, таких как антенны, фильтры, поляризаторы, мультиплексоры и др. Применение ВСС позволяет создавать устройства, превосходящие по своим параметрам их аналоги на прямоугольных и круглых волноводах.

Известно, что наличие ребер на границах и поверхностях разрывов диэлектрической проницаемости приводит к появлению особенностей у электромагнитного поля в окрестности особой точки границы или неоднородности заполнения [1-4]. Обобщенное решение может иметь сингулярности даже при гладкой правой части уравнений [5].

Одним из способов преодоления этих проблем является выделение сингулярной части электромагнитного поля в окрестности ребра в волноводе [4]. При этом существенно используются результаты по асимптотике решения эллиптических краевых задач, представленные в работе В.А. Кондратьева [5], а также С.А. Назарова и Б.А. Пламеневского.

Рассмотрен ряд задач, посвященных выделению сингулярной части электромагнитного поля волновода в окрестности ребер границы, поверхностей разрыва диэлектрической проницаемости, в окрестности ребра металло-диэлектрического клина в волноводе [3]. Помимо выделения сингулярной части электромагнитного поля в закрытых волноводящих системах с помощью данного метода удастся получить сингулярную часть электромагнитного поля в ряде задач дифракции, в частности, в задаче дифракции электромагнитного поля на телах с диэлектрическими ребрами в окрестности ребра, в окрестности конической точки для задачи дифракции на идеально проводящем теле [1]. Хотя физические и математические постановки этих задач значительно различаются, в основе построения сингулярной части электромагнитного поля лежит общий метод выделения сингулярной части решения эллиптических краевых задач, впервые предложенный В.А. Кондратьевым [5].

Рассмотрим выделение сингулярной части электромагнитного поля волновода в окрестности ребра диэлектрического клина. Предполагается, что диэлектрическая проницаемость ε — кусочно-непрерывная скалярная вещественная функция.

Для исследования задачи используется математическая постановка из работы [7] для собственных векторов, дополненная условиями сопряжения на поверхностях разрыва диэлектрической проницаемости:

$$-\text{grad div } H_{\perp} - k^2 \varepsilon \text{rot } E_z = -\gamma^2 H_{\perp},$$

$$-ik \text{rot } \varepsilon H_{\perp} - \text{div } \varepsilon \text{grad } E_z = -\gamma^2 \varepsilon E_z,$$

где $k = \frac{\omega}{c}$ — волновое число, γ — спектральный параметр, предполагается, что все функции имеют зависимость от z вида e^{iyz} . Граничные условия и условия сопряжения имеют вид

$$\begin{aligned} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega} &= 0, E_z|_{\partial\Omega} = 0, \\ [(\mathbf{H} \cdot \mathbf{n})]_C &= 0, [E_z]_C = 0, (\mathbf{H} \times \mathbf{n})|_C = 0, \\ [\operatorname{div} H_{\perp}]_C &= 0, [\varepsilon(\operatorname{grad} E_z + ik(\mathbf{H} \times \mathbf{i}_z)) \cdot \mathbf{n}]_C = 0. \end{aligned}$$

Здесь C — линия разрыва диэлектрической проницаемости, \mathbf{n} — нормаль к границе области или линии разрыва.

С помощью метода выделения особенности электромагнитного поля в окрестности ребра получено следующее представление электрического поля в окрестности угловой точки линии разрыва:

$$\begin{aligned} E_z(r, \varphi) &= \chi \sum_{-\delta < \nu_k^{(1)} < 1} r^{\nu_k^{(1)}} \left\{ C_k^{(1)} \cos[(\pi - \varphi)\nu_k^{(1)}] + D_k^{(1)} \cos[(\pi - |\omega_0 - \varphi|)\nu_k^{(1)}] \right\} + \\ &+ \chi \sum_{-\delta < \nu_k^{(2)} < 1} r^{\nu_k^{(2)}} \left\{ C_k^{(2)} \cos[(\pi - \varphi)\nu_k^{(2)}] + D_k^{(2)} \cos[(\pi - |\omega_0 - \varphi|)\nu_k^{(2)}] \right\} + \mathfrak{R}(r, \varphi), \end{aligned}$$

где $C_k^{(i)}, D_k^{(i)}$ — числа, $\nu_k^{(1)}$ и $\nu_k^{(2)}$ — решения уравнений

$$\sin \pi \nu_k^{(1)} - \alpha \sin(\pi \nu_k^{(1)} - \nu_k^{(1)} \omega_0) = 0,$$

$$\sin \pi \nu_k^{(2)} + \alpha \sin(\pi \nu_k^{(2)} - \nu_k^{(2)} \omega_0) = 0,$$

(кроме $\nu_k = 0$), $\chi(r) = \begin{cases} 1, & r \leq d/2, \\ 0, & r > d, \end{cases}$ $\chi(r) \in C^\infty$ — срезающая функция, $\mathfrak{R}(r, \varphi)$ — гладкая

часть решения, для которой получена оценка в соответствующей норме.

На основе полученного асимптотического представления электромагнитного поля в окрестности ребра удается существенно увеличить скорость сходимости метода конечных элементов, вводя в пространство пробных функций сингулярные функции, имеющие особенность заданного вида и точно аппроксимирующие сингулярную часть решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов А. Н., Могилевский И. Е., Ровенко В. В. // Известия Российской академии наук. Серия физическая. — 2021. — Т. 85, № 1. — С. 59–63.
2. А.Н. Боголюбов, И.Е. Могилевский, А.Г. Свешников // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т.55. № 3. С.446.
3. Боголюбов А. Н., Могилевский И. Е., Ровенко В. В. // Физические основы приборостроения. — 2019. — Т. 8, № 1. — С. 6–12.
4. А.Н. Боголюбов, А.Л. Делицын, И.Е. Могилевский, А.Г. Свешников // Радиотехника и электроника. 2003. Т.48. №7. С.787.
5. В.А. Кондратьев // Труды Московского Математического Общества. Т.16. 1967. С.227.
6. Боголюбов А. Н., Могилевский И. Е. // Физические основы приборостроения. — 2016. — Т. 5, № 2. — С. 72–79.
7. Делицын А.Л. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т.39. № 2. С.315–322.

Анализ стабильности свойств линейной антенной решётки при параболическом изгибании

Б.Э. Назаренко, Т.К. Артёмова

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
b.e.nazarenko@yandex.ru

Антенные решётки – тип антенн, который позволяет усиливать сигнал в точке наблюдения за счёт интерференции излучения от каждого из элементов решётки, а также перестраивать направление максимального излучения при изменении амплитуд и фаз сигналов на портах антенных элементов. При помощи решёток достигается концентрация энергии в заданном направлении. С появлением новых материалов антенные решётки могут выполняться на гибких носителях. Находясь под нагрузкой, носитель принимает профиль, зависящий от распределения и величины нагрузки, а также расположения точек фиксации носителя. Если излучение прямолинейных решёток хорошо изучено, то деформированные решётки только становятся объектом интереса. Так как результат интерференции излучения отдельных элементов определяется их взаимным расположением в пространстве, то характер деформации оказывает существенное влияние на свойства решётки (см., например, [1]).

Можно показать, что при равномерно распределённых нагрузках прямоугольные пластины носителя, закреплённые вдоль одной из осей, испытывают так называемый чистый изгиб. При этом профиль изгибания можно считать параболическим цилиндром [2]. Аналогичным образом деформируется ранее прямолинейный носитель (типа стержня или балки). Для практических целей можно ограничиться исследованием поведения при изгибании свойств линейной, т.е. одномерной, антенной решётки.

Целью работы является анализ стабильности свойств линейной антенной решётки из дипольных элементов к цилиндрическому изгибанию.

Рассмотрим эквидистантную линейную антенную решётку из N одинаковых полуволновых металлических диполей, ориентированных вдоль оси z декартовой системы координат и размещённых на расстоянии d друг от друга. В исходном виде общая длина решётки равна $L=d \cdot (N-1)$. Полагаем, что носитель закреплён в начале координат, т.е. в центре центрального элемента. Изгибание происходит по параболическому профилю (см. рис. 1), который описывается уравнением

$$y = \frac{x^2}{4F}, \quad (1)$$

где F – фокусное расстояние параболы.

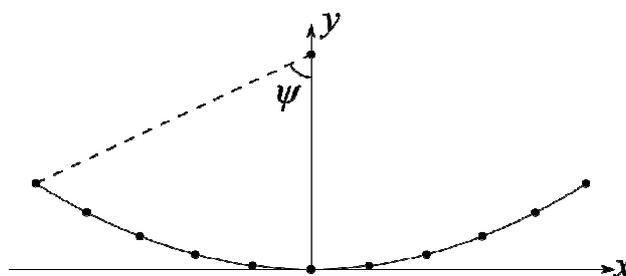


Рис. 1. Геометрия задачи

Предполагая, что носитель тонкий и выполнен из диэлектрика с малой диэлектрической проницаемостью, пренебрегаем, во-первых, влиянием носителя на излучение антенной решётки, и во-вторых, изменением размеров носителя при

изгибании. Второе даёт основание считать общую длину антенны вдоль профиля изгибания неизменной.

Для соотнесения с другими профилями изгибания при описании параболы удобно использовать некоторый угол ψ – угол между двумя направлениями из точки фокуса: к центральному и к крайнему элементам решётки. Тогда, изменяя ψ , можно изменять и фокусное расстояние параболы в соответствии с формулой:

$$F = \frac{L}{2\left(\xi\sqrt{1+\xi^2} + \ln\left(\xi\sqrt{1+\xi^2}\right)\right)}, \quad \xi = \operatorname{tg}(\psi / 2). \quad (2)$$

Исследование проводилось следующим образом. Была построена электродинамическая модель антенной решётки: полуволновые элементы были рассчитаны на работу на частоте 3550 МГц (в диапазоне частот, отведённом для исследований и медицины), выполнялись из медных проводников. Каждый элемент запитывался отдельно от согласованного с ним фидера. Межэлементное расстояние изменялось от $0,3\lambda$ (что возможно при плотной компоновке решётки для экономии места) до $0,7\lambda$ (разреженная компоновка), где λ – центральная длина волны излучения. Угол, описывающий параболическое изгибание решётки в сторону оси Y , изменялся от 0 (прямолинейная решётка) до 90° (сильное изгибание). Электродинамическая задача заключалась в решении уравнений Максвелла с граничными условиями, заданными на поверхности проводника. Определялись напряжённости электрического и магнитного полей, а по ним – диаграммы направленности решётки при равноамплитудной синфазной запитке (рис. 2) и коэффициент полезного действия (рис. 3), учитывающий как рассогласование антенных элементов с фидерами, возникающее из-за взаимного влияния элементов решётки друг на друга, так и потери в проводниках.

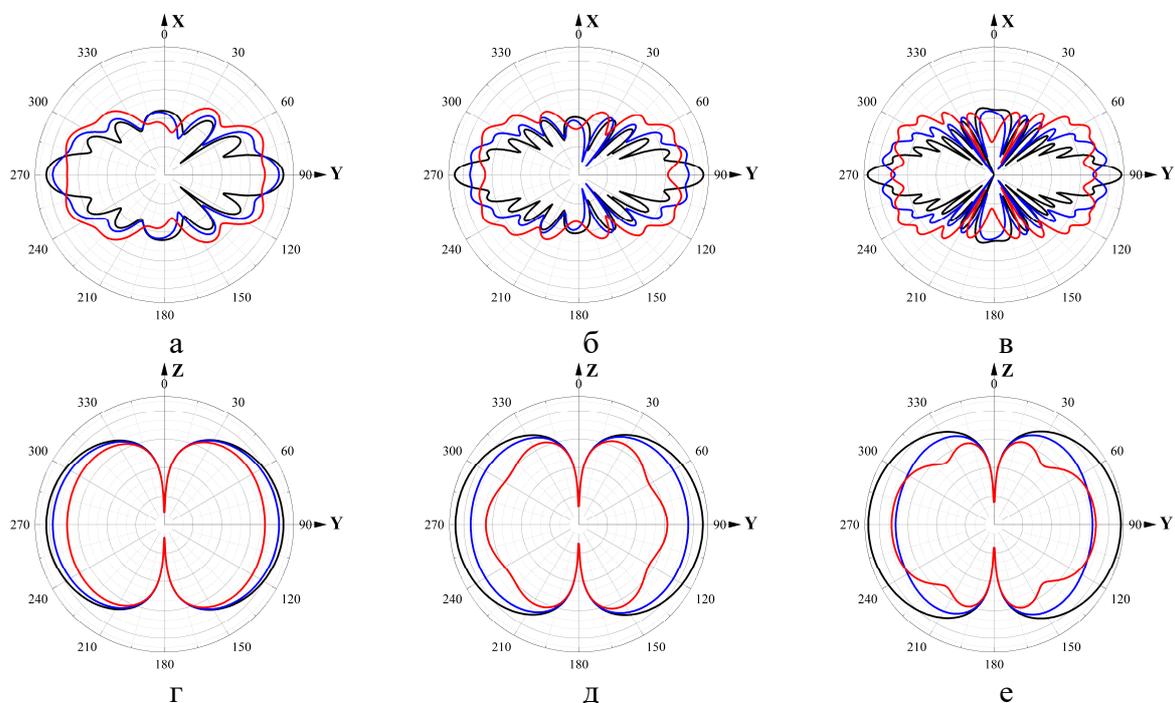


Рис. 2. Диаграммы направленности решётки для различных апертурных углов (15° – чёрная, 45° – синяя, 75° – красная линии) и межэлементных расстояний ($0,3\lambda$ – а и г, $0,5\lambda$ – б и д, $0,7\lambda$ – в и е)

На рис. 2, а-в приведены горизонтальные сечения диаграммы направленности (ДН). В зависимости от угла ψ изменяются условия интерференции, и излучение то

имеет в передней полуплоскости один главный лепесток, то образует конус. В целом, с ростом ψ главный лепесток сначала расширяется, затем в прежнем направлении максимального излучения начинает формироваться локальный минимум, который далее сменяется локальным максимумом, однако форма ДН уже не имеет одного чётко выраженного главного лепестка. Переход от однонаправленного к коническому излучению происходит для различных межэлементных расстояний по-разному. С ростом межэлементного расстояния диаграмма направленности быстрее «рассыпается»: если при $d=0,3\lambda$ коническое излучение появляется примерно при $\psi > 60^\circ$, то при $d=0,3\lambda$ и $d=0,7\lambda$ – для углов, больших 45° и 30° соответственно. Излучения в передней (в положительном направлении оси Y) и в задней полуплоскостях отличаются, главный лепесток в передней полуплоскости всегда уже, чем в задней. На рис. 2, г-е приведены вертикальные сечения диаграммы направленности. Их изменение с изменением параметра ψ отображают изменение трёхмерной ДН.

В отличие от диаграммы направленности, полный КПД, выраженный в дБ, при изгибании антенной решетки, изменяется незначительно: максимальное отклонение от КПД для прямолинейной решётки наблюдается для разреженной решётки и не превышает 0,1 дБ. В целом при сгибании КПД несколько ухудшается (значения удаляются от идеального – нуля дБ).

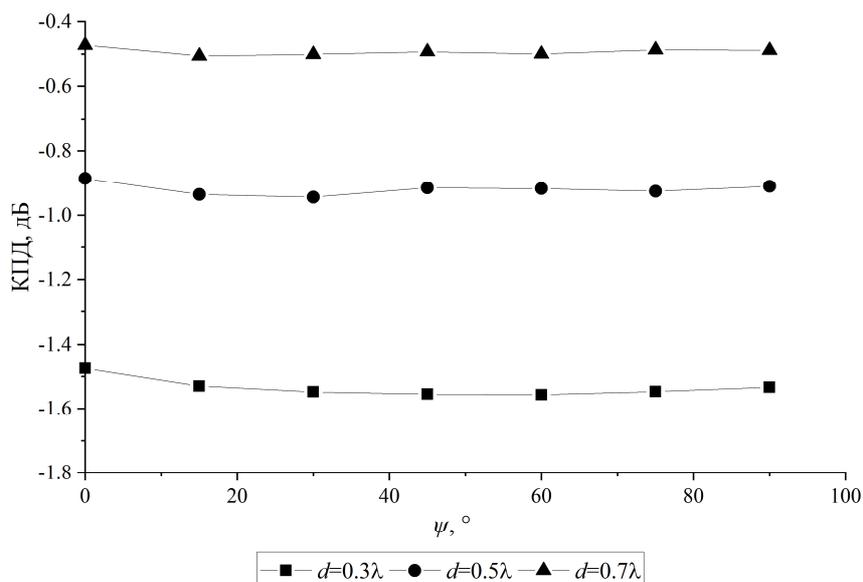


Рис. 3. Диаграммы направленности решётки для различных углов ψ

По итогам работы можно сделать вывод, что сгибание антенной решётки очень сильно влияет на форму ДН, о её стабильности можно говорить лишь до углов около 30° . Но так как КПД антенны при этом ухудшается незначительно, то это изменение можно использовать для достижения заданной практически полезной формы ДН.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Song and Y. Rahmat-Samii // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. V. 66. No. 5. P. 2219-2228.
2. Р.В. Саусвелл “Введение в теорию упругости для инженеров и физиков” М.: Иностранная литература, 1948.

Исследование влияния наличия опоры на рассеянное объектом электромагнитное поле методом математического моделирования

Н.П. Балабуха¹, Е.Е. Евстафьев^{1,2}, Н.Е. Шапкина^{1,2}

¹ Институт теоретической и прикладной электродинамики Российской академии наук (ИТПЭ РАН)

² Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики

egorezbalka@gmail.com

Исследуемый объект размещается в рабочей зоне безэховой камеры (БЭК) на некоторой опоре - пилоне [1]. Однако, падение плоской электромагнитной волны на измеряемый объект и пилон вызывает искажение результатов измерений, связанное с присутствием пилона в рабочей зоне БЭК. Эти искажения могут быть вызваны, в основном, двумя причинами. Первая – рассеяние непосредственно на пилоне, размер которого сравним с размером объекта или превышает его, вследствие чего вклад поля, рассеянного на пилоне, может оказаться значительным. Вторая – взаимное рассеяние. Оно порождается взаимодействием поля, рассеянного на объекте и отражённого в сторону опоры, и наоборот. Влияние такого рода ошибки измерений сильно зависит от формы объекта, покрытия опоры и других факторов, и эта ошибка может оказаться как пренебрежимо малой, так и значительной, то есть требующей отдельного рассмотрения.

Для уменьшения влияния первой составляющей существует множество методов, связанных как с конструкцией опоры непосредственно при проведении измерений, так и методов, основанных на обработке полученных данных. Очевидным способом является создание пилона такой формы, чтобы рассеянное на нём поле не попадало на в рабочую зону БЭК [1]. По этой причине, например, при работе с полем плоской волны, пилон имеет форму оживального тела (цилиндр, сечение которого представляет из себя пересечение двух окружностей), а сам он наклонён в сторону, противоположную направлению падения волны. Это позволяет рассеять падающее на него поле преимущественно в сторону пола и стен БЭК, покрытой радиопоглощающим материалом (РПМ), что позволяет уменьшить эффективную площадь рассеяния (ЭПР) пилона. Также опора может быть покрыта РПМ чтобы ещё больше снизить её ЭПР, а также закрыть поворотный вал, располагающийся на верхнем торце пилона. Это особенно важно, поскольку вал представляет собой вертикально расположенный круглый цилиндр, и уменьшить его ЭПР не представляется возможным. Покрытие опоры и поворотного вала радиопоглощающим материалом существенно уменьшает их вклад в рассеянное поле, но оказывается непрактичным при проведении серии различных экспериментов по нескольким причинам. Помимо различных форм объекта, из-за которых использованное при предыдущем эксперименте покрытие может оказаться непригодным при последующем эксперименте, различные радиопоглощающие (РП) материалы имеют разные свойства на разных частотах, поэтому для измерений на некотором промежутке частот придётся несколько раз заменять РП покрытие. Это, во-первых, замедляет проведение эксперимента, поскольку надо размещать новое покрытие, во-вторых, повышает стоимость этого эксперимента. Получается, что нужно либо использовать некоторую РП конструкцию, которая окажется проста в изготовлении и замене в ходе проведения эксперимента, то есть, обладать простой формой и малыми габаритами, либо не использовать РП покрытия вовсе.

Один из способов анализа данных, позволяющих получить рассеяние поля на объекте из данных, полученных при измерении рассеяния на комбинации объект-опора, – это метод вычитания полей. Он заключается в том, что поле комбинации включает в себя как поле, рассеянное на объекте, так и поле, рассеянное на опоре. Если провести измерения с опорой без объекта, а затем вычесть его из данных для комбинации, то можно приблизительно получить распределение поля, рассеянного на объекте.

Вторая же проблема не решается способами, описанными выше, поскольку причина возникновения такого рода помех – взаимодействие между пилоном и объектом.

Для решения второй проблемы был предложен способ [2], основанный на комбинации методов, заключающихся в изменении условий проведения эксперимента, и методов, основанных на последующей обработке результатов. Согласно [2], между объектом и опорой располагается некоторая пластина с низким ЭПР. Пластина должна “закрывать” опору от рассеянного на объекте поля, но при этом поле, рассеянное непосредственно на ней, не должно вносить заметных искажений в измерения. В качестве такого материала может выступать поглощающая диэлектрическая пластина, которая значительно уменьшит интенсивность отражённого поля, вызывающего переотражение. Это позволит, не изменяя методы обработки данных, исключить влияние взаимного рассеяния опоры и объекта. Но, поскольку характеристики диэлектриков зависят от частоты падающей на них волны, требуется изучение поведения рассеяния на комбинации на различных частотах. Сначала проводятся измерения комбинации опора-объект-пластина и опора-пластина. Затем может быть применён ряд методов для выделения поля, рассеянного на объекте, например, метод вычитания полей, полученных в измерениях, упомянутых выше, с минимальными отклонениями от поля уединённого объекта, то есть, без поля, рассеянного на опоре и без поля, вызванного взаимодействием опоры и объекта.

Рассмотрим пилон как металлическое оживальное тело, наклонённое в сторону падения волны, что позволяет отражать падающую на него электромагнитную волну преимущественно в сторону поверхностей, покрытых РПМ (рис.1). На верхнем торце пилон расположим круглый металлический поворотный вал цилиндрической формы. На поворотном вале разместим пластину эллиптической формы с низким ЭПР, изменение толщины которой влияет на её поглощающую способность. Причём пластина располагается на металлической подкладке, что улучшает её изолирующие свойства. Над пластиной размещён объект в виде круглого металлического цилиндра, расположенного горизонтально (рис.1).

Пусть, на эту комбинацию падает плоская вертикально поляризованная электромагнитная волна, частоту которой мы изменяем в эксперименте (направление падения волны указано на рис.1 стрелкой V).

Поскольку в данной работе исследуется взаимное рассеяние объекта и опоры, которое преимущественно происходит за счет верхнего торца пилон, то в качестве модели для расчётов берётся конструкция, где сам пилон представлен только своей верхней гранью (рис.1б). Данное упрощение позволяет более явно выразить взаимное рассеяние, поскольку в измерениях не будет присутствовать поле, рассеянное непосредственно на пилоне. А также уменьшение размеров конструкции существенно уменьшает объём вычислительных ресурсов, требующихся для проведения численного эксперимента.

Для определения степени значимости взаимного рассеяния и извлечения рассеяния цели применяются следующие методы [2].

1. Метод, использующий вычитание из поля комбинации пилон-объект, поля уединённого пилон. Этот метод позволяет рассчитать приблизительное рассеяние поле на объекте, но он никак не учитывает эффект взаимодействия объекта и опоры [8].

$$E_1 = E_{\text{CombT}} - E_{\text{Pylon}} \quad (1)$$

2. Метод, использующий вычитание из поля комбинации пилон-пластина-объект, поля комбинации пилон-пластина.

$$E_2 = E_{\text{CombT}} - (E_{\text{CombC}} - E_{\text{Cap}}) \approx E_{\text{CombT}} - E_{\text{CombC}} \quad (2)$$

Поскольку ЭПР уединённой пластины можно считать пренебрежимо малым, то выполняется приблизительно равенство в (2), что позволяет быстрее рассчитать поле, рассеянное на объекте.

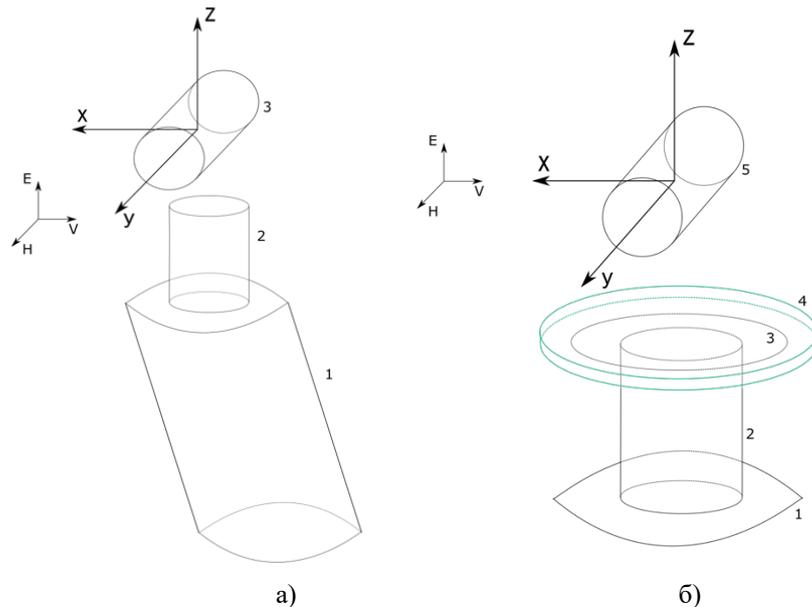


Рис.1 а) Пилон (1) с поворотным валом (2). Объект (3) размещён на прозрачной основе на вале.
 б) Верхний торец пилона (1) с поворотным валом (2). Пластина с низким ЭПР состоит из металлической подкладки (3) и слоя диэлектрика (4). Объект (3) размещён на прозрачной основе на вале.

Для получения поля, рассеянного на объекте, использованы методы (1) и (2), и проведено сравнение их эффективности на различных частотах при различной толщине пластины, описанной в секции IV. Сравнение диаграмм рассеяния, полученных с использованием этих методов, позволяет определить, насколько велико влияние взаимодействия пластины и объекта на результаты измерений. На рис.2, рис.3 и рис.4 представлены кривые распределения полей, полученных с использованием методов (1) и (2), а также поля, рассчитанного для объекта без опоры. Анализ результатов показывает, что использование радиопоглощающей пластины существенно улучшает результаты в случае, если область, в которой проводятся измерения, располагается в зоне, соответствующей углам $\theta > 120^\circ$ и $\varphi > 45^\circ$, что может представлять интерес при исследовании боковых отражений от объекта. Изменение толщины пластины также влечёт за собой изменение диаграмм рассеяния, например, для пластин толщины 10мм и 50мм различие диаграмм показывает, выбор конкретной толщины пластины зависит от того, какие области являются наиболее важными в конкретном эксперименте, поскольку, в области провалов наблюдается ухудшение результатов, причём минимум расчётного значения оказывается сравним с максимумом, но в областях максимумов расчётное значение всё больше приближается к теоретическому, по мере утолщения пластины.

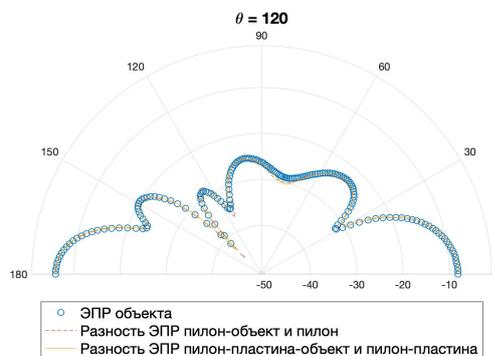


Рис.2 Распределение полей уединённого объекта и полей, полученных из расчётов, по углу φ , при фиксированном угле $\theta = 120^\circ$ на частоте 4ГГц при толщине пластины 10мм. ЭПР объекта(дБ) – ЭПР уединённого объекта, разность ЭПР пилон-объект и пилон (дБ) – ЭПР значения поля, рассеянного на объекте, полученные из измерений комбинации пилон-объект, разность ЭПР пилон-пластина-объект и пилон-пластина (дБ) – ЭПР значения поля, рассеянного на объекте, полученные из измерений комбинации пилон-пластина-объект. Тангенс угла поглощения 0,454.

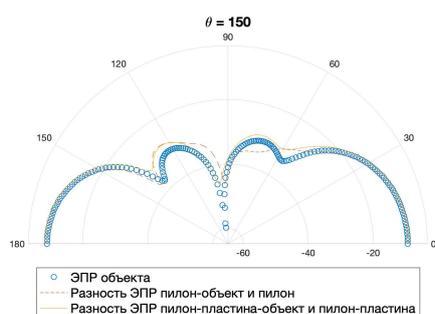


Рис.3 Распределение полей уединённого объекта и полей, полученных из расчётов, по углу φ , при фиксированном угле $\theta = 150^\circ$ на частоте 4ГГц при толщине пластины 10мм. ЭПР объекта(дБ) – ЭПР уединённого объекта, разность ЭПР пилон-объект и пилон (дБ) – ЭПР значение поля, рассеянного на объекте, полученные из измерений комбинации пилон-объект, разность ЭПР пилон-пластина-объект и пилон-пластина (дБ) – ЭПР значение поля, рассеянного на объекте, полученные из измерений комбинации пилон-пластина-объект. Тангенс угла поглощения 0,454.

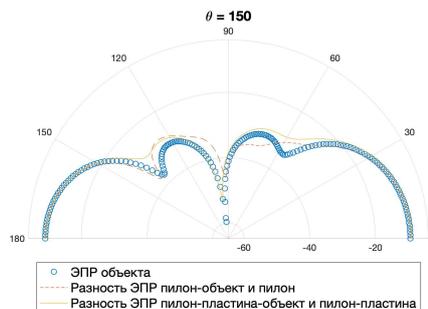


Рис.4 Распределение полей уединённого объекта и полей, полученных из расчётов, по углу φ , при фиксированном угле $\theta = 150^\circ$ на частоте 4ГГц при толщине пластины 50мм. ЭПР объекта(дБ) – ЭПР уединённого объекта, разность ЭПР пилон-объект и пилон (дБ) – ЭПР значение поля, рассеянного на объекте, полученные из измерений комбинации пилон-объект, разность ЭПР пилон-пластина-объект и пилон-пластина (дБ) – ЭПР значение поля, рассеянного на объекте, полученные из измерений комбинации пилон-пластина-объект. Тангенс угла поглощения 0,454.

Аналогичные результаты так же были получены для других частот, что может говорить об универсальности использования такого подхода для устранения взаимодействия опоры и объекта.

Литература

- [1] Н.П.Балабуха, Ф.С.Зубов, В.С.Солосин – “Компактные полигоны для измерения характеристик рассеяния объектов” Издательство “Наука” 2007
- [2] Penghui Chen, Xiaojian Xu, Yuesong Jiang – “Comparison of Methods to Extract Target Scattering from Scattering of Target-Metal Pylon Combination” School of Electronic and Information Engineering Beihang University Beijing, China
- [3] В.К.Chung, С.Н.Тех, Н.Т.Chuan – “Modeling of anechoic chamber using a beam-tracing technique” PIER 49, 23–38, 2004
- [4] Л.Д.Гольдштейн, Н.В.Зернов – “Электромагнитные поля и волны” “Советское радио” Москва 1971г
- [5] И.С.Берёзин, Н.П.Жидков – “Методы вычислений, том второй” Государственной издание физико-математической литературы, Москва, 1959
- [6] FEKO Suite 6.0 EMSS Corp [Online]. Available: <http://www.feko.info>
- [7] Евстафьев Е.Е., Шапкина Н.Е., Балабуха Н.П. – “Исследование влияния опоры, на которой расположен объект, на рассеянное объектом электромагнитное поле” 13-ая Международная конференция “Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации” (ARMIMP)
- [8] Шушарин Михаил Максимович, Евстафьев Егор Евгеньевич– “Математическое моделирование рассеяния электромагнитной волны на цилиндре с рёбрами” Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов 2019"

Получение диаграммы рассеяния объекта на основе значений поля в ближней зоне на отрезке сканирования (двумерный скалярный случай)

Н.П. Балабуха¹, Д.А. Коняев^{1,2}, Н.Е. Шапкина^{1,2}, К.М. Шитикова²

¹ Институт теоретической и прикладной электродинамики Российской академии наук (ИТПЭ РАН)

² Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики

shitikova.ks@gmail.com

Нахождение радиолокационных характеристик объектов требуется в связи с задачами радиолокации [1], [2]. Одной из главных характеристик рассматриваемых объектов является диаграмма эффективная площадь рассеяния (ЭПР) [1], [2]. В настоящее время наиболее распространённой является однопозиционная схема радар-детектирования (приёмная и передающая антенны находятся в одной точке пространства) [1], [7], [8]. Поэтому обычно измерительные стенды (компактные полигоны) позволяют измерять однопозиционную ЭПР. Однако, в последнее время, на практике часто требуется получать двухпозиционные диаграммы рассеяния объектов: приёмная и передающая антенны разнесены в пространстве [1] – [6], [9], [10]. В связи с этим стоит вопрос о модернизации существующих компактных полигонов для реализации возможности измерения двухпозиционных ЭПР. Для этого можно использовать сканер, предназначенный для измерения поля в ближней зоне, с последующим расчетом поля в дальней зоне [1] – [4], [9], [10].

При сканировании на плоскости область сканирования всегда является усечённой. В связи с этим необходимо изучить возможности пересчёта поля из ближней зоны в дальнюю для максимально большого диапазона бистатических углов при фиксированном размере поверхности сканирования.

Рассмотрим модельную задачу о получении в дальней зоне электромагнитного поля, рассеянного бесконечным диэлектрическим цилиндром кругового сечения, при помощи значений электромагнитного поля, заданных в ближней зоне.

Стационарную задачу дифракции (временная зависимость $e^{-i\omega t}$) на бесконечном цилиндре можно свести к двум скалярным задачам для поиска компонент поля E_y и H_y , где OY – ось декартовой системы координат, направленная вдоль образующей цилиндрического тела [11]. Далее будем рассматривать поляризацию падающей волны, соответствующую $H_y = 0$. Конфигурация рассматриваемой задачи представлена на Рис. 1. Решение рассматриваемой задачи дифракции приведено в [12]. Сформулируем основную задачу: требуется по известным значениям компоненты электромагнитного поля $E_y = U_0(x)$, заданным на отрезке $\{(z, x): z = 0, x \in [-a; a]\}$, найти диаграмму рассеяния рассеивателя в диапазоне бистатических углов, соответствующих $-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0$.

Решение задачи дифракции вне области рассеивателя можно представить в виде интеграла по плоским волнам [11], [13]:

$$E_y(z, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu) e^{i\sqrt{k^2 - \mu^2}z + i\mu x} d\mu, \quad (1)$$

где k – волновое число. Тогда:

$$U_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu) e^{i\mu x} d\mu. \quad (2)$$

Если $a = +\infty$, то функцию $f(\mu)$ можно найти, используя обратное преобразование Фурье:

$$f(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(x) e^{-i\mu x} dx. \quad (3)$$

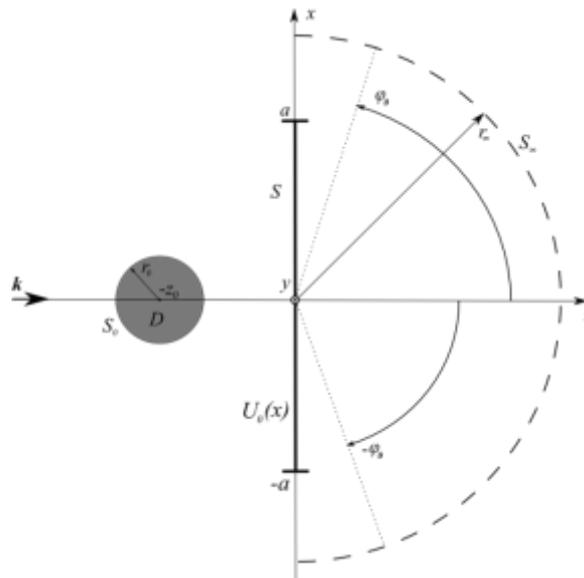


Рис. 1. Конфигурация рассматриваемой задачи

Если a достаточно велико по сравнению с расстоянием до рассеивателя и длиной волны, то

$$f(\mu) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{+a} U_0(x) e^{-i\mu x} dx. \quad (4)$$

Эта запись эквивалентна предположению, что поле вне зоны сканирования тождественно равно нулю. Такой подход успешно применяется при определении диаграмм направленности антенн [6], поэтому назовём его классическим.

В работе предлагается обновлённый метод расчёта значений функции $f(\mu)$ на основе идей, изложенных в работах [1 – 4]. Умножим (2) на $\frac{1}{2\pi} e^{-ihx}$ и проинтегрируем по отрезку $[-a; a]$. В силу конечности сечения рассеивателя заменим несобственный интеграл определённым, $\mu \in (-L; L)$. Тогда для отыскания функции $f(\mu)$ получим интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода с симметричным ядром:

$$\int_{-L}^L K(h, \mu) f(\mu) d\mu = g(h) \quad (5)$$

где

$$K(h, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a e^{i(\mu-h)x} dx, \quad (6)$$

$$g(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a U_0(x) e^{-ihx} dx \quad (7)$$

Решение полученного уравнения производится численно. Метод, описанный в работах [1 – 4], можно интерпретировать как метод решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Такого рода системы получаются при применении численного метода к уравнению (5).

Для получения асимптотического представления поля в дальней зоне можно воспользоваться методом перевала [13]:

$$E_y(z, x) = E_y(r, \varphi) \approx \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} \left[\sqrt{2\pi} e^{i\frac{3\pi}{4}} k \cos \varphi f(k \sin \varphi) \right] \quad (8)$$

при $r \rightarrow +\infty$. Здесь $z = r \cos \varphi$, $x = r \sin \varphi$, угол φ отсчитывается от положительного направления оси OZ против часовой стрелки.

Перейдём к численным результатам. Рассмотрим следующую конфигурацию сканера: плоская волна с длиной волны 10см распространяется в положительном направлении оси OZ и рассеивается на бесконечном круговом диэлектрическом цилиндре с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 1,6$. Расстояние от оси цилиндра до отрезка сканирования выберем равным 3м, а отрезок сканирования выберем длиной 20м. Сравнение результатов применения представленного метода с результатом, полученным классическим методом, а также с аналитическим решением представлены на Рис. 2.

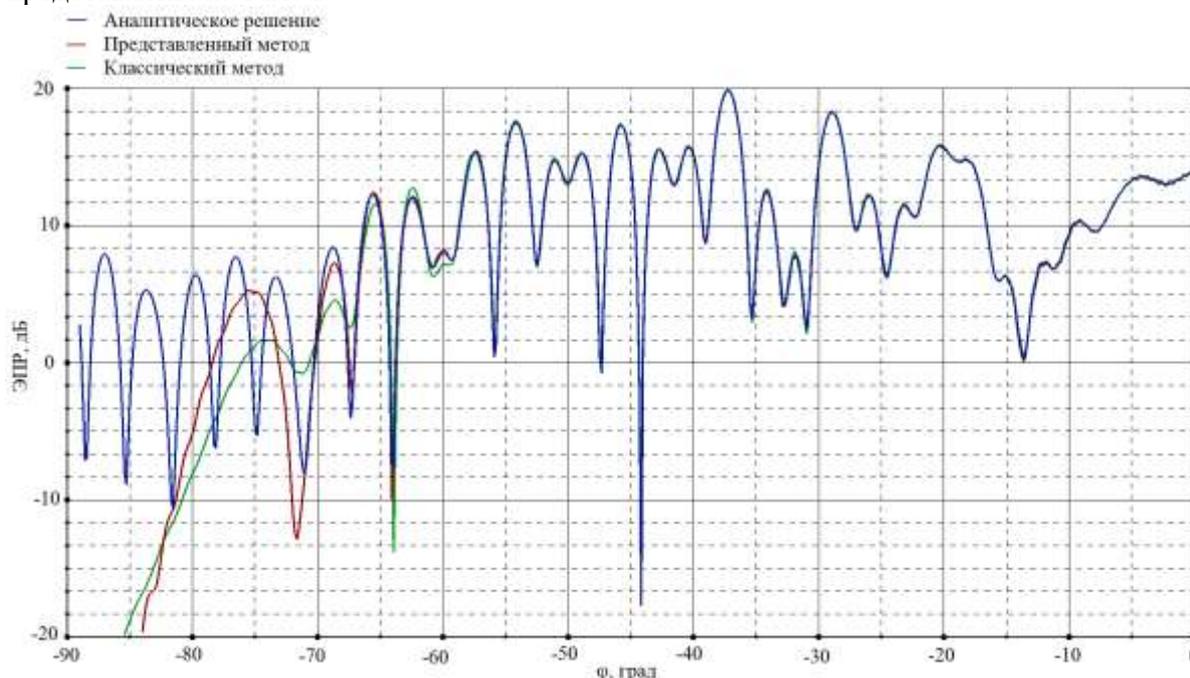


Рис. 2. Сравнение результатов работы классического метода и метода представленного в работе с результатами, полученными прямым вычислением для отрезка сканирования в 20м при $\varphi \in [-90; 0]$

Как видно из рисунка, предложенный метод даёт определённое улучшение по сравнению с классическим методом при расчете диаграммы ЭПР, однако эти

улучшение не настолько значимы, как в случае цилиндрического сканера, представленного в работе [15].

ЛИТЕРАТУРА

1. Балабуха Н.П., Зубов А.С., Солосин В.С. Компактные полигоны для измерения характеристик рассеяния объектов. М.: Наука, 2007.
2. Бахрах Л. Д. Методы измерений параметров излучающих систем в ближней зоне. – Изд-во "Наука", Ленинградское отделение, 1985.
3. Kim K. T. Truncation-error reduction in 2D cylindrical/spherical near-field scanning // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2010. – Т. 58. – №. 6. – С. 2153-2158.
4. Kim K. T. Truncation-error reduction in spherical near-field scanning using slepian sequences: Formulation for scalar waves // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2011. – Т. 59. – №. 8. – С. 2813-2823.
5. Kim K. T. Slepian transverse vector spherical harmonics and their application to near-field scanning // 2011 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation (APSURSI). – IEEE, 2011. – С. 2138-2141.
6. Kim K. T. Validation of the Slepian approach to truncation-error reduction in spherical near-field scanning // Proceedings of the 2012 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation. – IEEE, 2012. – С. 1-2.
7. Knott E. F. Radar cross section measurements. – Springer Science & Business Media, 2012.
8. Borkar V.G., Ghosh A., Singh R.K., Chourasia N. Radar cross-section measurement techniques. Defence Science Journal 60.2 (2010): 204.
9. T. B. Hansen, R. A. Marr, U. H. W. Lammers, T. J. Tanigawa, R. V. McGahan. Bistatic RCS calculations from cylindrical near-field measurements—Part I: Theory // IEEE transactions on antennas and propagation. – 2006. – Т. 54. – №. 12. – С. 3846-3856.
10. R. A. Marr, U. H. W. Lammers, T. B. Hansen, T. J. Tanigawa, R. V. McGahan. Bistatic RCS calculations from cylindrical near-field measurements—Part II: Experiments // IEEE transactions on antennas and propagation. – 2006. – Т. 54. – №. 12. – С. 3857-3864.
11. Ильинский А. С., Кравцов В. В., Свешников А. Г. Математические модели электродинамики [Учеб. пособие для вузов]. – Высш. шк, 1991.
12. Никольский, Валерий Владимирович. Учебное пособие по курсу электродинамика и распространение радиоволн: Математический аппарат электродинамики. 1973.
13. Дж. Стреттон. Теория электромагнетизма // М.: Гостехиздат. – 1948. – Т. 1.
14. Федорюк, Михаил Васильевич. Метод перевала. Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977.
15. N. P. Balabukha, D. A. Konyaev, N. E. Shapkina, and K. M. Shitikova, “Mathematical modeling of bistatic rcs determination by values of the near-field set on a part of the spherical or cylindrical surface,” in 2019 Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves (RSEMW), pp. 308–311, IEEE, 2019

Численное моделирование и визуализация эволюции сдвиговых волн в мягких биологических тканях (реализация метода эластографии SuperSonic Imaging)

А.А. Лисин, И.Ю. Демин, А.Е. Спивак

Национальный исследовательский

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

lisin.artem.a@gmail.com

В настоящее время компьютерное моделирование физических процессов позволяет с высокой скоростью рассчитать распространение сигнала в нелинейных средах. Применение таких методов на практике дает возможность оценить необходимые параметры модели, для получения наиболее наглядного проявления исследуемого явления.

В докладе рассмотрена математическая модель, основанная на решении уравнения Вестервельта на базе пакета k-Wave для MATLAB и представлена визуализация численного решения средствами графического 3D редактора AUTODESK MAYA, что позволяет демонстрировать результаты моделирования в объеме с учетом цилиндрической симметрии. Представлены результаты по измерению упругих характеристик мягких биологических сред.

Распространение волн в упругих средах удобно моделировать в пакете MATLAB, оптимизированном для работы с матрицами большого размера, а для удобства работы с пространством toolbox k-Wave, созданный для расчета распространения волн в упругих средах.

Численная модель набора скриптов k-wave подразумевает работу с пространством как инициализацию матрицы заданного размера, каждому элементу которой присваиваются необходимые физические параметры, необходимые для расчета поля в точке. В пространстве k-wave данная матрица имеет название kgrid. Численное решение сводится к решению уравнения Вестервельта в частных производных:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \tau \partial z} = \frac{c_0}{2} \Delta p + \frac{\beta}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial^2 p^2}{\partial \tau^2} \quad (1)$$

z – направление вдоль оси пучка, β - коэффициент нелинейности.

Уравнение (1) решается с использованием псевдоспектрального метода k-пространства, где пространственные градиенты вычисляются с использованием схемы БПФ, а временные градиенты вычисляются с использованием скорректированной k-пространственной разностной схемы. Каждая из этих схем реализуется посредством метода конечных элементов.

В работе [1] было проведено численное моделирование реализации метода эластографии сдвиговой волной SWEI. Метод SSI (SuperSonic Imaging) является дальнейшим развитием метода SWEI. В его основе лежит последовательное возбуждение сдвиговой волны в нескольких точках различной глубины с целью получить профиль волны в форме конуса. Более подробно данный метод описан в работе [2].

В случае с линейным датчиком излучателем является фазированная антенная решетка, состоящая из 128 точечных источников. Для получения сдвиговой волны необходимо сфокусировать излучатели в точку. Это достигается с помощью квадратичного фазового набег на каждом излучателе, за ноль считаем центр датчика. Для моделирования сдвиговой волны источник расположен в области пятна фокусировки и состоит из 8 элементов, расположенных в форме ромба. Для

достижения такого эффекта в каждую последующую точку должна быть сфокусирована ультразвуковая волна до того, как сдвиговая волна, излученная из предыдущей точки, рассеется. Кроме того, расстояние между точками фокусировки не должно превышать расстояние, на которое распространится сдвиговая волна.

Среда в данной модели принята однородной, с такими характерными параметрами, как плотность $\rho = 1030 \text{ кг/м}^3$ и скорость звука $C = 1540 \text{ м/с}$. В ходе реализации метода SSI была произведена фокусировка ультразвуковой волны в 3 точки на расстоянии 12 мм друг от друга. На основании этого расчёта получена карта распространения сдвигового волнового фронта (рис.1).

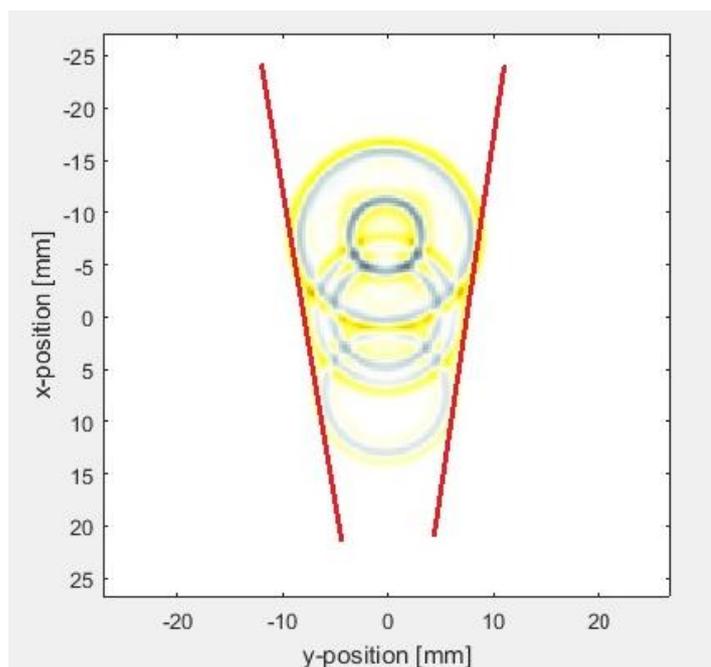


Рис.1. Карта распространения сдвигового волнового фронта.

Рисунок 1 демонстрирует геометрическое положение волнового фронта, конус показан красными линиями. Расчет радиационной силы и генерация сдвиговой волны проводится на основании результатов моделирования фокусировки ультразвуковой волны. Здесь источники излучения помещаются в центр таким образом, чтобы излучать в области пятна фокусировки суммарной мощностью, эквивалентной давлению, полученному в пятне на этапе фокусировки. На данной карте уже виден конус волнового фронта, его угол наклона зависит от времени перестройки фокусировки между точками, а также расстояния между ними. На основании карты получено распределения давления в среде (рис.2).

На рисунке 2 показаны результаты расчета, с учетом среды и затухания в ней. По распределению давления наблюдается малое давление волнового фронта из третьей точки фокусировки (24 мм от первой), однако по положениям пиков давления можно сделать вывод, что возникшей при фокусировке сигнала радиационной силы достаточно для генерации сдвиговой волны из всех трех точек.

Средствами графического редактора AUTODESK MAYA были получены трехмерные карты распространения сдвиговой волны для конуса. Для наглядности в пространство добавлено графическое решение из k-Wave, что позволило визуализировать ультразвуковой пучок и максимальные значения давления.

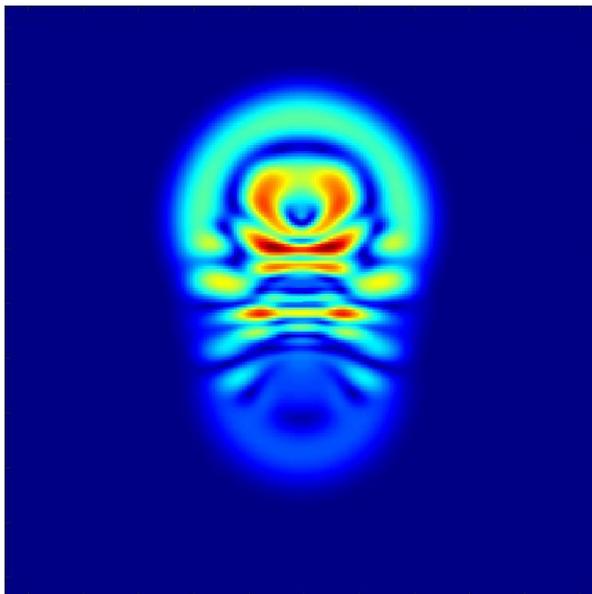


Рис.2. Распределение давления при распространении конуса сдвиговой волны.

Для того, чтобы более наглядно визуализировать полученные результаты, использовано программное обеспечение Autodesk Maya – пакет для работы с 3d графикой и анимацией, обладающий своим скриптовым языком программирования, что позволило использовать численные значения, полученные в k-Wave, для визуализации генерации ультразвукового пучка и распространения сдвиговой волны с помощью геометрических примитивов. Специфика численного моделирования, а именно хранение состояния среды в виде массива чисел, позволяет использовать результаты, полученные в одной программе, в другой, для последующей обработки. Для получения трехмерного распространения использовалась цилиндрическая симметрия относительно оси фокусировки ультразвукового пучка.

Чтобы определить границу волнового фронта, алгоритм проходит по высоте точки фокусировки все значения от края к центру, до первого множителя, значение которого >0.6 , а размер зоны фокусировки >0.9 от максимального значения. Высота зоны определяется путем смещения координаты перебора вверх, порог работы алгоритма 0.6 и 0.9 соответственно. Для корректной работы при поиске границы волнового фронта алгоритм не учитывает область, ограниченную координатой встречи множителя 0.9 на первом шаге. Визуализированы области относительного давления с пороговым значением 0.15 МПа, что позволяет избежать наложения большого количества моделей друг на друга.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (государственное задание No. 0729-2020-0040).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лисин А.А., Гурбатов С.Н., Демин И.Ю., Спивак А.Е. Численное моделирование, визуализация, и подсчет скорости сдвиговых волн в мягких биологических тканях // Ученые записки физического факультета Московского университета. 2019. № 5. С. 1950101.
2. Spivak, A.E., Demin, I.Y. Description and implementation of the Supersonic Shear Imaging method on the Verasonics research system // Journal of Physics: Conference Series, 2020, 1694(1), 012018

Анализ и синтез многослойных дифракционных решеток для практических приложений

А.А. Петухов, М.В. Артемьева, А.Н. Боголюбов
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
физический факультет, Москва, Россия
petukhov@physics.msu.ru

В современной лазерной технике, системах коммуникации, космических исследованиях и многих других областях науки и техники для управления электромагнитным излучением широко применяются многослойные дифракционные решетки [1]. Многослойная дифракционная решетка представляет собой, как правило, комбинированную структуру, состоящую непосредственно из периодической дифракционной решетки, имеющей определенную форму профиля штриха, и многослойного покрытия из однородных слоев (рис.1). При взаимодействии падающей волны с решеткой происходит дифракция волны по дискретным дифракционным порядкам. При этом форма профиля штриха решетки может быть в достаточной степени произвольной (прямоугольная, треугольная, синусоидальная, трапециевидная и т.д.), и в первую очередь именно она определяет, какие доли энергии падающей волны при дифракции направляются в каждый дифракционный порядок, т.е. дифракционные эффективности решетки в этих порядках.

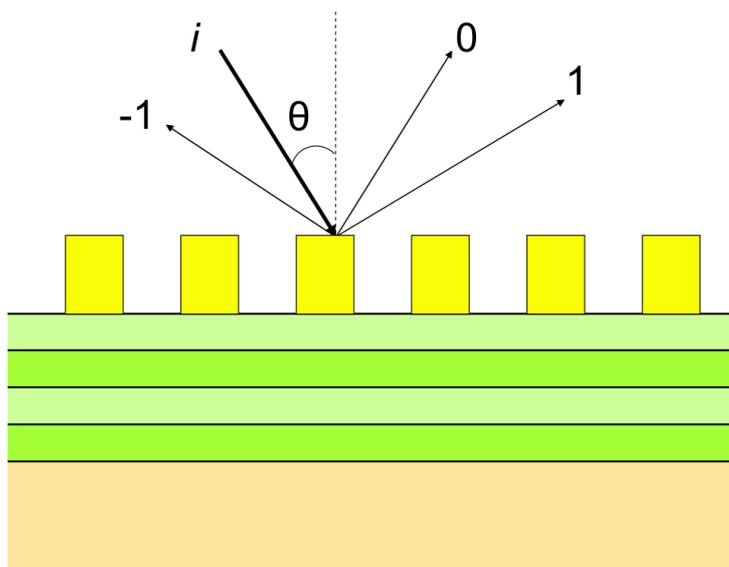


Рис. 1. Многослойная дифракционная решетка с прямоугольной формой профиля штриха.

В различных технических устройствах, в которых применяются дифракционные решетки, к ним предъявляются совершенно разные требования. Этот факт обуславливает необходимость в каждом случае перед изготовлением реальной дифракционной решетки и проведением экспериментальных исследований оптимизировать ее параметры (материал, форму профиля, период и т.п.) таким образом, чтобы она обладала заданными характеристиками (например, имела заданный спектр пропускания и/или отражения, заданные значения дифракционных эффективностей в различных порядках дифракции и т.д.). Такого рода задачи оптимизации – задачи

синтеза дифракционных решеток – традиционно решаются методами математического моделирования.

В данной работе рассматривается двумерная задача дифракции плоской электромагнитной волны на многослойной дифракционной решетке. Математическая постановка этой задачи сводится к уравнению Гельмгольца для одной из компонент электромагнитного поля волны, дополненному периодическими граничными условиями в поперечном направлении, а также парциальными условиями излучения на границах решетки в продольном направлении. Для получения численного решения поставленной математической задачи используется разработанный авторами гибридный численный метод, основанный на совместном применении неполного метода Галеркина и матричных методов [2-3]. Этот метод позволяет эффективно учитывать многослойное строение рассматриваемой дифракционной решетки.

В работе также приводятся результаты решения ряда задач синтеза многослойных дифракционных решеток для различных практических приложений. В частности, рассматриваются отражательные дифракционные решетки, которые могут использоваться в качестве зеркала внешнего резонатора полупроводникового лазера, а также пропускающие дифракционные решетки, которые могут играть роль разделителя лазерного луча с фиксированной длиной волны на несколько пучков или оптического ограничителя. Для решения задачи синтеза используются методы нулевого порядка (метод Нелдера-Мида [4-5]), а также градиентные методы [6-7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Palmer Ch., Loewen E. Diffraction Grating Handbook. 6th edition. Newport Corporation. 2005.
2. Петухов А.А. // Математическое моделирование. 2013. Т. 25. №6. С. 41-53.
3. Боголюбов А.Н., Петухов А.А., Трубецков М.К. // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии. 2016. Т. 17. С. 268–279.
4. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: «Мир». 1975.
5. Боголюбов А.Н., Петухов А.А., Трубецков М.К. // Физические основы приборостроения. 2014. Т.3. Вып.4. С.20-27.
6. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: «Наука». 1978.
7. Артемьева М.В., Боголюбов А.Н., Петухов А.А. // Физические основы приборостроения. 2020. Т. 9. №3. С. 4-13.

Погрешность экспоненциально сходящихся квадратур

В.С. Хохлачев¹, А.А. Белов^{1,2}

¹МГУ им. М.В. Ломоносова

²РУДН

valentin.mycroft@yandex.ru aa.belov@physics.msu.ru

Введение. Для решения многих практически важных задач в физике требуется вычислять одномерные интегралы с заданной точностью. Примерами являются прямое и обратное Фурье-преобразование, вычисление некоторых специальных функций (например, функций Ферми-Дирака, распределения Хольцмарка для напряженности микроскопического электрического поля в плазме и т.д.), расчет скорости реакции по заданному сечению и ряд других.

Чаще всего для этого используют метод трапеций на равномерной сетке. Оценка погрешности для такой квадратуры известна и составляет $O(h^2)$, где h шаг сетки. Есть несколько способов повышения точности (расчет на наборе сгущающихся сеток и рекуррентное уточнение по методу Ричардсона, уточнение по формуле Эйлера-Маклорена и др.) [1]. Все они дают степенную зависимость погрешности от шага сетки $O(h^m)$.

Существует ряд частных, но практически важных случаев, когда зависимость погрешности от шага становится не степенной, а экспоненциальной $\sim \exp(-1/h)$. Такое поведение погрешности в сотни и тысячи раз уменьшает трудоемкость вычислений.

Один из классов экспоненциально сходящихся квадратур – это интегралы от периодических функций по полному периоду. В работе [2] была сформулирована и доказана следующая

Теорема 1. ([2], стр. 392) Пусть $u(z)$ аналитическая в кольце $R^{-1} < |z| < R$, где $R > 1$, причём $|u(z)| \leq M_0$. Введём на единичной окружности равномерную сетку $z_n = \exp(2\pi i n/N)$, $n = 0, \overline{N}$. Рассмотрим интеграл и квадратурную формулу трапеций

$$I = \oint_{|z|=1} u(z) \frac{dz}{iz}, I_N = \frac{2\pi}{N} \sum_{n=1}^N u(z_n). \quad (1)$$

Тогда для погрешности квадратуры верна оценка

$$\delta = |I - I_N| \leq \frac{4\pi M_0}{R^N - 1}. \quad (2)$$

Очевидно, что теорема 1 заменой $z = e^{ix}$ сводится к аналогичной, но интегрирование будет проходить уже по полному периоду функции $u(e^{ix})$ на вещественной оси.

В работах [3-5] было показано, что зависимость оценки (2) от N может быть не мажорантной, а асимптотически точной. Такая ситуация реализуется, если $u(z)$ имеет только особенности типа полюсов первого порядка, а R взято таким образом, что ближайшая к единичной окружности особенность лежит на границе кольца $R^{-1} < |z| < R$. При этом подынтегральная функция неограниченно возрастает, если приближаться к особенности изнутри кольца. Таким образом, константа M_0 теряет свой привычный смысл из теоремы 1. Мы тщательно проанализировали метод доказательства теоремы 1, приведённый в [2] и обнаружили возможность существенного усиления результатов данной теоремы, при некоторых дополнительных условиях на подынтегральную функцию.

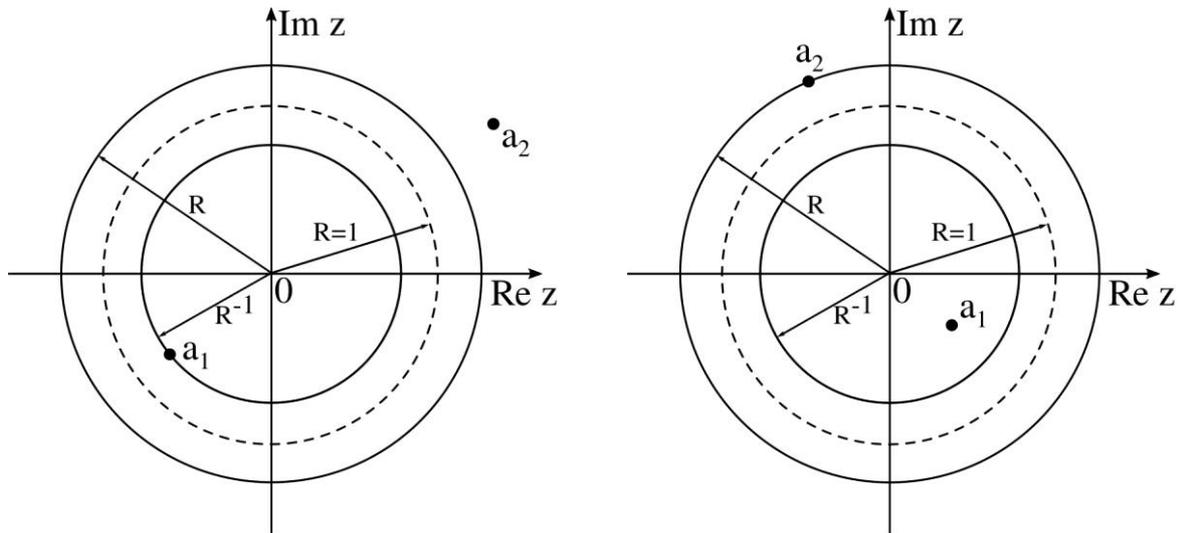


Рис. 1. Первое возможное расположение полюсов. Рис. 2. Второе возможное расположение полюсов.

Вычисление погрешности. Рассмотрим подробно контурный интеграл по единичной окружности от функции, которая имеет один простой полюс внутри неё и ещё один простой полюс вне. Этот случай соответствует интегралу, рассмотренному в [2]. Пусть точка a_1 лежит внутри, а точка a_2 снаружи $|z|=1$ и, функция $u(z)$ аналитична в полосе $R^{-1} < |z| < R$ с $R = \min\{1/|a_1|, |a_2|\}$. Тогда интеграл имеет вид

$$G = \oint_{|z|=1} g(z) dz = \oint_{|z|=1} \frac{u(z) dz}{(z-a_1)(z-a_2)} = 2\pi i \frac{u(a_1)}{(a_1-a_2)}. \quad (3)$$

Сделаем одно предположение ради упрощения выкладок. Оно слабо повлияет на результат. Пусть $u(z) = 1$, тогда подынтегральную функцию перепишем в таком виде

$$g(z) = \frac{1}{(z-a_1)(z-a_2)} = \frac{1}{(a_1-a_2)(z-a_1)} + \frac{1}{(a_2-a_1)(z-a_2)}. \quad (4)$$

Теперь разложим каждую дробь в ряд Лорана как сумму геометрической прогрессии

$$g(z) = \frac{1}{(a_1-a_2)(z-a_1)} + \frac{1}{(a_2-a_1)(z-a_2)} = \frac{1}{(a_1-a_2)} \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{a_1^{k_1}}{z^{k_1+1}} - \frac{1}{(a_2-a_1)} \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{z^{k_2}}{a_2^{k_2+1}}. \quad (5)$$

Будем пользоваться сеткой $z_n, n = \overline{0, N}$, которая введена в теореме 1. Получим явное выражение для шага сетки $\Delta z_n = z_{n+1} - z_n$

$$\Delta z_n = \exp\left(\frac{2\pi i(n+1)}{N}\right) - \exp\left(\frac{2\pi i n}{N}\right) = z_n \left(\exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right) - 1 \right) \underset{N \rightarrow \infty}{=} z_n \left(\frac{2\pi i}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \right). \quad (6)$$

Отбрасывая член $O(1/N^2)$ в выражении для шага сетки, запишем квадратурную формулу «трапеций» в следующем виде

$$G_N = \sum_{n=0}^{N-1} g(z_n) \Delta z_n = \frac{2\pi i}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(z_n) z_n. \quad (7)$$

Подставим представление $g(z_n)$ в виде суммы рядов в квадратурную формулу, затем поменяем местами ряды и конечную сумму. Последнее действие допустимо в силу абсолютной сходимости полученного двойного числового ряда (двойной ряд из модулей можно замажорировать суммой геометрической прогрессии). Получается следующее выражение для квадратурной формулы

$$G_N = \frac{2\pi i}{2N(a_1 - a_2)} \left[\sum_{s_1=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a_1^{s_1}}{z_n^{s_1}} + \sum_{s_2=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z_n^{s_2+1}}{a_2^{s_2+1}} \right] \quad (8)$$

Рассмотрим сначала два последних слагаемых в квадратных скобках. Для проведения преобразований нам потребуется следующий известный результат

$$\sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(\pm 2\pi i \frac{nk}{N}\right) = \begin{cases} N, k \div N \\ 0, k \not\div N \end{cases}. \quad (9)$$

Преобразуем второе слагаемое

$$\sum_{s_2=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z_n^{s_2+1}}{a_2^{s_2+1}} = \left\{ \begin{array}{l} (s_2+1) \div N \\ (s_2+1) = Np_2, p_2 = \overline{1, \infty} \end{array} \right\} = N \sum_{p_2=1}^{\infty} \frac{1}{a_2^{Np_2}} = N \frac{1/a_2^N}{1-1/a_2^N}. \quad (10)$$

Преобразуем первое слагаемое

$$\sum_{s_1=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a_1^{s_1}}{z_n^{s_1}} = \left\{ \begin{array}{l} s_1 \div N \\ s_1 = Np_1, p_1 = \overline{0, \infty} \end{array} \right\} = N \sum_{p_1=0}^{\infty} a_1^{Np_1} = N \frac{1}{1-a_1^N}. \quad (11)$$

Получаем

$$G_n = \frac{2\pi i}{N(a_1 - a_2)} \left[N \left(\frac{1}{1-a_1^N} + \frac{1}{a_2^N - 1} \right) \right] = \frac{2\pi i}{(a_1 - a_2)} \left[\frac{1}{1-a_1^N} + \frac{1}{a_2^N - 1} \right]. \quad (12)$$

Наконец вычислим погрешность

$$\Delta_N = |G - G_N| = \left| 2\pi i \left(\frac{1}{(a_1 - a_2)} \left(1 - \frac{1}{1-a_1^N} \right) + \frac{1}{(a_2 - a_1)} \left(\frac{1}{a_2^N - 1} \right) \right) \right|. \quad (13)$$

Полученный результат легко обобщить на случай, когда $u(z)$ не равна тождественно единице. Имеет место следующий более общий результат

$$\Delta_N = |G - G_N| = \left| 2\pi i \left(\frac{u(a_1)}{(a_1 - a_2)} \left(1 - \frac{1}{1-a_1^N} \right) + \frac{u(a_2)}{(a_2 - a_1)} \left(\frac{1}{a_2^N - 1} \right) \right) \right|. \quad (14)$$

Апробация оценки. Были проведены расчёты с тестовым интегралом, имеющим известное точное значение

$$J = \oint_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{(z-a_1)(z-a_2)} dz = 2\pi i \frac{\sin(a_1)}{(a_1 - a_2)}, \quad (15)$$

где $a_1 = 0.6 + 0.6i$ и $a_2 = 2 - i$. В данном случае $1/|a_1| \approx 1.17851$ и $|a_2| \approx 2.23606$, поэтому R из теоремы 1 равняется $1/|a_1|$. В ходе расчётов была получена фактическая погрешность, вычислялась оценка Трефетена-Вайдемана и наша оценка.

По этим данным на рис. 3 был построен график сходимости в полулогарифмическом масштабе. Здесь чёрные точки обозначают фактическую погрешность, белые кружки обозначают нашу оценку, а чёрные квадраты обозначают оценку Трефетена-Вайдемана с константой $M_0 = 1$. Напомним, что эта константа теряет свой смысл из теоремы 1, если на границе кольца лежит особенность, поэтому мы взяли её единичной.

Из графика видно, что наша оценка совпадает с фактической погрешностью уже при $N > 4$. Оценка Трефетена-Вайдемана не передаёт начальный участок кривой. Она описывает кривую начиная с $N \cong 15$. Зависимость от N в этой оценке асимптотически точна, но истинное значение константы неизвестно. Поэтому оценка точности, построенная в данной работе, намного сильнее оценки Трефетена-Вайдемана.

Данные выводы подтверждаются и графиком на рис.4. Здесь построена зависимость отношения оценок погрешности к фактической точности. Цифрой 1 обозначена оценка Трефетена-Вайдемана, а цифрой 2 обозначена наша оценка. Видно, что при $N > 4$ наша оценка в разы лучше описывает погрешность квадратуры для интеграла (15), чем оценка Трефетена-Вайдемана. Это говорит о высокой ценности данной оценки.

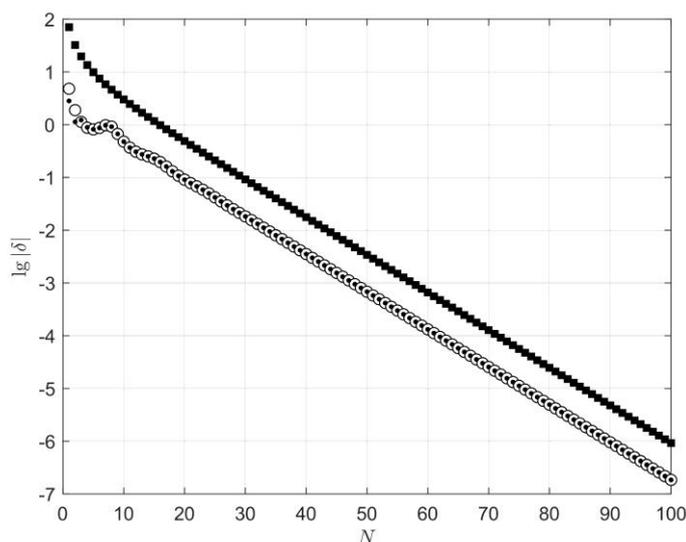


Рис. 3. График сходимости для интеграла (15).

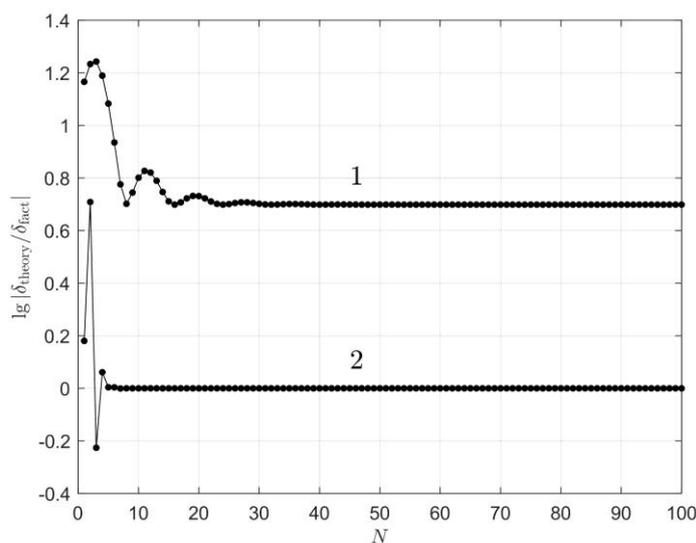


Рис. 4. Отношение теоретических оценок к фактической точности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Калиткин Н.Н., Альшина Е.А. Численные методы. Том. 1. Численный анализ. М., Академия. 2013.
2. Trefethen L.N., Weideman J. A. C. // SIAM Review. 56:3 (2014). 385.
3. Kalitkin N.N., Kolganov S.A. // Doklady Math. 95:2 (2017). 157.
4. Белов А.А., Калиткин Н.Н., Хохлачев В.С. // Препринты ИПМ 2020. № 75. 24 с.
5. Хохлачев В.С., Белов А.А., Калиткин Н.Н. // Изв. Российской академии наук. Серия физическая., 85:2 (2021), 282-288.

Анализ влияния сильных симметричных колебаний поверхности жидкой струи в составе антенны на свойства антенны

С.В. Ходырев, Т.К. Артёмова, А.А. Очиров
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
sv-khodyrev@mail.ru

Среди требований, предъявляемых к современным антеннам, выделяются два противоположных: стабильность характеристик при отклонениях параметров и возможность управления свойствами в широких пределах. Один из способов изменения свойств антенны – изменение геометрии и доли различных веществ в её составе. В случае антенны, содержащей жидкость, такие изменения могут происходить, например, за счёт изменения радиуса, скорости истечения и формы поверхности струи путём изменения формы насадков или напора жидкостного насоса [1].

Вытекающая из отверстия насадка свободно или под напором струя жидкости под действием капиллярно-волновых движений распадается на некотором расстоянии от отверстия насадка. Это расстояние определяется свойствами жидкости (плотность, поверхностное натяжение), радиусом отверстия и формой насадка, а также напором, создаваемым насосом. Таким образом цельная жидкостная часть антенны формируется нераспавшейся частью струи. Изменяя один из влияющих факторов, можно получить цельную часть различной длины. Предыдущие исследования [2] показали, что изменение длины цельной части существенным образом сказывается на свойствах антенны, содержащей жидкую струю. Однако, остался открытым вопрос, насколько влияет изменение формы струи при сохранении её длины. Такие изменения возможны, например, если, помимо начальных возмущений, вызванных неидеальностью поверхности насадка, подействовать на жидкое вещество и другими воздействиями.

Целью данной работы являлся поиск ответа на этот вопрос. Исследуется возможность влияния на свойства антенны, содержащей жидкую струю, волнового гармонического движения.

Модель антенны представляет собой монополь длины l с круговым рефлектором фиксированного радиуса R , имеющим центральное отверстие. В отверстие вставлен насадок с радиусом r , и с помощью насоса через него подаётся струя жидкости, имеющей при выходе из отверстия скорость u . Предполагалось, что на цельной части струи, длина которой рассчитывалась в соответствии с [2], можно создать гармоническое симметричное отклонение свободной поверхности жидкости от равновесного состояния. Это отклонение описывалось двумя параметрами: амплитуда A и частота f . В ходе исследования A изменяли от минимального значения 0 (соответствующего равновесной поверхности жидкости) до значения, близкого к r настолько, чтобы монополь всё время был покрыт слоем жидкости. Частоту колебаний рассчитывали следующим образом. Определяли частоту капиллярно-волнового движения, приводящего к распаду струи, для заданных радиуса насадка r и скорости u . Частоту изменяли в окрестности этого значения в пределах, соответствующих 10%-му удлинению или укорочению цельной части струи.

Исследование проводилось следующим образом. Была построена электродинамическая модель антенны: четвертьволновый монополь был рассчитан на работу в нелицензируемом диапазоне частот 433 МГц, выполнялся из медной проволоки диаметром 1 мм. В качестве жидкого диэлектрика использовалась солёная вода с солёностью 35 г/л при температуре 20 °С. Скорости струи на выходе из отверстия и радиус насадка соответствовали условиям ламинарного течения жидкости. Также при выбранных диапазонах этих величин можно пренебрегать возможностью

существования неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. Производилось численное решение уравнений Максвелла, получались напряжённости электрического и магнитного полей, а затем и свойства антенны как излучателя. Получали частотную зависимость коэффициента отражения от входа антенны в логарифмическом масштабе S_{11} , а также полный коэффициент полезного действия антенны, учитывающий как рассогласование антенны с фидером, так и потери в частях антенны.

На рис. 1 приведена частотная зависимость коэффициента полезного действия антенны при различных значениях амплитуды волнового движения жидкого диэлектрика для радиуса отверстия насадка 2 мм и скорости истечения жидкости 2 м/с. КПД приведён в логарифмическом масштабе: чем ближе значения к нулю, тем эффективнее работает антенна. Здесь чёрная линия соответствует $A=0$ (равновесная поверхность), красная – $A=r/8$, синяя – $A=r/4$, жёлтая – $A=3r/8$, фиолетовая – $A=r/2$. На основной частоте различия в КПД не превысили 1 дБ, а на частотах гармоник искажённая форма позволила несколько повысить эффективность антенны. Влияние изменения частоты f сказались ещё слабее: разница с невозмущённой поверхностью не превышала 0,5 дБ при фиксированных A . Поведение S_{11} при изменении A в окрестности рабочей частоты следующее: в нижней части диапазона согласование ухудшилось, а в верхней – улучшилось, однако, незначительно – до 1 дБ. На более высоких частотах с ростом A области наилучшего согласования с фидером сдвигаются в сторону более низких частот.

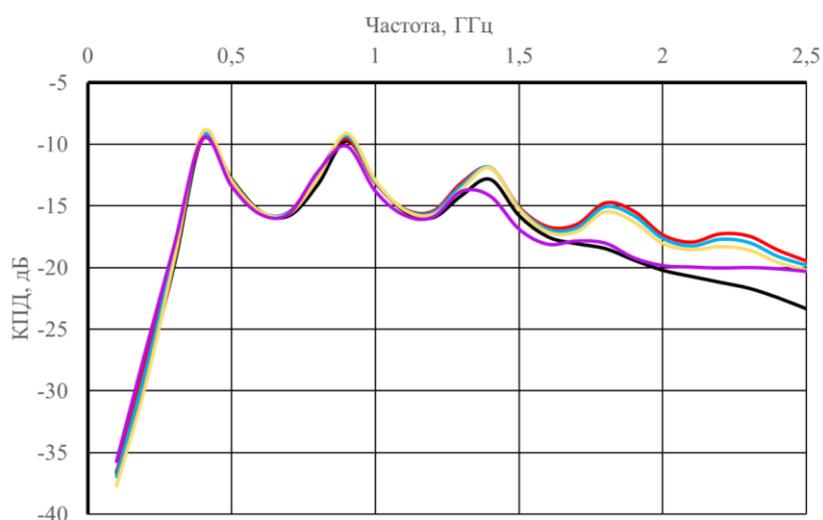


Рис. 1. Частотная зависимость коэффициента полезного действия антенны с жидким диэлектриком при различных значениях амплитуды волнового движения диэлектрика A

По итогам работы можно сделать вывод: исследованное гармоническое симметричное возмущение поверхности оказывает незначительный эффект по сравнению с управлением за счёт изменения скорости истечения и радиуса насадка, и значит, можно рассматривать антенну с жидким элементом как стабильную к возмущениям такого рода и ограничиться в решении гидроэлектродинамической задачи о формировании поверхности струи рядом приближений.

ЛИТЕРАТУРА

1. S.G. O’Keefe, S.P. Kingsley // IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. 2007. V. 6. P. 533–536.
2. А.А. Очиров и др. // Учен. зап. физ. фак-та Моск. ун-та. 2019. № 5.

Вычисление собственных значений задачи Захарова-Шабата

А.С. Долматов

МГУ им. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, первый курс магистратуры
dolmatov.as16@physics.msu.ru

Распространённой в волоконной оптике моделью является начально краевая задача для нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ) с кубической нелинейностью[1]. В безразмерных переменных НУШ можно записать в следующем виде:

$$i \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + 2|q|^2 q = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (1)$$

$$q(x, 0) = q_0(x), x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Нелинейное уравнение Шрёдингера вполне интегрируемо [2-4], и для его решения можно использовать метод обратной задачи рассеяния. При этом необходимо решить задачу рассеяния Захарова-Шабата:

$$\begin{cases} v_{1x} + ikv_1 = q(x)v_2 \\ v_{2x} - ikv_2 = -q^*(x)v_1, x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3)$$

$$v(-\infty) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ikx}$$

Амплитуды рассеяния $a(k), b(k)$ определяются через решения задачи (3) при вещественном k , а дискретные собственные значения соответствуют нулям $a(k)$ в верхней полуплоскости. Продуктивным подходом является поиск амплитуд рассеяния в виде полинома от переменной $z = e^{ikh}$, где h – шаг сетки [5-6]. При такой замене поиск нулей функции $a(k) = p(e^{ikh})$ сводится к поиску корней полинома внутри окружности единичного радиуса. Степень построенного полинома $p(z)$ пропорциональна числу узлов сетки $N \sim 2^{12} - 2^{14}$, и поэтому очень велика. Встроенные алгоритмы поиска корней полинома здесь не применимы, так как они затратные как по памяти $O(N^2)$, так и по числу операций $O(N^3)$. Итерационные методы также тяжело применять, так как корней может быть много (≈ 100), и разные начальные точки могут сходиться к одним и тем же корням. Для быстрого вычисления корней мы предлагаем использовать метод, основанный на контурных интегралах[7]. Вначале считаются величины s_k :

$$s_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{p'(z)}{p(z)} z^k dz = \sum_{i=1}^K z_i^k, \quad (4)$$

при $k = 0, 1, \dots, K$, где K – число корней внутри окружности, z_i – корни. По ним вычисляются коэффициенты из формул Виета:

$$\sigma_k = (-1)^k \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} z_{i_1} \dots z_{i_k} \quad (5)$$

Затем строится полином:

$$P = z^K + \sigma_1 z^{K-1} + \dots + \sigma_{K-1} z + \sigma_K \quad (6)$$

Его корнями будут являются величины z_i . При это его степень K достаточно мала, так что для вычисления его корней можно использовать встроенные методы. Интегралы s_k можно вычислить быстро с помощью БПФ. При этом итоговая сложность алгоритма составит $O(KN \log N + K^3)$ арифметических операций.

Расчеты показывают, что уже при $K \approx 20$ этот метод оказывается неустойчивым и корни восстановить не удаётся. Чтобы избежать этой проблемы, мы делим круг единичного радиуса на последовательность непересекающихся колец, таких, что внутри каждого кольца не больше 15 корней. Для каждого кольца можно устойчиво посчитать корни, лежащие в нем, а затем объединить результат.

На картинках ниже изображены результаты работы алгоритма. На рисунке 1 изображены собственные значения квазислучайного потенциала, посчитанные встроенным в программный комплекс MatLab методом roots, а так же нашим алгоритмом. Визуально корни совпадают. На рисунке 2 изображен график зависимости времени работы алгоритмов от числа узлов вычислительной сетки в двойном логарифмическом масштабе. Видно, что описанный выше алгоритм гораздо быстрее встроенного. Наклон кривой близок к линейному, что подтверждает оценку скорости метода.

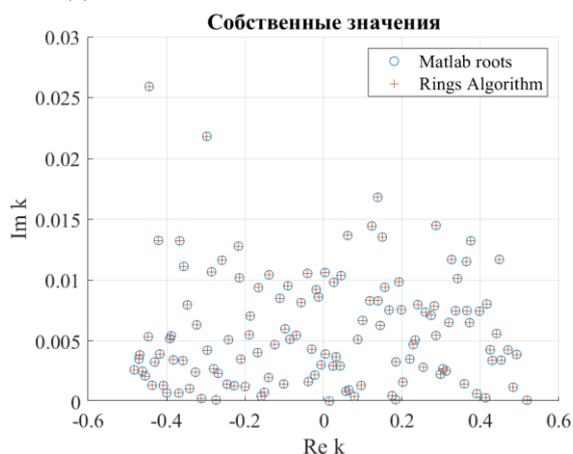


Рис. 1. Собственные значения

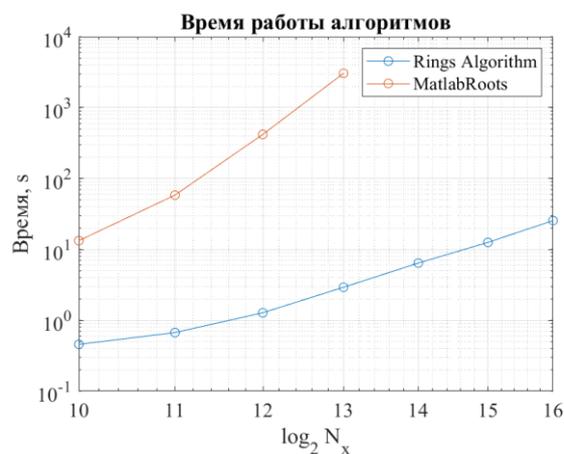


Рис. 2. Время работы алгоритмов

ЛИТЕРАТУРА

1. Агравал Г.П. Нелинейная волоконная оптика [Книга] 1996г.
2. Дж.Л. Лэм Введение в теорию солитонов [Книга]. - [б.м.] : Изд.: Мир; 1983.
3. М.Абловиц, Х. Сигур. Солитоны и метод обратной задачи [Книга] – Пер. с англ. – М.: Мир, 1987. -479с., ил
4. В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский Теория солитонов: метод обратной задачи [Книга] – Наука 1980.
5. M. I. Yousefi and F. R. Kschischang «Information Transmission Using the Nonlinear Fourier Transform, Part I: Mathematical Tools» IEEE Transactions on Information Theory vol. 60, no. 7, 2014, pp. 4312-4328
6. M. I. Yousefi and F. R. Kschischang «Information Transmission Using the Nonlinear Fourier Transform, Part II: Numerical Methods» IEEE Transactions on Information Theory vol. 60, no. 7, 2014, pp. 4329-4345
7. L. M. Delves and J. N. Lyness, Math. Comput. 21, 543 (1967).