

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ ВОЛНОВОЙ ФИЗИКИ

Методика совмещения динамических схем в дискретной модели Власова-Дарвина	
<i>С.С. Анненков, Л.В. Бородачев</i>	3
Решение задач синтеза многослойных отражающих и пропускающих дифракционных решеток с применением градиентных методов	
<i>А.Н. Боголюбов, А.А. Петухов, М.В. Артемьева</i>	5
Верификация моделей микрополя по спектрам плотной лазерной плазмы	
<i>А.А. Белов, Н.Н. Калиткин</i>	7
Метод Галеркина в задачах расчета двумерно-периодических волноведущих структур	
<i>А.А. Быков</i>	9
Метод гомотопии для расчета собственных волн двумерно-периодических решеток	
<i>А.А. Быков</i>	13
Уединенные волны в двумерной сверхрешетке на основе графена в столкновительном режиме	
<i>С.Ю. Глазов, В.С. Животикова, Г.А. Сыродоев</i>	17
Повышение точности метода FDTD при моделировании распространения излучения через слоистые среды	
<i>Ж.О. Домбровская</i>	20
Сверхбыстрый метод расчёта одномерных фотонных кристаллов	
<i>А.А. Белов, А.Н. Боголюбов, Ж.О. Домбровская, С.О. Жбанников</i>	22
Поиск оптимального положения источника излучения в конической безэховой камере методом математического моделирования	
<i>Т.А. Кузьмич, Н.Е. Шапкина, Н.П. Балабуха, Н.Л. Меньших</i>	25
Асимптотическое разложение решения задач электромагнитной теории дифракции на объектах с коническими точками	
<i>А.Н. Боголюбов, И.Е. Могилевский, В.В. Ровенко</i>	28
Метаморфозы структуры дендритных образований	
<i>А.В. Косырев, П.В. Короленко, Ю.В. Рыжикова</i>	31

Моделирование бесконечных импедансных волноводов постоянного сечения

А.Н. Боголюбов, А.И. Ерохин, М.И. Светкин..... 34

Анализ результатов сверхразрешения тени Черной Дыры Powehi

Е.Н. Терентьев, Н.Е. Шилин-Терентьев 37

Обратная задача математического моделирования формы однозеркального параболического коллиматора

Ф.Б. Хлебников, Д.А. Коняев, А.Н. Боголюбов, Н.Е. Шапкина..... 40

Улучшение оценок погрешности для экспоненциально сходящихся квадратур

В.С. Хохлачев, А.А. Белов, Н.Н. Калиткин 43

Исследование электромагнитного поля вблизи цилиндра с двуугольником в сечении

М.М. Шушарин, И.Е. Могилевский 45

Методика совмещения динамических схем в дискретной модели Власова-Дарвина

С.С. Анненков, Л.В. Бородачев
Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
borodach2000@mail.ru

Настоящая работа продолжает тематику публикации [1] и посвящена развитию методики численного решения динамических схем в «дарвинских алгоритмах». Это обусловлено актуальностью использования при численном анализе низкочастотных явлений плазмофизики дискретного моделирования на основе самосогласованного формализма Власова [2] с безызлучательным (магнитоиндукционным) приближением Дарвина [3] для внутренних электромагнитных полей. Последнее позволяет рассматривать плазму как систему с мгновенным дальним действием, что исключает наличие в ней свободных электромагнитных волн. В контексте конечно-разностной аппроксимации аналитической модели это приводит к снятию актуальной для дискретных плазменных алгоритмов проблемы устойчивости (а вместе с ней и ограничений на временной шаг, обусловленных критерием Куранта [4]) при использовании экономичных (явных) схем численного решения полевых уравнений.

Таким образом, теперь временной шаг эволюции самосогласованной (Власов-Дарвин) дискретной системы, по сути определяющий экономичность численного алгоритма, обусловлен именно процедурой разностного интегрирования уравнений движения частиц, выбор которой обусловлен как физическими соображениями, так и условиями ее устойчивости.

В этой связи представляет интерес использование не одной, а нескольких динамических схем в рамках одного плазменного кода, позволяющее существенно минимизировать численные затраты, что особенно актуально для компьютерных экспериментов в области крупномасштабных явлений физики плазмы.

Предлагаемая методика оптимизации процедуры численного решения уравнений движения заключается в рациональном использовании в счете и явной (экономичной, но условно устойчивой), и неявной (безусловно устойчивой, но менее экономичной) схем, обусловленном их физической адекватностью конкретной стадии развития исследуемого процесса.

Ранее, в публикации [1], был сформулирован критерий переключения и приведено сопряжение явных и неявных динамических схем в процессе текущего счета. Продемонстрирована эффективность предложенной методики оптимизации на основе (в процессе) кинетического моделирования генерации и развития электромагнитной неустойчивости Вайбеля [5], имеющей многообразные проявления в различных областях физики магнитоактивной плазмы и в силу этого достаточно хорошо изученной. Напомним, что для этих целей, как и в настоящих исследованиях, был выбран программный код, реализующий дискретную модель Власова-Дарвина в гамильтоновом представлении с геометрией фазового пространства (X, V_x, V_y, V_z) и периодическими граничными условиями [6].

В данной работе нас интересовала количественная оценка численной экономичности рассматриваемого мультисхемного подхода. В этой связи были проведены исследования трех разностных динамических схем: явной схемы 2-ого порядка «с перешагиванием» [4] с условием устойчивости $\tau\omega_{pe} < 2$ (здесь τ - величина временного шага эволюции модельной системы, ω_{pe} - ее ленгмюровская частота), полной безусловно устойчивой неявной схемы 2-ого порядка точности [4], неявной безусловно устойчивой редуцированной схемы 2-ого порядка точности [7].

Здесь, прежде всего, были получены количественные оценки экономичности и точности редуцированной неявной схемы в сравнении с полной неявной для обоснования корректности использования неявной редуцированной схемы в предлагаемой методике. Исследование проводилось на тестовых задачах движения частиц в электрическом, магнитном, и скрещенных (электрический дрейф) полях. Показано, в раках L2 ошибки разностного решения по схеме «с перешагиванием», обе неявные схемы (при том же шаге) сходятся всего за две итерации и имеют практически идентичную точность. Однако при этом редуцированная схема более эффективна: требует примерно на 5% меньше вычислительного времени и позволяет экономить оперативную память, - что существенно в рамках крупномасштабного моделирования.

Эти результаты были подтверждены в двумерной задаче (синтетического теста) движения заряженной частицы в экспоненциально возрастающем магнитном поле, типичной для численного (кинетического) моделирования сильно нелинейных плазменных процессов с акцентированным магнитным полем.

Далее, в работе развита методика текущего сопряжения схем численного интегрирования уравнений движения заряженных частиц. Введен новый параметр, связанный с оценкой счетного времени для продвижения самосогласованной модельной системы с использованием как явной, так и неявной динамических схем на дискретный временной интервал, определяемый необходимым уровнем разрешения текущей фазы процесса. При этом соотносятся численные затраты схемы с перешагиванием, определяемые условиями устойчивости (диктующими максимально возможный шаг интегрирования динамических уравнений) и соответствующие (при том же шаге) затраты неявной редуцированной схемы, определяемые сопутствующим итерационным процессом (как показано выше, двухпроходным). Требуемые данные могут быть получены в процедуре «предстарта», присутствующей в каждом корректно поставленном компьютерном эксперименте. Отметим, что параметр активизируется при выходе исследуемого процесса на квазилинейный (слабовозмущенный или стагнирующий) этап развития.

Стоит отметить, что предложенная методика особенно актуальна, как нам представляется, при численной симуляции именно крупномасштабных и медленно переменных процессов разреженной магнитоактивной плазмы, т.е. там, где наиболее эффективно приложение дискретных дарвинских алгоритмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Бородачев, С. С. Анненков // УЗФФ, 2019, № 5, С. 1950402-1.
2. А. А. Власов “Теория многих частиц” М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
3. С.G. Darwin // Phil. Magazine. 1920, V. 39, P. 537.
4. R.W. Hockney, J.W. Eastwood “Computer Simulation Using Particles” N.-Y.: McGraw-Hill, 1981.
5. L.V. Borodachev, D.O. Kolomiets // J. Plasma Phys., 2011, V. 77, P. 277.
6. Л. В. Бородачев, А. А. Беляев // УЗФФ, 2017, № 4, С. 1740702-1.
7. Л.В. Бородачев // ЖВМиМФ. 1991, Т. 31, № 6, С. 934.

Решение задач синтеза многослойных отражающих и пропускающих дифракционных решеток с применением градиентных методов

А.Н. Боголюбов, А.А. Петухов, М.В. Артемьева
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
физический факультет, Москва, Россия
petukhov@physics.msu.ru

Дифракционные решетки находят широкое применение в лазерной технике, спектроскопии, космических исследованиях и многих других областях современной науки и техники [1]. Для эффективного использования в той или иной оптической системе форма профиля решетки оптимизируются так, чтобы решетка соответствовала предъявляемым к ней требованиям, а именно имела определенный спектр пропускания и/или отражения, определенные значения дифракционных эффективностей в различных порядках дифракции и т.д. Таким образом, задачи синтеза или оптимизации дифракционных решеток являются актуальными задачами современной физики.

Задачи синтеза дифракционных решеток по своей сути являются задачами оптимального управления и традиционно решаются методами математического моделирования. Математическую постановку обычно составляет задача поиска минимума некоторого целевого функционала, зависящего от параметров решетки. Минимизация этого функционала осуществляется различными методами, имеющими как достоинства, так и недостатки. Применение методов нулевого порядка (например, метода Нелдера-Мида) является эффективным лишь тех для случаев, когда профиль решетки имеет простую форму, заданную 3–4 параметрами [2,6]. В тех случаях, когда рассматривается решетка с достаточно сложной формой профиля, для описания которой требуется большое число параметров, возникает необходимость использовать более устойчивые методы первого порядка [5-6]. В отличие от методов нулевого порядка, применение методов первого порядка требует вычисления градиента целевого функционала [3-5]. Для этих целей используются различные подходы. Наиболее простым представляется метод конечных разностей. В то же время такой подход обладает существенным недостатком, связанным с пропорционально возрастающим количеством вычислений целевого функционала на каждой итерации алгоритма с увеличением количества управляющих параметров. Этому недостатка лишен метод вычисления градиента при помощи решения сопряженной задачи, для применения которого на каждом шаге минимизации достаточно лишь одного вычисления функционала, вне зависимости от числа управляющих параметров.

В данной работе рассматривается применение градиентных методов к решению задач синтеза одномерных многослойных отражающих и пропускающих дифракционных решеток, состоящих непосредственно из решетки с прямоугольным профилем штриха, подложки и некоторого числа однородных слоев, расположенных между ними. При этом период профиля разбивается на несколько равных между собой подпериодов, а факторы заполнения, соответствующие каждому из таких подпериодов, представляют собой набор управляющих параметров. Параметры оптимизируются таким образом, чтобы синтезируемые решетки могли обеспечить максимально близкую к 100% дифракционную эффективность в определенных дифракционных порядках в спектре отражения или пропускания в заданном диапазоне длин волн.

Математическая постановка задачи синтеза формулируется как задача оптимального управления и заключается в минимизации зависящего от управляющих параметров решетки целевого функционала, представляющего собой в общем виде интегральную характеристику дифракционной решетки в заданном диапазоне длин

волн в отношении квадратичного отклонения дифракционной эффективности от требуемого значения (100%). Для минимизации целевого функционала используются градиентные методы, и вычисление градиента осуществляется при помощи решения сопряженной задачи с выбранными специальным образом граничными условиями [5]. Прямая и сопряженная задачи решаются гибридными методами, основанными на совместном применении неполного метода Галеркина и метода матриц переноса [7].

В работе описано решение ряда задач синтеза отражающих и пропускающих дифракционных решеток. Рассмотрены отражающие многослойные решетки с одним и двумя управляющими параметрами, использующиеся, например, в качестве зеркала внешнего резонатора полупроводникового лазера. Кроме того, рассмотрены пропускающие решетки с одним и десятью параметрами, которые могут играть роль, соответственно, разделителя лазерного луча с фиксированной длиной волны на несколько пучков или оптического ограничителя.

Представленный метод вычисления градиента при помощи решения сопряженной задачи сравнивается с методом конечных разностей. Показано, что при решении задачи синтеза пропускающей дифракционной решетки с десятью параметрами алгоритм с вычислением градиента при помощи решения сопряженной задачи оказывается в 5 раз быстрее, чем аналогичный алгоритм с вычислением градиента конечно-разностным методом.

Обсуждается возможность рассмотрения более общей постановки задачи синтеза, при которой оптимальная форма профиля решетки без каких-либо специальных априорных предположений (кроме практической реализуемости) может быть получена непосредственно в результате решения задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Palmer Ch., Loewen E. *DiffractionGratingHandbook*. 6th edition. Newport Corporation. 2005.
2. Боголюбов А.Н., Петухов А.А., Трубецков М.К. // *Физические основы приборостроения*. 2014. Т.3. Вып.4. С.20-27.
3. Elschner J., Schmidt G. // *J. Comput. Phys.* 1998. Vol. 146. P.603-626.
4. Feijóo G.R. // *J. Opt. Soc. Am. A*. 2008. Vol.25 №8. P.1906-1920.
5. Федоренко Р.П. *Приближенное решение задач оптимального управления*. М.: «Наука». 1978.
6. Химмельблау Д. *Прикладное нелинейное программирование*. М.: «Мир». 1975.
7. Боголюбов А.Н., Петухов А.А., Трубецков М.К. // *Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии*. 2016. Т. 17. С. 268–279.

Верификация моделей микрополя по спектрам плотной лазерной плазмы

А.А. Белов^{1,2}, Н.Н. Калиткин³

¹МГУ им. М.В. Ломоносова

²РУДН

³ИПМ им. М.В. Келдыша

aa.belov@physics.msu.ru kalitkin@imamod.ru

Проблема. Плотная плазма используется в очень многих технических и экспериментальных конструкциях: сильноточные электрические разряды, мощные газоразрядные лазеры, магнитокумулятивные генераторы, термоядерные мишени и т.д. Расчет таких конструкций требует знания оптических свойств плазмы. На эти свойства сильно влияет так называемое микрополе - это электрическое поле внутри плазмы, порожденное хаотическим тепловым движением ионов и свободных электронов. Это поле флуктуирует во времени и пространстве.

Модели микрополя. До сих пор для кулоновских систем не найдено математически строгих методов исследования. Существуют лишь более или менее удачные модели. Уже 100 лет предпринимаются попытки построить такие модели для количественного описания свойств микрополя.

В данной работе приведен критический анализ существующих моделей микрополя и показано, что почти все они неправильно описывают «хвосты» функции распределения и не могут предсказать количество экспериментально наблюдаемых спектральных линий.

Ранее авторами была предложена модель QUIP (QUasi-Independent Particles), полученная из первых принципов [1]. Эта модель правильно описывает «хвосты» функции распределения и даже пространственную неоднородность микрополя.

Апробация модели. Проведена апробация модели путем сравнения с экспериментами по спектрам излучения сверхплотной лазерной плазмы. Отмечено, что сравнение следует проводить по числу наблюдаемых линий в спектральных сериях, поскольку именно это число сильно зависит от принятой модели. Выбраны эксперименты, наиболее подходящие для такой проверки. Это эксперименты по свечению плазмы Al или Ag, в которых видны лаймановские серии водородо- и гелиеподобных ионов [2-4].

Наиболее представителен эксперимент [3] с плазмой Ag+Kr 50/50. Полученный спектр приведен на рис. 1. На нем видны 3 линии лаймановской серии водородоподобного иона Ag^{+17} и вся лаймановская серия гелиеподобного иона Ag^{+16} . В последней серии интенсивность пятой линии мала, а последующие линии незаметны. Расчет показал, что серия Ag^{+16} светит при температуре $T \sim 400$ эВ, $n \sim 0.2$ г/см³.

На рис. 2 показаны относительные интенсивности различных линий этой серии как экспериментальные (площади контуров линий на рис. 1), так и рассчитанные по разным моделям в водородоподобном приближении.

Ни одна модель не может описать интенсивность а-линии гелиеподобного иона Ag^{+16} , поскольку к ней не применимо водородоподобное приближение. Для остальных линий серии оно применимо достаточно хорошо. Но эта причина не имеет отношения к моделям микрополя.

В эксперименте наблюдается 5 линий. Модель QUIP правильно описывает наблюдаемое число линий и интенсивности линий b - e. По модели SHO [5] должны наблюдаться 6 линий. В модели Хольцмарка [6] видны только 3 линии.

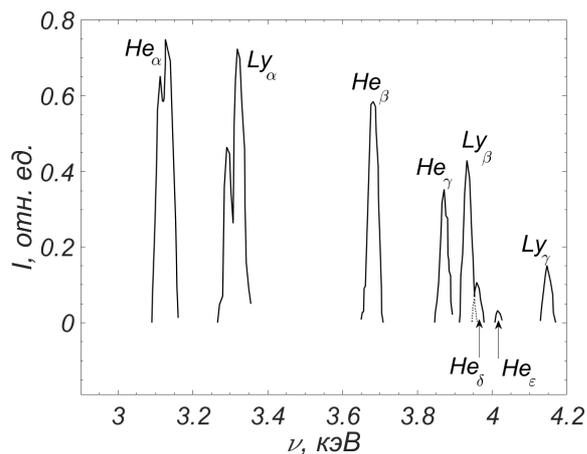
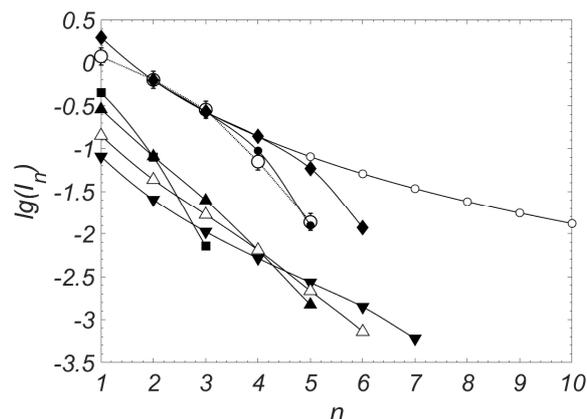


Рис. 1. Спектр Ar^{+16} в эксперименте [31]



Относительные интенсивности линий спектра Ar^{+16} ; пунктир – эксперимент [31]; сплошные линии – модели: ● – QUIP, ◆ – SHO, ■ – Хольцмарк, ▼ – модель [8], ▲ – модель [9], Δ – модели [7], [10], ○ – расчет без учета микрополя.

Разные варианты модели APEX [7-9] не согласуются между собой. Расчет по модели Хупера [10] практически совпадает с вариантом модели APEX [7], поэтому обе модели показаны одной кривой. Эти модели предсказывают на одну линию больше, чем в эксперименте. Модель [8] предсказывает значительно большее число линий, чем наблюдается в эксперименте. Модель [9] предсказывает правильное число наблюдаемых линий, однако интенсивность линий g и d несколько слабее по сравнению с интенсивностью b-линии, чем в эксперименте.

Таким образом, наилучшее согласие с экспериментом дает модель QUIP.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белов А.А., Калиткин Н.Н. // ДАН. 489:1 (2019). 22.
2. Kilkenny J.D., Lee R.W., Key M.H. et al. // Phys. Rev. A. 22:6 (1980). 2746.
3. Hooper C.F., Jr., Mancini R.C., Kilcrease D.P. et. al. // SPIE. High intensity laser-matter interactions. 913 (1988). 129.
4. Burris-Mog T.J., Mancini R.C., Bailey J.E. et al. // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 99 (2006). 120.
5. Broyles A.A. // Phys. Rev. 100 (1955). 1181.
6. Holtzmark J. // Ann. Phys. 58 (1919). 577.
7. Iglesias C.A., Lebowitz J. // Phys. Rev. A. 30 (1984). 2001.
8. Iglesias C.A., Lebowitz J.L., MacGowan D. // Phys. Rev. A. 28 (1983). 1667.
9. Dufty J.W., Boercker D.B., Iglesias C.A. // Phys. Rev. A. 31 (1985). 1681.
10. Tighe R., Hooper C. J., Jr. // Phys. Rev. A. 15 (1977). 1773.

Метод Галеркина в задачах расчета двумерно – периодических волноведущих структур

А.А. Быков

МГУ им М.В.Ломоносова, Физический факультет, кафедра математики.

E-mail: abkov@yandex.ru

1. Аннотация. Сформулирована и обоснована математическая модель двумерно-периодической волноведущей среды, основанная на применении метода гомотопии и метода Галеркина. Решение задачи о собственных волнах находится из задачи Коши для волнового числа и задачи Пфаффа для поля собственной моды. Это позволяет построить дисперсионную кривую моды с заданной пространственной структурой. Построено также разложение решения в ряд по степеням малого параметра. Приводятся результаты расчета положения запретных зон.

2. Введение. Задача расчета собственных волн периодической по двум переменным среды с неоднородным диэлектриком привлекает к себе внимание на протяжении нескольких десятилетий. Основные приложения связаны с периодическими волноведущими структурами, используемыми для передачи информации, исследованием волн в кристаллической решетке, исследование распространения световых волн в периодических структурах, созданных в сжимаемой среде при прохождении звуковых волн. В последнее время наряду с периодическими в различных областях микроволновой и оптической техники все более широко применяются двумерно-периодические (2D–периодические) волноведущие структуры. Дисперсионные характеристики 2D–периодических структур могут обеспечить более высокие параметры некоторых типов оптоэлектронных и акустоэлектронных элементов, оптической и акустооптической томографии, лазерной техники, в технике фотонных кристаллов и фотонных решеток. На данный момент отсутствует метод расчета дисперсионных характеристик 2D–периодической структуры с сильным возмущением показателя преломления. Структура фазовых поверхностей поля в такой среде может быть весьма сложной. Могут существовать критические значения параметров, при достижении которых структура поля претерпевает качественное изменение. Для решения задачи о собственных волнах 2D–периодической среды с сильной модуляцией мы в данной работе применим комбинацию двух методов: Галеркина [1] и гомотопии. Мы используем классический вариант метода Галеркина [1]. Заметим, что для решения той же задачи можно использовать также метод Галеркина с частичной дискретизацией, так называемый неполный метод Галеркина [2].

3. Постановка задачи расчета двумерно–периодической структуры. Пусть показатель преломления среды есть периодическая функция координат x и y с периодами соответственно a и b , так что диэлектрическая проницаемость удовлетворяет условию $\rho(x + na, y + mb) = \rho(x, y)$ для всех целых m, n . Считаем, что $\rho(x, y)$ гладкая функция. Для определенности пусть вдоль оси z среда однородна, и поле имеет ТЕ поляризацию, так что вектор магнитного поля параллелен плоскости (x, y) , электрическое поле направлено вдоль оси z . Тогда уравнения Максвелла равносильны уравнению Гельмгольца

$$u_{xx} + u_{yy} + \kappa\rho(x, y)u = 0, \quad (1)$$

$u(x, y) = E_z(x, y)$, с условиями квазипериодичности (Флоке):

$$u(x + na, y + mb) = u(x, y)e^{in\nu a + im\mu b}. \quad (2)$$

Требуется найти такие значения вектора Флоке $\lambda = (\mu, \nu)$, при которых задача (1) для однородных уравнения Максвелла с однородными условиями Флоке (2) имеет нетривиальное решение. Здесь κ есть квадрат волнового числа в вакууме, ρ диэлектрическая проницаемость. Типичные для физических приложений функции $\rho(x, y)$, порождают в трехмерном пространстве (μ, ν, κ) кусочно гладкую поверхность (связную, несвязную, возможно с краем), содержащую множество всех векторов (μ, ν, κ) , для которых задача (2), (1) имеет нетривиальное решение. Будем называть такую поверхность дисперсионной поверхностью (ДП) и обозначать Σ' .

Наложим следующие ограничения на задачу (1), (2). **Cond. 1:** Найдется такая поверхность Σ в пространстве (μ, ν, κ) , для каждой точки которой задача (1), (2) имеет нетривиальное решение. Размерность пространства решений для каждой точки Σ равна 1. Предполагаем, что край Σ принадлежит этой поверхности. **Cond. 2:** В некоторой окрестности Σ не существует других точек (μ, ν, κ) , для которых задача (1), (2) имеет нетривиальное решение, кроме лежащих на Σ . **Cond. 3:** Поверхность Σ может быть задана в неявной форме уравнением $F(\mu, \nu, \kappa) = 0$, где $\kappa \in [\kappa_1, \kappa_2]$, причем гладкая функция F во всех точках Σ удовлетворяет условию существования неявной функции, т.е. ранг матрицы Якоби (F_μ, F_ν) равен единице. Без ограничения общности можно считать, что Σ есть поверхность с краем (может быть представлена в параметрической форме в виде $\mu = \mu(\xi, \eta)$, $\nu = \nu(\xi, \eta)$, $\kappa = \kappa(\xi, \eta)$, $(\xi, \eta) \in D$, D есть связная замкнутая область на плоскости (ξ, η) .) Пусть $\kappa_1 = \inf_{\Sigma} \kappa$, $\kappa_2 = \sup_{\Sigma} \kappa$, $\kappa_1 > 0$. **Cond. 4:** Для всех $\kappa_0 \in (\kappa_1, \kappa_2)$ сечение Σ плоскостью $\kappa = \kappa_0$ есть гладкая кривая $L(\kappa_0)$ без особых точек. Мы ставим задачу построения всей ДП Σ для определенного диапазона волновых чисел $\kappa \in [\kappa_1, \kappa_2]$.

4. Метод Галеркина. Теперь сформулируем метод, основанный на применении метода Галеркина [1] для двумерно – периодического волновода. Галеркинское приближение волнового поля будем искать в виде линейной комбинации функций координатной системы:

$$u^{(M,N)}(x, y, \mu, \nu, \kappa) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N \psi_m(y, \mu) \varphi_n(x, \nu) C_{m,n}(\mu, \nu, \kappa), \quad (3)$$

где $\psi_m(y, \mu) = b^{-1/2} e^{i(\mu + 2\pi m/b)y}$, $\varphi_n(x, \nu) = a^{-1/2} e^{i(\nu + 2\pi n/a)x}$. Здесь $\lambda = (\mu, \nu)$ есть спектральный параметр, подлежащий определению. Мы используем термин координатная система (КС), принятый в классической работе [1].

Решение краевой задачи на собственные значения (1), (2) будем искать в виде

$$\Sigma = \lim_{M \rightarrow +\infty, N \rightarrow +\infty} \Sigma^{(M,N)}, \quad L(\kappa) = \lim_{M \rightarrow +\infty, N \rightarrow +\infty} L^{(M,N)}(\kappa), \quad (4)$$

$$u(x, y, \mu, \nu, \kappa) = \lim_{M \rightarrow +\infty, N \rightarrow +\infty} u^{(M,N)}(x, y, \mu, \nu, \kappa), \quad (5)$$

причем в (5) предполагаем применение некоторого способа нормирования собственных функций, одинаковый для всех $u^{(M,N)}(x, y, \mu, \nu, \kappa)$ и для $u(x, y, \mu, \nu, \kappa)$.

Предел здесь и далее следует понимать в смысле $\min(M, N) \rightarrow +\infty$. Соберем все координатные функции в вектор – столбец $\Xi(x, y, \mu, \nu) = (\psi_{-M}(y, \mu)\varphi_{-N}(x, \nu), \dots, \psi_M(y, \mu)\varphi_N(x, \nu))^T$ размерности $(2M + 1)(2N + 1)$. Все координатные функции для $m \in \{-M, \dots, M\}$ и $n \in \{-N, \dots, N\}$ в функциональном векторе Ξ должны быть упомянуты, порядок их нумерации не важен. Теперь приближенное решение можно представить в виде $u^{(M, N)} = \Xi^T \mathbf{C}$, где $\mathbf{C} = (C_{(-M, -N)}, \dots, C_{(M, N)})^T$ также вектор-столбец. Пусть векторы-столбцы \mathbf{P} и \mathbf{Q} содержат все соответственно первые и вторые элементы различных пар (m, n) натуральных чисел в указанных пределах, всего $(2M + 1)(2N + 1)$ пара. Тогда координатную систему можно записать в векторной форме: $\Xi(x, y, \mu, \nu) = \Phi_s(y, \mu) \otimes \Phi_c(x, \nu)$. Здесь $\Phi_c(x, \nu) = a^{-1/2}e^{i(\nu+2\pi\mathbf{Q}/a)x}$, $\Phi_s(y, \mu) = b^{-1/2}e^{i(\mu+2\pi\mathbf{P}/b)y}$ $\Phi_c(x, \nu)$ и $\Phi_s(y, \mu)$ есть векторы –столбцы, число элементов в которых равно $(2M + 1)(2N + 1)$, операция \otimes в применении к двум векторам одинаковой размерности означает покоординатное перемножение без суммирования. Заметим, что

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \Xi_{xx}^T \mathbf{C} = -\Phi_s^T(y, \mu) \otimes \Phi_c^T(x, \nu) \otimes [(\nu + 2\pi\mathbf{Q}/a)^2]^T \mathbf{C}, \\ u_{yy} &= \Xi_{yy}^T \mathbf{C} = -\Phi_s^T(y, \mu) \otimes \Phi_c^T(x, \nu) \otimes [(\mu + 2\pi\mathbf{P}/b)^2]^T \mathbf{C}. \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь найдем невязку уравнения (1):

$$R = \Phi_c^T \otimes \Phi_s^T \otimes \left[\kappa\rho - (\nu + 2\pi\mathbf{Q}/a)^2 - (\mu + 2\pi\mathbf{P}/b)^2 \right]^T \mathbf{C}. \quad (7)$$

Используя метод Галеркина, получим линейную однородную алгебраическую систему. Умножим столбец (7) слева скалярно на $\Xi^*(x, y, \mu, \nu)$, используем комплексно сопряженные координатные функции, что равносильно умножению на $\Phi_c^*(x, \nu) \otimes \Phi_s^*(y, \mu)$. Используя ортогональность и нормированность координатной системы, $\int_0^a dx \int_0^b dy \Xi^*(x, y, \mu, \nu) \Xi^T(x, y, \mu, \nu) = I$ (единичная матрица), получим:

$$\kappa \langle \Xi^* | \rho | \Xi \rangle \mathbf{C} - (\nu + 2\pi\mathbf{Q}/a)^2 \mathbf{C} - (\mu + 2\pi\mathbf{P}/b)^2 \mathbf{C} = 0, \quad (8)$$

где $\mathbf{Q} = \text{diag}(\mathbf{Q})$, $\mathbf{P} = \text{diag}(\mathbf{P})$, $\langle \Xi^* | \rho | \Xi \rangle_{(m', n'), (m, n)}$ есть квадратная матрица размера $(2M + 1)(2N + 1) \times (2M + 1)(2N + 1)$: $\langle \Xi^* | \rho | \Xi \rangle_{(m', n'), (m, n)} = \int_0^a \int_0^b \psi_{m'}^* \varphi_{n'}^* \rho(x, y) \psi_m \varphi_n dx dy$. Заметим, что (8) есть однородная относительно \mathbf{C} система линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей. Алгебраическое уравнение, которое определяет λ , равносильно условию равенства нулю определителя квадратной матрицы:

$$\det \left(\kappa \langle \Xi^* | \rho | \Xi \rangle - (\nu + 2\pi\mathbf{Q}/a)^2 - (\mu + 2\pi\mathbf{P}/b)^2 \right) = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9) определяет поверхность $\Sigma^{(M, N)}$ в пространстве координат (μ, ν, κ) . Далее мы сформулируем прямой метод решения задачи (8), основанный на идее гомотопии, но предварительно дадим обоснование сходимости метода Галеркина к точному решению задачи.

5. Обоснование сходимости метода Галеркина. Обоснование корректности применения метода Галеркина мы выполним методом из [1]. Пусть непрерывно дифференцируемая функция $\rho(x, y)$ удовлетворяет условию отделенности от нуля: $\rho(x, y) \geq \rho_{\min} > 0$. Предположим, что в каждой точке Σ все диагональные элементы матрицы, стоящей в левой части (8), отличны от нуля.

Пусть оператор \mathcal{A} действует на дважды непрерывно дифференцируемую функцию $u(x, y)$ по правилу $\mathcal{A}u = -u_{xx} - u_{yy}$, оператор \mathcal{B} по правилу $\mathcal{B}u = \rho(x, y)u$. Область определения операторов \mathcal{A} и \mathcal{B} состоит из всех дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условию квазипериодичности (2). Пусть μ, ν заданные числа, и $\{\kappa_j, u_j(x, y)\}$ есть полная система собственных значений и собственных функций задачи (1), (2). Пусть $\{\kappa_j^{(M,N)}, u_j(x, y)^{(M,N)}\}$ есть собственные значения и собственные функции задачи (8). Из положительной определенности следует, что все собственные значения точной задачи $\kappa > 0$, то же верно для Галеркинской системы (8): $\kappa_j^{(M,N)} > 0$. Из результатов [1], гл.2, теорема 2.11-1 следует, что собственные значения κ_j и $\kappa_j^{(M,N)}$ удовлетворяют принципу минимума:

$$\kappa_1 = \min_{u \in D(\mathcal{A})} \frac{(\mathcal{A}u, u)}{(\mathcal{B}u, u)}, \quad \kappa_j = \min_{u \in D(\mathcal{A}), u \perp u_s, 1 \leq s \leq j-1} \frac{(\mathcal{A}u, u)}{(\mathcal{B}u, u)}, \quad (10)$$

причем имеется в виду \mathcal{B} - ортогональность всем ранее найденным собственным функциям. Имеет место также макси-минимальный принцип:

$$\kappa_j = \sup_{G^{(j-1)}} \left(\inf_{u \in W_1} \frac{(\mathcal{A}u, u)}{(\mathcal{B}u, u)} \right), \quad \kappa_j^{(M,N)} = \sup_{G^{(j-1)}} \left(\inf_{u \in W_2} \frac{(\mathcal{A}u, u)}{(\mathcal{B}u, u)} \right), \quad (11)$$

где $G^{(j-1)}$ есть любое подпространство $D(\mathcal{A})$ размерности, не превосходящей $(j-1)$, $W_1 = \{D(\mathcal{A}) \cap u \perp G^{(j-1)}\}$, $W_2 = \{D(\mathcal{A}) \cap u \perp G^{(j-1)} \cap u \in H^{(M,N)}\}$, где $H^{(M,N)}$ есть линейная оболочка координатной системы Ξ . Из результатов [1], гл.2, теорема 2.11-4 следует, что $\lim_{M,N \rightarrow +\infty} \kappa_j^{(M,N)} = \kappa_j$. Их сравнения (10) и (11) следует также, что $\kappa_j^{(M,N)} \geq \kappa_j$, и при $M'' > M'$, $N'' > N'$ верно также $\kappa_j^{(M'',N'')} \leq \kappa_j^{(M',N')}$. Если выполнены условия **Cond. 1–3**, то найдутся (M_0, N_0) такие, что при $M > M_0$ и $N > N_0$ и на промежутке $[\kappa'_1, \kappa'_2] \subset [\kappa_1, \kappa_2]$, $\kappa'_1 < \kappa'_2$, решением задачи (8) является гладкая поверхность $\Sigma^{(M,N)}$, сечением которой при $\kappa \in [\kappa'_1, \kappa'_2]$ будет гладкая кривая $L^{(M,N)}(\kappa)$. Гладкость $L^{(M,N)}$ следует из того, что собственные значения задачи (8) гладким образом зависят от (μ, ν) при условии, что каждое собственное значение в некоторой окрестности Σ имеет кратность 1. Таким образом, $\Sigma^{(M,N)} \rightarrow \Sigma$ при $M \rightarrow +\infty, N \rightarrow +\infty$ в том смысле, что для любой точки $S = (\mu, \nu, \kappa) \in \Sigma$ расстояние от S до $\Sigma^{(M,N)}$ стремится к нулю.

В данной работе мы не описываем алгоритм решения задачи (8) или равносильной задачи (9). На практике потребителя редко интересует только одна точка на дисперсионной поверхности. Интересны свойства ДП в целом, в том числе топологическая структура, устойчивость по отношению к возмущениям, трансформация волн при изменении волнового числа или направления волнового вектора. Адекватный подход в данном случае представляет метод гомотопии, который мы опишем и исследуем в других работах.

ЛИТЕРАТУРА

1. М.К. Гавурин. Численные методы. М.: Наука, 1971.
2. А.Г. Свешников. Неполный метод Галеркина. // Докл. АН СССР, 1977. Т.236. N 5. С.1076-1079.

Метод гомотопии для расчета собственных волн двумерно – периодических решеток

А.А. Быков

МГУ им М.В.Ломоносова, Физический факультет, кафедра математики.

E-mail: abkov@yandex.ru

1. Введение.

В этой работе мы применяем метод гомотопии для решения задачи о собственных волнах двумерно–периодической структуры, постановка и метод решения которой детально описаны в работе [1], имеющейся в этом сборнике. Метод гомотопии, который называют также методом погружения, методом инвариантного погружения, основан на рассмотрении семейства задач, зависящих от искусственно введенного в постановку задачи параметра. Основы метода гомотопии для решения линейных и нелинейных задач математической физики изложены в [2], [3]. Задачу о собственных волнах запишем в виде

$$L(\gamma)u = 0, \quad (1)$$

где L есть оператор краевой задачи на собственные значения [4], Величина γ есть спектральный параметр, его значение требуется найти из условия существования нетривиального решения. Метод гомотопии состоит в том, что мы погружаем задачу (1) в семейство краевых задач на собственные значения $M(\gamma, \tau)u = 0$, где $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$ есть параметр гомотопии, можно положить $\tau_0 = 0$, $\tau_1 = 1$, или использовать любой другой промежуток. Операторную функцию $M(\gamma, \tau)$ выберем так, чтобы $M(\gamma, \tau_1) = L(\gamma)$, а задача $M(\gamma, \tau_0)u = 0$ имела известное решение. Дифференцирование по параметру приводит к системе дифференциальных уравнений, которая описывает зависимость спектрального параметра и профиля собственной моды от параметра гомотопии.

В данной работе мы сформулируем метод гомотопии для решения задачи о собственных волнах среды с двумерно периодически модулированной диэлектрической проницаемостью. Поле собственной волны находится из условия выполнения условия квазипериодичности (условия Флоке). Уравнения гомотопии будут найдены на основе метода Галеркина для волнового вектора и для поля собственной моды. Мы дадим обоснование сходимости гибридного метода гомотопии – Галеркина.

2. Дифференциальное уравнение гомотопии для дисперсионной поверхности. Мы рассматриваем математическую модель, основанную на методе Галеркина, так как эта модель обеспечивает высокую точность при небольшом расходе времени счета. Сформулируем прямой метод решения задачи о собственных волнах

$$u_{xx} + u_{yy} + \kappa\rho(x, y)u = 0, \quad u(x + na, y + mb) = u(x, y)e^{i\nu na + i\mu mb}, \quad (2)$$

позволяющий найти поле с заданной пространственной структурой. Задача (2) определяет в пространстве переменных (μ, ν, κ) поверхность Σ . Решение представляем в виде линейной комбинации координатной системы (КС) Ξ с коэффициентами \mathbf{C} : $u^{(M, N)} = \Xi^T \mathbf{C}$, для вычисления \mathbf{C} метод Галеркина дает линейную систему

$$\left((\nu + 2\pi\mathbb{Q}/a)^2 + (\mu + 2\pi\mathbb{P}/b)^2 \right) \mathbf{C} = \kappa \langle \Xi^* | \rho | \Xi \rangle \mathbf{C}. \quad (3)$$

Более подробно постановка и метод описаны в [1]. Задача (3) определяет в пространстве переменных (μ, ν, κ) поверхность $\Sigma^{(M,N)}$, где (M, N) есть число координатных функций по каждой координате. Вместо решения задачи (3) используем метод гомотопии. Вместе с заданной функцией $\rho(x, y)$ рассмотрим функцию $\tilde{\rho}(x, y, \tau)$, зависящую также от параметра гомотопии τ , который мы изменяем в процессе решения задачи от $\tau_0 = 0$ до $\tau_1 = 1$. Например, при $\tilde{\rho}(x, y, \tau) = \rho'(x, y) + (\rho''(x, y) - \rho'(x, y))\tau$ получим $\tilde{\rho}(x, y, 0) = \rho'(x, y)$, $\tilde{\rho}(x, y, 1) = \rho''(x, y)$. Мы предполагаем, что при $\tau = 0$ задача (3) имеет известное решение: $(\mu, \nu, \kappa) \in \Sigma_0$, поле собственной моды $u_0(x, y, \mu, \nu, \kappa) = \Xi^T(x, y, \mu, \nu)\mathbf{C}_0(\mu, \nu, \kappa)$, где вектор \mathbf{C}_0 также известен. Предполагаем, что решить численно требуется ту же задачу при $\tau = 1$. Теперь все величины, входящие в (2), также зависят от τ :

$$u_{xx} + u_{yy} + \kappa\tilde{\rho}(x, y, \tau)u = 0, \quad u(x + na, y + mb, \tau) = u(x, y, \tau)e^{i\nu(\tau)a + i\mu(\tau)b} \quad (4)$$

Для обоснования корректности метода гомотопии нам придется наложить более жесткие условия на задачу (4).

Cond. a: Найдется такая поверхность $\tilde{\Sigma}$ в пространстве (μ, ν, κ, τ) , для каждой точки которой задача (4) имеет нетривиальное решение. Размерность пространства решений для каждой точки $\tilde{\Sigma}$ равна 1.

Cond. b: В некоторой окрестности $\tilde{\Sigma}$ не существует других точек (μ, ν, κ, τ) , для которых задача (4) имеет нетривиальное решение, кроме лежащих на $\tilde{\Sigma}$.

Cond. c: Поверхность $\tilde{\Sigma}$, аналогично поверхности Σ , может быть задана в неявной форме уравнением $\tilde{F}(\mu, \nu, \kappa, \tau) = 0$.

Выведем дифференциальные уравнения гомотопии. Метод Галеркина дает теперь уравнение

$$\left(\kappa \langle \Xi^* | \tilde{\rho} | \Xi \rangle - (\nu + 2\pi\mathbb{Q}/a)^2 - (\mu + 2\pi\mathbb{P}/b)^2 \right) \mathbf{C} = 0. \quad (5)$$

Условие нетривиальной разрешимости (5) равносильно задаче на собственные значения симметрического оператора, решаемой методом Галеркина. Из упоминавшейся теоремы сходимости метода Галеркина для собственных значений и собственных элементов следует, что при достаточно больших (M, N) все значения вектора (μ, ν, κ, τ) лежат на гладкой поверхности $\tilde{\Sigma}^{(M,N)}$, причем $\tilde{\Sigma}^{(M,N)} \rightarrow \tilde{\Sigma}$ при $M \rightarrow +\infty, N \rightarrow +\infty$.

Пусть $\kappa \in [\kappa_1, \kappa_2]$ есть заданная константа. Дифференцирование (5) дает

$$\begin{aligned} \left[\kappa \langle \Xi^* | \tilde{\rho} | \Xi \rangle - \left(\nu + \frac{2\pi\mathbb{Q}}{a} \right)^2 - \left(\mu + \frac{2\pi\mathbb{P}}{b} \right)^2 \right] d\mathbf{C} = \\ = 2 \left(\nu + \frac{2\pi\mathbb{Q}}{a} \right) \mathbf{C} d\nu + 2 \left(\mu + \frac{2\pi\mathbb{P}}{b} \right) \mathbf{C} d\mu - \kappa \left\langle \Xi^* \left| \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tau} \right| \Xi \right\rangle \mathbf{C} d\tau. \end{aligned} \quad (6)$$

При выводе (6) мы учли, что матрицы $\langle \Xi^* | \rho | \Xi \rangle$ и $\langle \Xi^* | \partial \rho / \partial \tau | \Xi \rangle$ не зависят от μ и ν . Так как однородная система (6) при любом фиксированном значении (μ, ν, κ, τ) имеет такой же вид, как (5), т.е.

$$\left(\kappa \langle \Xi^* | \tilde{\rho}(\tau) | \Xi \rangle - (\nu + 2\pi\mathbb{Q}/a)^2 - (\mu + 2\pi\mathbb{P}/b)^2 \right) d\mathbf{C} = 0, \quad (7)$$

и в соответствии с (5) имеет нетривиальное решение $\mathbf{C}(\mu, \nu, \kappa, \tau)$, то необходимое условие разрешимости системы (6) в соответствии с теоремой Фредгольма состоит

в том, что правая часть должна быть ортогональна всем нетривиальным решениям уравнения (5),

$$\kappa \mathbf{C}^T \left\langle \Xi^* \left| \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tau} \right| \Xi \right\rangle \mathbf{C} = 2\mathbf{C}^T \left(\mu + \frac{2\pi\mathbb{Q}}{a} \right) \mathbf{C} \frac{d\mu}{d\tau} + 2\mathbf{C}^T \left(\nu + \frac{2\pi\mathbb{P}}{b} \right) \mathbf{C} \frac{d\nu}{d\tau}, \quad (8)$$

откуда получим дифференциальное уравнение для нахождения (μ, ν, τ) :

$$2\mathbf{C}^T \left(\mu + \frac{2\pi\mathbb{Q}}{a} \right) \mathbf{C} d\mu + 2\mathbf{C}^T \left(\nu + \frac{2\pi\mathbb{P}}{b} \right) \mathbf{C} d\nu = \kappa \mathbf{C}^T \left\langle \Xi^* \left| \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tau} \right| \Xi \right\rangle \mathbf{C} d\tau. \quad (9)$$

Из упомянутой ранее теоремы о сходимости метода Галеркина следует, что при выполнении условий **Cond. a, b, c** для всех $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$ других нетривиальных решений, линейно независимых с вектором \mathbf{C} , уравнение (7) не имеет. Тогда (9) будет необходимым и достаточным условием нетривиальной разрешимости (6).

Уравнение (9) относится к классу уравнений Пфаффа. Так как по нашему предположению, существует функция $F(\mu, \nu, \kappa, \tau)$ такая, что выполнено условие **Cond. c**, выполнено также необходимое и достаточное условие полной интегрируемости уравнения Пфаффа. Поэтому уравнение (9) определяет в пространстве с координатами (μ, ν, τ) поверхность, которую естественно назвать эволюционной поверхностью данной 2D структуры. При каждом значении τ мы получаем сечение этой поверхности плоскостью, это сечение определяет в точках общего положения гладкую кривую $L(\tau)$, каждая точка на которой задает некоторое возможное значение волнового вектора.

3. Дифференциальное уравнение гомотопии для вектора коэффициентов Фурье. Теперь составим уравнение для расчета $\mathbf{C}(\tau)$. При выполнении уравнения (9) уравнение (6) в соответствии с теоремой Фредгольма разрешимо, и его общее решение есть сумма некоторого частного решения \mathbf{C}' и общего решения однородного уравнения, которое имеет вид $\xi \mathbf{C}$, ξ любое число. Вектор \mathbf{C}' есть частное решение линейной неоднородной алгебраической системы (6) относительно $\partial \mathbf{C} / \partial \tau$. В соответствии с (7) и (9), ранг матрицы системы (6) равен рангу расширенной матрицы и он на единицу меньше размерности вектора \mathbf{C} . Запишем общее решение уравнения

$$\left(\kappa \left\langle \Xi^* \left| \tilde{\rho}(\tau) \right| \Xi \right\rangle - \left(\nu + 2\pi\mathbb{Q}/a \right)^2 - \left(\mu + 2\pi\mathbb{P}/b \right)^2 \right) \mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (10)$$

в виде $\mathbf{X} = \mathbb{A}\mathbf{F} + \xi \mathbf{C}$, где $\mathbb{A}\mathbf{F}$ есть некоторое частное решение неоднородного уравнения, $\xi \mathbf{C}$ общее решение однородного уравнения. Задача для \mathbf{C} получается из (6). Выберем решение (10) в виде $\mathbf{X} = \mathbb{A}\mathbf{F}$, и получим для \mathbf{C} уравнение Пфаффа

$$d\mathbf{C} = 2\mathbb{A} \left(\nu + \frac{2\pi\mathbb{Q}}{a} \right) \mathbf{C} d\mu + 2\mathbb{A} \left(\mu + \frac{2\pi\mathbb{P}}{b} \right) \mathbf{C} d\nu - \kappa \mathbb{A} \left\langle \Xi^* \left| \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tau} \right| \Xi \right\rangle \mathbf{C} d\tau, \quad (11)$$

для которого также выполнено условие разрешимости (это следует из существования решения Галеркинской системы). Уравнения (9) и (11) решаются совместно в направлении возрастания τ от τ_0 до τ_1 .

4. Начальные условия гомотопии. Пусть при значении параметра гомотопии $\tau = 0$ среда однородна, и $\tilde{\rho}(x, y, 0) = \tilde{\rho}_0 = \text{const}$ есть константа, так что начальные

условия гомотопии определяются из явного решения уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $u_{xx} + u_{yy} + \kappa \tilde{\rho}_0 u = 0$ с теми же граничными условиями, что и в (2). Таким образом, начальные значения гомотопии состоят в том, что кривая L_0 есть окружность $\mu^2 + \nu^2 = \kappa \tilde{\rho}_0$ на плоскости (μ, ν) . Тогда получим точное решение $u_0(x, y, \mu_0, \nu_0) = \varphi_0(x, \nu_0) \psi_0(y, \mu_0)$. Соответственно вектор $C_0(0)$, состоящий из одних нулей, кроме позиции, отвечающей $m = 0$ и $n = 0$, где стоит единица, дает начальные условия.

5. Разрешимость дифференциального уравнения гомотопии.

Утверждение о разрешимости дифференциального уравнения (9) на промежутке $\tau \in [0; 1]$, вообще говоря, неверно. Из (2) следует, что для $\rho = \text{const}$. фазовая поверхность задачи есть конус в пространстве $(\mu, \nu, \sqrt{\kappa})$. Для заданной гладкой функции $\rho(x, y)$ фазовая поверхность $F(\mu, \nu, \kappa) = 0$ может иметь сколь угодно сложную структуру, соответствующую физическим особенностям распространения волн в периодических средах, включая запрещенные зоны. То же самое, разумеется, будет верно и для фазовой поверхности задачи Галеркина (5). Можно лишь утверждать локальную разрешимость на некотором промежутке изменения параметра гомотопии. Сформулируем достаточные условия разрешимости уравнения гомотопии. Наложим следующие условия на задачу (2).

Cond. d: Пусть при заданном значении κ найдется область Ω'_0 на плоскости (μ, ν) , внутри которой все значения (μ, ν) , для которых имеет нетривиальное решение задача (2), лежат на связной гладкой кривой L_0 , которую в параметрической форме представим в виде $\{\mu = \mu_0(s), \nu = \nu_0(s)\}$.

Cond. e: Пусть найдется такое $\delta > 0$, что для любой гладкой функции $\rho'(x, y)$, удовлетворяющей условию периодичности и условию $|\rho'(x, y) - \rho(x, y)| < \delta$ внутри Ω все значения (μ, ν) , для которых имеет нетривиальное решение задача (4), лежат на связной гладкой кривой $L(\tau)$, которую в параметрической форме представим в виде $\{\mu = \mu(s, \tau), \nu = \nu(s, \tau)\}$. Тогда в области Ω в пространстве (μ, ν, τ) , сечение которой плоскостью $\tau = \tau'$ для $\tau' \in [\tau_0, \tau_1]$ совпадает с $\Omega'(\tau)$, определена поверхность $S = \{\mu, \nu, \tau : \mu = \mu(s, \tau), \nu = \nu(s, \tau), \tau \in [\tau_0, \tau_1]\}$, содержащая все точки, для которых задача (4) имеет нетривиальное решение. Потребуем, чтобы эта поверхность S была гладкой и чтобы нормаль к ней во всех точках S составляла ненулевой угол с осью τ .

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда из теорем о сходимости метода Галеркина [4] следует, что найдутся такие (M', N') , что при $M > M'$ и $N > N'$ внутри Ω для любой точки $(\mu, \nu, \tau) \in \Omega$ найдется единственное κ' : $|\kappa' - \kappa| < \varepsilon$. Таким образом, расстояние между дисперсионной поверхностью Σ и поверхностью $\Sigma^{(M, N)}$, найденной методом Галеркина, стремится к нулю при $(M, N) \rightarrow \infty$. Это и означает сходимость одновременно метода Галеркина и решения, полученного методом гомотопии.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.А. Быков. Метод Галеркина в задачах расчета двумерно – периодических волноведущих структур. Волны-2020, сборник тезисов.
2. Р. Беллман, Р. Калаба. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир, 1968.
3. Дж. Касти, Р. Калаба. Методы погружения в прикладной математике. М.: Мир, 1976.
4. М.К. Гавурин. Численные методы. М.: Наука, 1971.

Уединенные волны в двумерной сверхрешетке на основе графена в столкновительном режиме

С.Ю. Глазов^{1,2}, В.С. Животикова¹, Г.А. Сыродоев¹

¹Волгоградский государственный социально-педагогический университет

²Волгоградский государственный медицинский университет

ser-glazov@yandex.ru

В связи с активным изучением новых полупроводниковых структур на основе графена вызывает интерес исследование в них нелинейных оптических явлений [1-5]. Их актуальность связана с возможностью использования графеновых структур в качестве рабочей среды для генерации уединенных электромагнитных импульсов (УЭИ), имеющих прикладной интерес [6,7]. В работе [2] изучена возможность генерации УЭИ в одномерных сверхрешетках (СР) на основе графена (ГСР). В последнее время внимание исследователей сосредотачивается на изучении 2D ГСР [5,8-11]. В этой связи представляется актуальным исследование особенностей эволюции УЭИ в 2D ГСР.

Энергетический спектр носителей заряда в 2D ГСР на подложке из периодически чередующихся областей бесщелевого и щелевого графена в одноминизонном приближении имеет вид [9]

$$\varepsilon(\vec{p}) = \pm \sqrt{\Delta_0^2 + \Delta_1^2(1 - \cos(p_x d_1 / \hbar)) + \Delta_2^2(1 - \cos(p_y d_2 / \hbar))}, \quad (1)$$

где p_x, p_y – компоненты квазиимпульса электрона, $d_i = a_i + b_i$ – период ГСР, a_i и b_i – ширины ячеек бесщелевого и щелевого графена. Разные знаки относятся к минизоне проводимости и валентной минизоне. Энергетический спектр ГСР неаддитивен, поэтому существует зависимость движения носителей заряда вдоль ортогональных направлений, и непараболичен, что определяет нелинейную зависимость скорости электрона от квазиимпульса и нелинейные свойства таких структур, проявляющиеся уже в сравнительно слабых полях. Эта нелинейность и приводит к возможности распространения в такого рода структурах УЭИ [13].

Эволюция нелинейных УЭИ может быть описана уравнением д'Аламбера для векторного потенциала при учете столкновений

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_0(A_x, A_y) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_{st}(A_x, A_y), \quad (2)$$

где $\vec{A}(\vec{r}, t)$ – векторный потенциал поля, $V = c\chi^{-1/2}$ – скорость электромагнитной волны в отсутствие электронов, χ – эффективная диэлектрическая проницаемость. Плотность электрического тока определяется в виде

$$\vec{j} = -e \sum n(\vec{p}) \vec{v} \left(\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}, t) \right), \quad (3)$$

$n(\vec{p})$ – функция распределения электронов, $\vec{v}(\vec{p}) = (\partial \varepsilon / \partial p_x, \partial \varepsilon / \partial p_y)$ – скорость электронов. В бесстолкновительном пределе из (3) получаем $\vec{j}_0(A_x, A_y)$. Величина, стоящая в правой части уравнения (2) $\vec{j}_{st}(A_x, A_y)$ является нелинейным функционалом возмущения плотности тока $\vec{j}_0(A_x, A_y)$ при учете столкновений. Для нахождения функции распределения носителей использовано классическое уравнение Больцмана с модельным интегралом столкновений в приближении постоянной частоты релаксации

$$\frac{\partial n(\vec{p})}{\partial t} - \frac{e}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \frac{\partial n(\vec{p})}{\partial \vec{p}} = -\nu(n(\vec{p}) - n_0(\vec{p})). \quad (4)$$

Из-за существенной непараболичности спектра электронов в ГСР ток проводимости есть в общем случае нелинейная функция поля и уравнение (2) является нелинейным. Из-за неаддитивности энергетического спектра ортогональные составляющие векторного потенциала оказываются взаимосвязанными, что существенно сказывается на эволюции УЭИ в ГСР. Нелинейное волновое уравнение (2) в общем случае решается численно с применением метода разностных схем.

В случае, когда характерная плазменная частота много больше частоты релаксации ν в рамках адиабатической теории возмущения найдена система уравнений, описывающая медленную эволюцию амплитуды и фазы УЭИ. Эта система позволяет оценить характерное время трансформации УЭИ в линейную электромагнитную волну [14].

В бесстолкновительном режиме получена система уравнений для компонент безразмерного векторного потенциала соответствует слабой неаддитивности энергетического спектра

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial \tilde{y}^2} + \sin \varphi_x (1 + \beta \cos \varphi_y) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial \tilde{y}^2} + \sin \varphi_y (1 + \beta \cos \varphi_x) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\vec{\varphi} = \frac{e}{c\hbar} (A_x d_1, A_y d_2)$, $\tilde{t} = t\varpi / \sqrt{\chi}$, $\tilde{x} = x\varpi / c$, $\tilde{y} = y\varpi / c$, $\varpi^2 = 2\pi N e^2 B_{10} d / \hbar a$, $\beta = 2B_{11} / B_{10}$, B_{ij} – коэффициенты разложения плотности тока в двойной ряд Фурье, N – поверхностная концентрация электронов проводимости, a – толщина слоя графена.

Система уравнений (5) решалась численно при помощи прямой разностной схемы типа «крест». На рис. 1 представлены результаты моделирования эволюции УЭИ с гауссовым профилем в 2D ГСР. Подобное решение в одномерном случае называется бризером, а в двумерном – пульсоном.

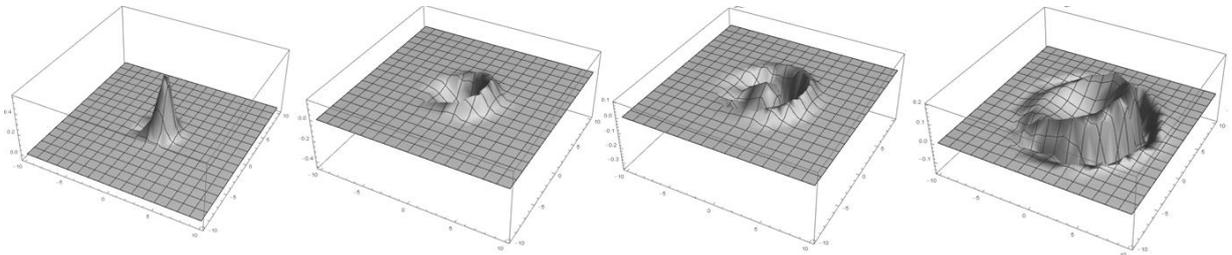


Рис. 1. Эволюция предельно короткого импульса с гауссовым профилем

Если $\beta = 0$, то связь между ортогональными компонентами пропадает и уравнения (5) представляют собой хорошо известное двумерное синус-уравнение Гордона.

Учитывая симметрию уравнений (5) и задавая симметричные начальные условия получается уравнение, описывающее распространение УЭИ под углом 45° к осям ГСР

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tilde{l}^2} + \sin \varphi + \frac{\beta}{2} \sin(2\varphi) = 0, \quad (6)$$

где $\tilde{t} = \tilde{x} / \sqrt{2}$. Уравнение (6) является двойным синус-уравнением Гордона, кинковое решение которого хорошо известно [15, 16]. При учете столкновений правая часть уравнения (6) $\hat{R}_0(\varphi)$ модифицируется и вместо нее появляется нелинейный функционал от векторного потенциала, выражающийся через диссипативным ток:

$$\hat{R}[\varphi] = \gamma \int_{-\infty}^{\tau} d\tilde{t}' \exp(-\gamma(\tilde{t} - \tilde{t}')) \{ \sin[\varphi(\tilde{t}') - \varphi(\tilde{t})] + \lambda \sin(2[\varphi(\tilde{t}') - \varphi(\tilde{t})]) + \sin \varphi(\tilde{t}) + \lambda \sin(2\varphi(\tilde{t})) \} - \sin \varphi(\tilde{t}) - \lambda \sin(2\varphi(\tilde{t})), \quad (7)$$

где $\gamma = v\sqrt{\chi}/\varpi$, $\lambda = \beta/2$. Если функционал достаточно мал, то задачу можно решить с помощью адиабатической теории возмущения. Характерное время эволюции волны из существенно нелинейной в слабонелинейную прямо пропорционально зависит от времени релаксации, квадрата отношения штарковской и обобщенной плазменной частот и нелинейной функции параметра λ , дальше требуются более общие методы теории возмущений. Для увеличения времени жизни солитона необходимо осуществить подпитку энергии с помощью внешнего электрического поля или тока.

Выводы из проделанной работы.

1. Получено уравнение описывающее распространение электромагнитных волн в 2D ГСР в бесстолкновительном приближении и при учете столкновений.

2. Из-за неаддитивности энергетического спектра ортогональные составляющие векторного потенциала оказываются взаимосвязанными, что существенно сказывается на эволюции УЭИ в 2D ГСР.

3. На основе адиабатической теории возмущения получена система уравнений, описывающая эволюцию амплитуды и фазы УЭИ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yu.V. Bludov et al. // Phys. Rev. B. 2015. V. 91. P. 045424.
2. S.V. Kryuchkov, E.I. Kukhar' // Physica B. 2013. V. 408. P. 188.
3. F. Martin-Vergara et al. // Nonlinear Systems. 2018. V.2. P.85.
4. Е.И. Кухарь, С.В. Крючков, Е.С. Ионкина // ФТП. 2018. Т. 52. В. 6.С. 620.
5. С.Ю. Глазов, Г.А. Сыродоев // Изв. РАН. Сер. физ. 2020. Т. 84. № 1.С. 128.
6. С.В. Крючков, Е.В. Капля // ЖТФ. 2003. V. 48. P. 53.
7. Z. Sun et al. // Physica E. 2012. V. 44. P. 1082.
8. S.V. Kryuchkov, С.А. Popov // Journal of Nano- and Electronic Physics. 2017. V. 9. № 2. P. 02013.
9. .C. Forsythe et al. // Nature Nanotechnology. 2018. V. 13. P. 566.
10. .Y. Zhang et al. // arXiv:1703.05689 [cond-mat.mes-hall] 2018.
11. П.В. Бадикова, С.Ю. Глазов, Г.А. Сыродоев // ФТП. 2019. Т. 53. В.7. С. 927.
12. П.В. Бадикова, С.Ю. Глазов, Г.А. Сыродоев // Изв. РАН. Сер. физ. 2020. Т. 84. № 1.С. 38.
13. Э.М. Эпштейн // ФТТ. 1977. Т. 19. В. 11. С. 3456.
14. А.Р. Tetervov // Solid State Communication. 1985. V. 54. № 5. P.421.
15. С.В. Крючков, Г.А. Сыродоев // Изв.вузов. Радиофизика. 1990. V. 33. №12. P. 1427.
16. С.В. Крючков, Э.Г.Федоров // ФТП. 2002. Т. 36. В. 3. С. 326.

Повышение точности метода FDTD при моделировании распространения излучения через слоистые среды

Ж.О. Домбровская

*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
“Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова”, физический факультет, Москва,
Россия*

Многие реальные задачи рассматриваются в нестационарной постановке. Наиболее популярным численным методом решения таких задач является метод конечных разностей во временной области (FDTD). Однако при моделировании им сред с границами раздела происходит катастрофическое падение точности расчета. Этот факт многократно описывался в литературе, например, [1]. Несмотря на то, что методу FDTD посвящено уже более 2000 публикаций, принципиальные недостатки метода фактически не устранены.

В литературе предлагались различные подходы, позволяющие обеспечить второй порядок аппроксимации схемы Йе при расчете задач с диэлектрическими границами раздела. Например, нередко границу раздела размывают, заменяя разрывные материальные параметры некоторыми непрерывными (сглаженными) зависимостями [2, 3]. Однако это приводит к существенному уменьшению отражения, то есть искажает расчетные спектральные свойства структуры [4].

В работе [5] второй порядок точности достигался с помощью переноса узла вблизи границы раздела. Однако при большой величине скачка диэлектрической проницаемости такая процедура является ненадежной. Шаг, примыкающий к границе раздела, становится настолько мелким, что аккуратное вычисление разностных производных требует повышенной разрядности. Кроме того, вблизи границы раздела требовалось вводить эффективное значение проницаемости, то есть изменять исходную задачу. Это может приводить к физическим артефактам в спектральных свойствах.

В данной работе дано строгое математическое объяснение проблеме понижения точности. Показано, что вблизи границы раздела немагнитных сред с различными диэлектрическими проницаемостями порядок точности схемы Йе ухудшается до первого. Причиной этого являются нефизичные осцилляции численного решения, вызванные немонотонностью схемы. Проведены вычисления с использованием метода Ричардсона-Калиткина [6], демонстрирующие существенное уменьшение немонотонности разностной схемы. Применение данного метода моделированию слоистых сред описано в работах [7, 8].

Пусть на плоскопараллельную пластину «воздух–кремний–воздух» нормально падает плоская электромагнитная волна, имеющая гауссов профиль импульса, нормированный на единицу (см. рис. 1, пунктирная линия). Рассмотрим ситуацию, когда электромагнитный импульс достиг пластинки, то есть распространяется в слоистой среде. Для наглядности границы раздела «воздух–Si» и «Si–воздух» изображены зелеными штриховыми линиями. Импульс уже вышел из пластинки (сплошные линии), причем отраженная волна успела уйти влево за пределы расчетной области. Видно, что на нескольких первых сетках вблизи границы раздела решение начинает сильно осциллировать, что свидетельствует о немонотонности разностной схемы. На достаточно подробных сетках немонотонность также имеет место, но амплитуда осцилляций значительно уменьшается.

На рис. 2 приведены нормы C погрешностей решения $\|R\|$ для этого расчета в зависимости от числа шагов N в двойном логарифмическом масштабе. Регулярные участки кривых асимптотически выходят на прямые с углом наклона $-p$. Фактический

порядок точности p указан около каждой из линий. При отсутствии рекуррентных уточнений (красная кривая) он равен 1. Видно, что применение метода сгущения сеток повышает точность вычислений (оранжевая, желтая и зеленая кривые).

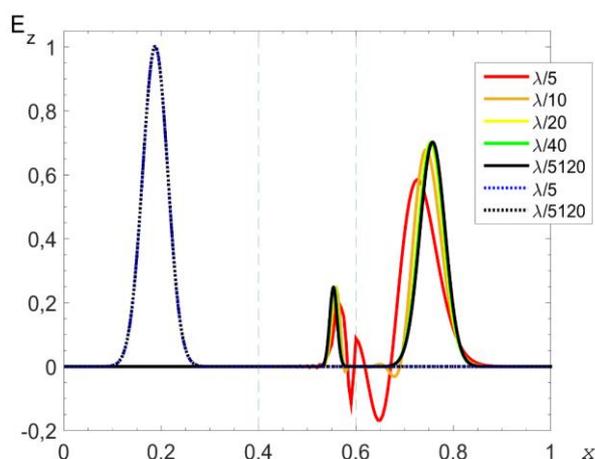


Рис. 1. Численное решение для поля E в задаче о прохождении волны через пластину из кристаллического кремния (на исходной сетке и с учетом уточнений). У кривых указан шаг по пространству.

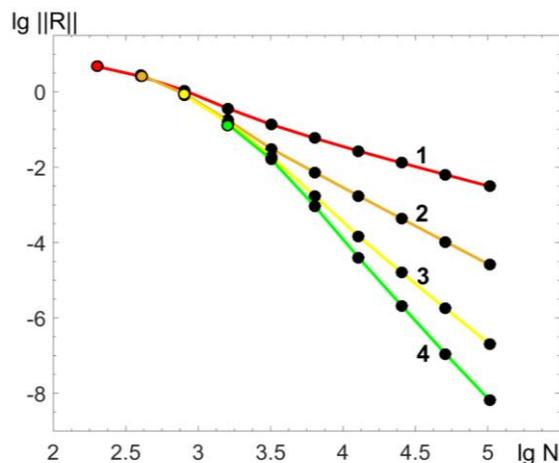


Рис. 2. Погрешности в задаче о прохождении волны через пластину из кристаллического Si с учетом уточнений. Цифры около линий – фактический порядок точности. Цвета соответствуют легенде рис. 1

Видно, что при проведении рекуррентных уточнений, эффективные порядки точности стремятся к фактическому значению, которое не совпадает с теоретическим. При этом с каждым уточнением значение p повышается лишь на единицу. В данном расчете не был достигнут фон ошибок округления, при необходимости порядок точности и саму точность вычислений можно еще повысить. Однако уже $p = 4$ вполне достаточно, чтобы проводить высокоточные расчеты.

Таким образом, установлено, что катастрофическое снижение точности схемы Йе при расчетах неоднородных диэлектрических сред возникает из-за ее немонотонности. При этом фактический порядок точности схемы снижается до первого. Показано, что метод сгущения сеток позволяет улучшить точность на много порядков и многократно повысить порядок точности. Поэтому экстраполяционное уточнение по формулам Ричардсона оказывается одним из способов построения «почти монотонных» схем.

Статья подготовлена при финансовой поддержке РФФИ (проект 19-01-00593).

ЛИТЕРАТУРА

1. A.C. Cangellaris, D.B. Wright // IEEE Trans. Antennas Propag. 1991. V. 39. P. 1518.
2. K.P. Hwang, A.C. Cangellaris // IEEE Microw. Wireless Compon. Lett. 2001. V. 11. No 4. P. 158.
3. T. Hirono et al. // IEEE Microwave Guided Wave Lett. 2000. V. 10. P. 359.
4. Zh.O. Dombrovskaya, A.A. Belov // J. Phys.: Conf. Series. 2020. V. 1461. P. 012032.
5. Q.X. Chu, H. Ding // Microwave Opt. Techn. Lett. 2007. V. 49. P. 3007.
6. Н.Н. Калиткин и др. «Вычисления на квазиравномерных сетках» М.: Физматлит, 2005.
7. Ж.О. Домбровская, А.Н. Боголюбов // Учен. зап. физ. фак-та Моск. ун-та. 2017. No. 4. С. 1740302.
8. Zh.O. Dombrovskaya, A.N. Bogolyubov // Bull. Rus. Acad. Sci.: Physics. 2017. V. 81. No. 1. P. 106.

Сверхбыстрый метод расчёта одномерных фотонных кристаллов

А.А. Белов, А.Н. Боголюбов, Ж.О. Домбровская, С.О. Жбанников

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, физический факультет,
кафедра математики
bogan7@yandex.ru

В настоящее время большой теоретический и практический интерес вызывает применение метаматериалов - искусственно структурированных композитных материалов, сильно взаимодействующих с электромагнитными волнами [1]. В частности, большой интерес представляет исследования электродинамических систем на основе фотонных кристаллов.

Фотонный кристалл – это материал, структура которого характеризуется периодическим изменением коэффициента преломления. Рассматриваются одномерные, двумерные и трехмерные фотонные кристаллы. При прохождении электромагнитной волны через одномерный фотонный кристалл возникают многократные переотражения от границ слоев. Интерференция переотраженных волн приводит к появлению «фотонных запрещенных зон» (photonic band gap, PBG) в спектрах отражения и прохождения. Такие свойства делают фотонно-кристаллические структуры весьма интересными своими приложениями.

При исследовании свойств фотонно-кристаллических структур и приборов и устройств на их основе весьма широко применяются методы математического моделирования [1]. В частности, используются методы конечных разностей и конечных элементов, а также матричные методы

Наиболее широко применяемым методом для решения таких задач является метод FDTD – метод конечных разностей во временной области. Хотя в настоящее время алгоритм Йе широко используется в электродинамике [2]. Его применение при расчете одномерных фотонных кристаллов связано со значительными сложностями [3].

В данной работе на основе стационарных матричных методов [4] и преобразования Фурье построен сверхбыстрый нестационарный матричный метод для расчета распространения излучения через одномерный фотонный кристалл.

Основная идея предлагаемого метода заключается в следующем. Поскольку рассматривается линейная задача расчета одномерного фотонного кристалла, то для неё справедлив принцип суперпозиции. Представим падающий импульс в виде суперпозиции плоских монохроматических волн, применяя численное преобразование Фурье и вычисляя интегралы с помощью формулы трапеции. Для каждой из плоских монохроматических волн решим стационарную задачу о падении такой волны на фотонный кристалл, применяя стандартный стационарный матричный метод, использующий метод матриц Берремана [4], найдем амплитудные коэффициенты отражения и прохождения. Затем, выполняя численно обратное преобразование Фурье, также применяя формулу трапеций, найдем временные развертки прошедшего и отраженного полей:

Предлагаемый метод имеет существенные преимущества по сравнению с методами типа FDTD.

Во-первых, он применим не только для нормального, но и для наклонного падения волны на поверхность фотонного кристалла (поскольку такая

возможность есть в известных стационарных матричных методах). Для методов типа FDTD задача о наклонном падении на поверхность даже одномерного фотонного кристалла является двумерной, то есть имеет достаточно высокую вычислительную трудоемкость.

Во-вторых, по построению, метод Фурье-преобразования позволяет учитывать произвольный закон дисперсии материальных параметров (в том числе, заданный таблично).

В-третьих, если временная развертка падающей волны является локализованной, то квадратурные формулы, реализующие преобразование Фурье, сходятся не степенным, а экспоненциальным образом [5]. Поэтому предложенный метод является сверхбыстрым.

Для контроля фактической точности квадратур использовался метод сгущающихся сеток и апостериорные оценки, предложенные в [6].

Предлагаемый в работе алгоритм был реализован в виде рабочей программы. Правильность ее работы проверялась двумя способами.

Для проверки блока решения стационарной задачи проводились расчеты спектра отражения от фотонного кристалла. Пусть плоская монохроматическая волна наклонно падает из воздуха на структуру, включающую 7 бислоев SiO_2 и Ta_2O_5 толщиной 160 нм и 112 нм соответственно [7]. Поверх последнего слоя Ta_2O_5 располагается покрытие SiO_2 толщиной 260 нм. Угол наклона равен 45 градусов.

Для верификации метода решения нестационарной задачи проводились расчеты тестовой задачи с известным точным решением. Рассматривалось наклонное падение заданного импульса на границу раздела однородных недиспергирующих диэлектриков. Погрешность расчета определялась непосредственно как разность численного и точного решений. Полученные погрешности Δ в зависимости от числа узлов сеток по времени и по частоте приведены на рис.1. Масштаб графика полулогарифмический. Видно, что скорость сходимости намного превышает степенную.

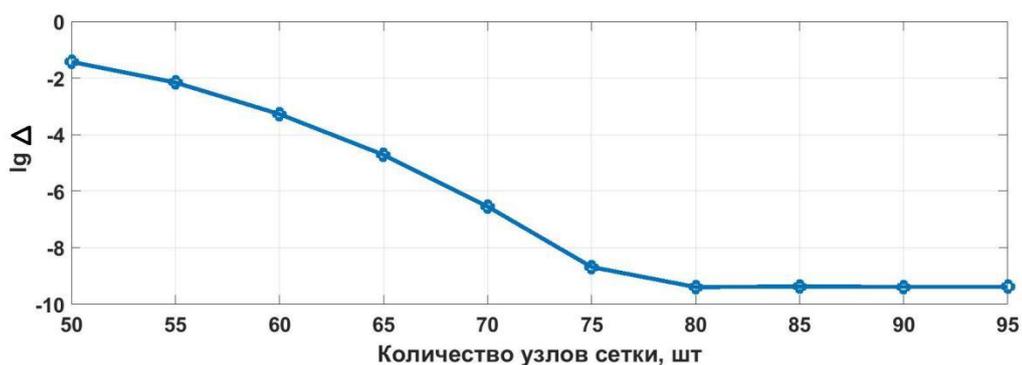


Рис. 1. Относительная погрешность решения нестационарной задачи в зависимости от числа шагов сетки

Проведенные расчеты являются достаточно убедительной верификацией построенных методов и наглядно иллюстрируют их преимущества по сравнению с известными подходами.

С использованием предлагаемого метода рассмотрена задача о прохождении излучения через рассмотренный ранее ФК в нестационарной постановке. Пусть из SiO₂ на ФК наклонно падает гауссов импульс с центральной длиной волны 800 нм и полушириной на половине высоты 30 нм. Угол падения равен 45 градусов.

На границе раздела "SiO₂-воздух" возникает полное внутреннее отражение. В фотонном кристалле формируется связанное состояние: блоховская поверхностная волна. Эта волна распространяется вдоль поверхности фотонного кристалла, теряя энергию за счет излучения. Поэтому ее время жизни, то есть время, за которое интенсивность свечения уменьшается в e раз, оказывается конечным. Время жизни обнаруженной волны найдено с помощью численного расчёта кросс-корреляционной функции для отражённого импульса и равно $\tau = 832$ фс. Результаты находятся в хорошем согласии с оценкой по добротности резонанса в спектре отражения через полуширину провала в спектре ФК соответствующему возбуждению поверхностной волны.

Работа подготовлена при поддержке РФФИ (проект 19-01-00593А).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ж.О.Домбровская и др.. Математическое моделирование электродинамических систем на основе метаматериалов // Физические основы приборостроения, 2019. Т. 8, № 3. С.7-18.
2. Taflove A., Johnson S.G., Oskooi A."Advances in FDTD Computational Electromagnetics: Photonics and Nanotechnology" Artech House, London, UK, Norwood, Massachusetts, USA. 2013.
3. Dombrovskaya Zh. O., Belov A. A. // Journal of Physics: Conference Series. 2020. V. 1461. P. 012032.
4. Berreman D. W. // Journal of the Optical Society of America. 1972. V. 62, No. 4. P. 502.
5. Калиткин Н.Н., Колганов С.А. // Доклады академии наук. 2017. Т. 473, № 4. С. 401.
6. Калиткин Н.Н., Белов А.А. // Доклады Академии наук. 2013. Т. 452. № 3. С. 261.
7. Белов А.А., Калиткин Н.Н. // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 7. С. 907.

Поиск оптимального положения источника излучения в конической безэховой камере методом математического моделирования

Т.А. Кузьмич¹, Н.Е. Шапкина^{1,2}, Н.П. Балабуха², Н.Л. Меньших²

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
физический факультет, Москва, Россия

²Институт Теоретической Прикладной Электродинамики РАН

kuzmich.ta16@physics.msu.ru

При проведении измерений рассеивающих свойств объектов на открытых полигонах влияние погодных условий приводит к заметному увеличению ошибки измерений. В таких случаях эффективным средством проведения измерений является компактный радиоизмерительный полигон. Одним из главных преимуществ является полная независимость от внешних воздействий и погодных факторов, так как все измерения проходят в закрытом помещении - безэховой камере.

Безэховая камера (БЭК) представляет собой помещение, стены которого не отражают радиоволны. Для этого их покрывают специальным материалом (РПМ), поглощающим волны в широком диапазоне углов падения электромагнитных волн на поверхность стенок. Целью создания БЭК является формирование рабочей зоны - объема, в котором объект будет позиционироваться как в свободном пространстве. В рабочей зоне безэховой камеры формируется электромагнитное поле квазиплоской волны. Данный подход позволяет измерять характеристики рассеяния исследуемых объектов с высокой степенью точности внутри помещения БЭК.

Низкочастотные полигоны представляют собой рупорную безэховую камеру (РБЭК): металлическую конструкцию, состоящую из волновода переменного сечения с открытым излучающим концом и примыкающей части постоянного сечения, где формируется рабочая зона. Длина конической части исследуемой конической камеры составляет 15 м, а длина цилиндрического продолжения - 10 м, радиус основания конуса - 5.4 м.

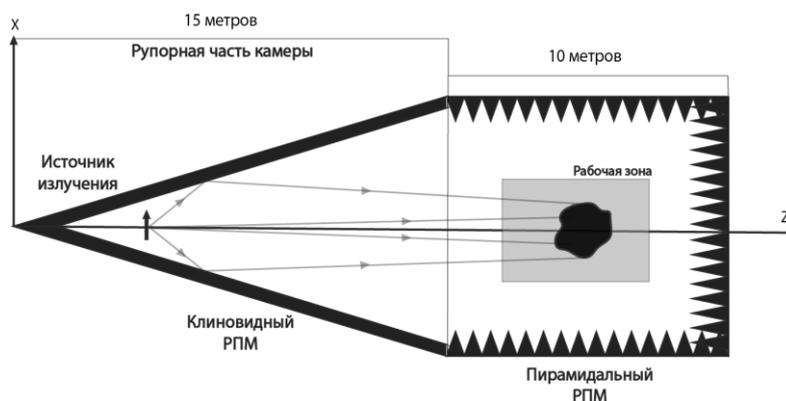


Рис. 1. Модель конической рупорной безэховой камеры.

Расчеты производятся на рабочей частоте камеры - 300 МГц. В разных частях БЭК используется различный РПМ из-за разных углов падения и необходимой степени поглощения. В расширяющейся части рупорной камеры обычно используется клиновидный материал, который в данной работе моделируется плоским диэлектрическим слоем.

При моделировании радиопоглощающего материала в цилиндрической части камеры необходимо учесть, что присутствуют лучи, падающие почти по нормали к поверхности, поэтому здесь РПМ моделируется слоем диэлектрика с конечным комплексным импедансом.

Для сложных электродинамических структур при решении такого рода задач применяется численное решение уравнений Максвелла проекционными методами, в частности, методом интегральных уравнений. Расчеты выполняются с помощью вычислительного пакета FEKO. Для расчетов модели с реальными размерами и на реальных частотах требуются большие вычислительные мощности, поэтому вычисления выполнялись на кластере ИТПЭ РАН.

Прежде всего анализируется решение для идеально проводящей конической камеры исходного размера и при расположении источника на расстоянии 3λ от устья камеры. Однако распределение поля далеко от предполагаемого «столообразного», а область рабочей зоны составляет $2 \times 2\lambda$. Чтобы уменьшить отраженное излучение, направленное перпендикулярно оси конуса, стенки конической камеры покрываются радиопоглощающим материалом. Распределения поля в такой конфигурации кардинально поменяется в Е и Н плоскостях. Форма графиков становится ближе к столообразной, а область рабочей зоны по амплитуде увеличивается и теперь составляет примерно $4 \times 3\lambda$. Однако, учитывая требования к приемлемой неравномерности по фазе в $\pi/8$, рабочая зона все еще составляет $2\lambda \times 2\lambda$. Для сглаживания неравномерности распределения фазы исследуется влияние на формирование поля в рабочей зоне расположения источника излучения начиная от исходного значения 3λ до 5λ с шагом $\lambda/2$.

При выдвигании источника излучения на расстояние больше длины волны сначала наблюдается уменьшение значения фазовой характеристики в центре рабочей зоны, а потом формируется четкая дифракционная картина с несколькими максимумами и минимумами. Следовательно, дальнейшее движение источника по направлению от устья камеры не имеет смысла. С помощью такого анализа сокращается промежуток значений удаления источника излучения от вершины конуса, при котором распределение поля будет иметь наилучшие амплитудно-фазовые характеристики.

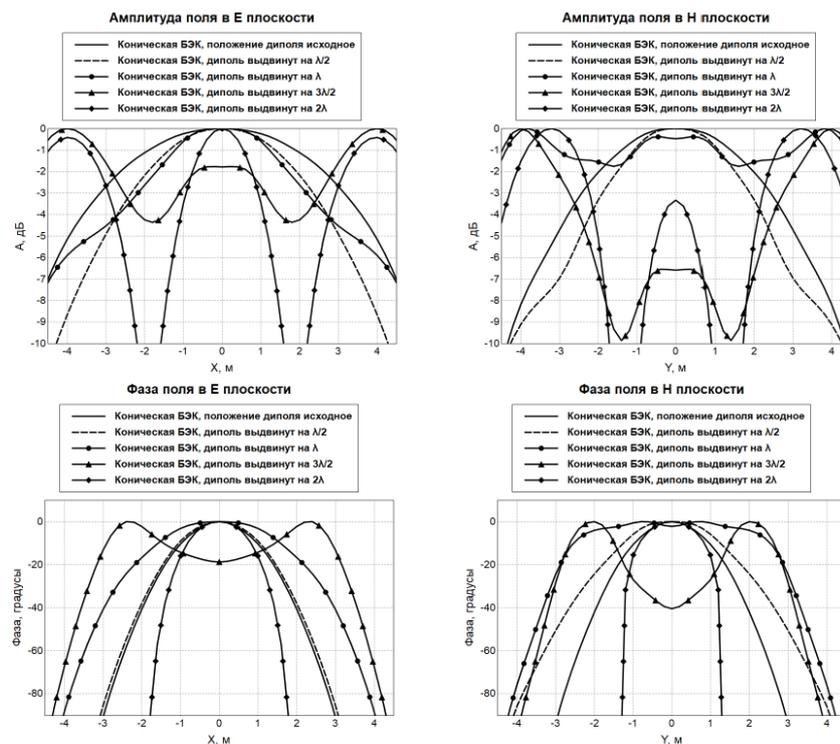


Рис. 2. Распределение амплитуды и фазы в Е и Н плоскостях при выдвигании источника

Исходя из полученных характеристик полей в рабочей зоне камеры можно рассчитать оптимальное расположение диполя на оси камеры конического типа. В данной работе рассматривается одномерная оптимизация. Оптимальным будем считать положение источника, при котором максимальна сумма квадратов линейных размеров рабочей зоны в двух плоскостях и для фазового амплитудного распределения. В силу того, что вычисления электромагнитного поля внутри конической рупорной камеры требуют больших вычислительных ресурсов, необходимо использовать метод оптимизации с заранее известным конечным числом итераций. Одним из таких методов решения однопараметрических задач является метод Фибоначчи. Он теоретически обладает наилучшей среди методов исключения отрезков стратегией и применяется для численного поиска безусловного экстремума: требуется найти точку максимума r_0 для целевой функции $\Phi(r_0)$ на интервале $[a;b]$:

$$\Phi(r_0) = |d_{Amp}^E|^2 + |d_{Amp}^H|^2 + |d_{Phase}^E|^2 + |d_{Phase}^H|^2. \quad (1)$$

Для уменьшения интервала неопределенности необходимо произвести анализ функции как минимум в двух точках для первой итерации и в одной для следующих, то есть $k + 1$ вычисление целевой функции.

k	λ	μ	$\Phi(\lambda)$	$\Phi(\mu)$	a	b
1	1,7071	1,743	-5,763	-3,9526	1,65	1,8
2	1,6858	1,707	-5,446	-5,7630	1,65	1,743
3	1,7071	1,707	-5,763	-6,3220	1,686	1,743
4	1,7074	1,721	-6,322	-6,8325	1,7071	1,743
5	1,7215	1,719	-6,832	-6,0926	1,7074	1,743
6	1,7133	1,721	-6,83	-6,8325	1,7074	1,7215
7	1,7133	1,723	-6,83	-6,8325	1,7133	1,7215

Рис. 3. Вычисление интервала максимума целевой функции.

В результате вычислений за $k=7$ итераций интервал сузился от $[1.65; 1.8]$ м до $[1.713; 1.722]$ м. Погрешность метода определяется как $\varepsilon=0.004$ м. При таком расположении источника величина рабочей зоны - $4,28 \times 1,56$ м по амплитуде и $1,64 \times 1,98$ м по фазе.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Emerson и H. Sefton, "An improved design for indoor ranges", Proceedings of the IEEE, т. 53, No 8, с. 1079-1081, 1965
2. V. Rodriguez, "A cone shaped taper anechoic chamber for antenna measurements in the 200 MHz to 18GHz frequency range", в Proceedings of the 2012 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation, IEEE, 2012, с. 1-2.
3. K.-h. Lee, C.-C. Chen и R. Lee, "Novel dual-polarized tapered-chamber feed design concepts", IEEE Antennas and Propagation Magazine, т. 47, No 4, с. 214-218, 2005
4. Т. Кузьмич, "Mathematical Modelling of Cone Shaped Tapered Anechoic Chamber", в Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves (June 24-28, 2019, Divnomorskoe, Russia).
5. Кузьмич Т.А., Шапкина Н.Е., Балабуха Н.П., "Исследование конической безэховой камеры методами математического моделирования", ARMIMP-2019

Асимптотическое разложение решения задач электромагнитной теории дифракции на объектах с коническими точками

А.Н. Боголюбов, И.Е. Могилевский, В.В. Ровенко

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет

bogan7@yandex.ru

imogilevsky@mail.ru

rovenko.vladimir@physics.msu.ru

В настоящее время весьма актуальными являются задачи скалярной и электромагнитной дифракции на сложных структурах при наличии ребер и конических точек на их границах. В частности, результат их решения может быть использован при решении различных задач аэродинамики и теории дифракции, например, задач о прохождении луча в маскирующей оболочке [1]. Известно, что наличие ребер, кромок и конических точек приводит к появлениям сингулярностей у поля в их окрестностях [2,3], что существенно усложняет применение численных методов для исследования подобных задач. Одним из весьма эффективных способов преодоления этих проблем является выделение особенности решения в явном виде, то есть построение асимптотического представления решения в окрестности особой точки границы. При этом существенно используются по асимптотике решения эллиптических краевых задач, представленные в работах В.А. Кондратьева [4], а также С.А. Назарова и Б.А. Пламеневского [3].

Рассматривается трехмерная задача дифракции электромагнитной волны на ограниченном идеально проводящем теле, имеющем коническую точку (рисунок 1):

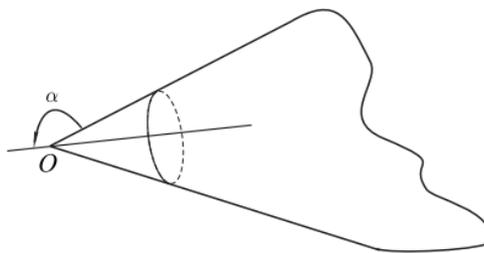


Рис. 1. Коническая поверхность.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{H} &= -ik\bar{E} + \frac{4\pi}{c}\bar{j}, \operatorname{supp} j \subset D_0 \subset \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \\ \operatorname{rot} \bar{E} &= ik\bar{H}, \\ \operatorname{div} \bar{H} &= 0, \\ \operatorname{div} \bar{E} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Граничные условия имеют вид:

$$(\bar{H}, \bar{n})|_{\partial\Omega} = 0, [\bar{E}, \bar{n}]|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

где \bar{n} – вектор нормали к конической поверхности.

Условие Мейкснера на вершине конуса:

$$\bar{E}, \bar{H} \in (L_2^{\text{loc}})^3$$

Используется представление:

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \text{rot rot}(\bar{e}_r U_r) + ik \text{rot}(\bar{e}_r V_r), \\ \bar{H} &= -ik \text{rot}(\bar{e}_r U_r) + \text{rot rot}(\bar{e}_r V_r),\end{aligned}$$

где U и V – электрический и магнитный потенциалы Дебая, для которых получаем следующие задачи [5], оставив в левой части оператор Лапласа, а правую часть обозначив как функции $f_{1,2}(M)$:

$$\Delta U = f_1(M), \quad (3)$$

$$U|_{\theta=\alpha} = 0$$

$$\Delta V = f_2(M), \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \theta} \right|_{\theta=\alpha} = 0$$

С помощью метода, впервые предложенного Кондратьевым [4], строится асимптотическое разложение решения трехмерной задачи дифракции электромагнитной волны на ограниченном теле, содержащем коническую точку. Для задачи (3) оно будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}U(r, \theta, \varphi) &= \chi \left\{ \sum_{-\frac{1}{2} < n_m < \frac{3}{2}} C_{n,m} r^{n_m} P_{n_m}^{(m)}(\cos \theta) e^{im\varphi} + \right. \\ &\left. + \sum_{-\frac{1}{2} < n_m + 1 < \frac{3}{2}} D_{n,m} r^{n_m + 1} P_{n_m}^{(m)}(\cos \theta) e^{im\varphi} \right\} + \mathfrak{N}(r, \theta, \varphi),\end{aligned} \quad (5)$$

где n_m – решения уравнений $P_{n_m}^{(m)}(\cos \alpha) = 0$, $C_{n,m}$ и $D_{n,m}$ – постоянные, $\mathfrak{N}(r, \theta, \varphi)$ – гладкая часть функции $U(r, \theta, \varphi)$, $\chi(r)$ – срезающая функция:

$$\chi(r) = \begin{cases} 1, & r \leq d/2 \\ 0, & r > d \end{cases}, \chi(r) \in C^\infty.$$

Для задачи (4) будем иметь совершенно аналогичное представление. Только n_m будут решениями уравнений $\left. \frac{\partial P_{n_m}^{(m)}(\cos \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\alpha} = 0$.

Разрешимость задач для нахождения n_m показаны на основе подхода, изложенного в [6].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Могилевский И. Е., Ровенко В.В. // Физические основы приборостроения, том 3, № 4, с. 28-39, 2014.
- [2] Свешников А. Г., Могилевский И. Е. Избранные математические задачи теории дифракции. Москва 2012, 239 с.
- [3] Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. Наука 1991, 334 с.
- [4] Кондратьев В.А. // Тр. ММО, **16**, Издательство Московского университета, М., 1967, 209–292
- [5] Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. Москва «ФИЗМАТЛИТ», 2004, 688 с.

[6] H.M. Macdonald// (p. 264–281) Proc. Lond. Math. Soc.,1899.

Метаморфозы структуры дендритных образований

А.В. Косырев¹, П.В. Короленко^{1,2}, Ю.В. Рыжикова¹

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра оптики, спектроскопии и физики наносистем

² Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук
ryzhikovaju@physics.msu.ru

В настоящее время актуальным является синергетическое моделирование различных био-физических процессов, в том числе включающих этапы формирования природоподобных самоорганизующихся наноструктур дендритной геометрии [1-2].

Некоторые примеры фрактальных дендритных структур показаны на рис. 1. Приведенные примеры иллюстрируют широкое распространение элементов дендритной формы.

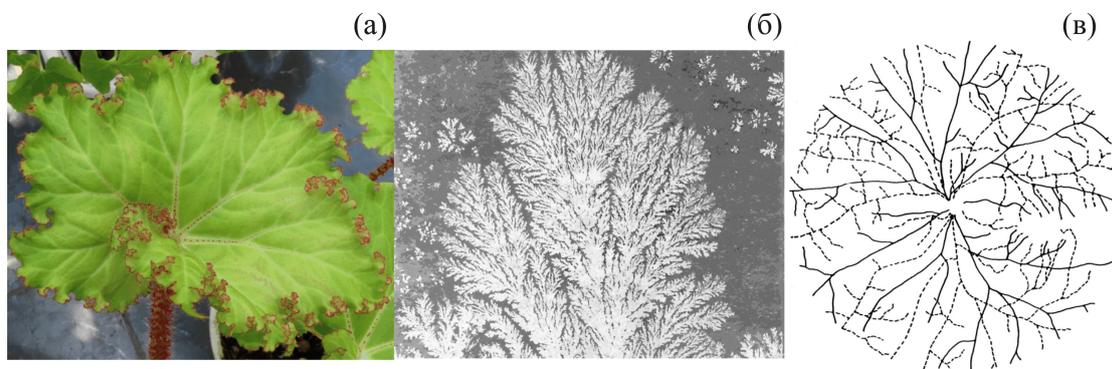


Рис. 1. Примеры дендритных структур: (а) – дендритные образования на листе; (б) – минеральные дендриты; (в) – дендритная форма расположения кровеносных сосудов в сетчатке человеческого глаза; фрактальная размерность артериальной системы $D=1.63\pm 0,05$ (сплошная линия) и венозной системы $D=1.71\pm 0,07$ (пунктир).

Несмотря на большое количество работ [1, 3-5], выполненных в указанном направлении, недостаточно изученными оказались динамические особенности формирования дендритных структур со стохастически образующимися центрами роста, в том числе их предельные фрактальные характеристики.

Цель данной работы состоит в анализе возможностей разработанных моделей формирования дендритных образований для описания качественных структурных изменений в процессах их самоорганизации на первых этапах объединения частиц.

В работе предлагается новый метод моделирования двумерных дендритов со стохастически образующимися центрами роста в процессе их самоорганизации. Разработанный комплекс новых оригинальных программ позволяет проводить обобщенный анализ геометрии дендритов и их фрактальных особенностей.

Для дендритных образований количественная оценка их самоподобных свойств проводилась на основе определения фрактальной размерности D [5-6]. Достоверность определения фрактальных размерностей массовым и клеточным способом проверялась на простых тестовых объектах. Тестовые объекты обычно представляли собой круг с равномерным распределением частиц и круг с неравномерным заполнением частицами. В случае равномерного пространственного распределения частиц по кругу, клеточная и массовая размерность структурных образований $D_b \approx D \rightarrow 2$ при числе частиц $N \rightarrow 10^6$. Эти оценки фрактальных размерностей служат ориентиром в случае модели ассоциации частиц “баллистическая агрегация – кластер (БА)” [1, 6]. Неравномерное

распределение частиц допускает получение различных вариантов значений фрактальных размерностей при изменении рыхлости сформированного круга: $D_b, D < 2$. Для примера на рис. 2, а представлен тестовый объект с заданной массовой фрактальной размерностью $D = 1,71$. Такое численное значение фрактальной размерности является предельным для классической модели ассоциации частиц “диффузия, ограниченная агрегацией (ДОА)” [1, 7].

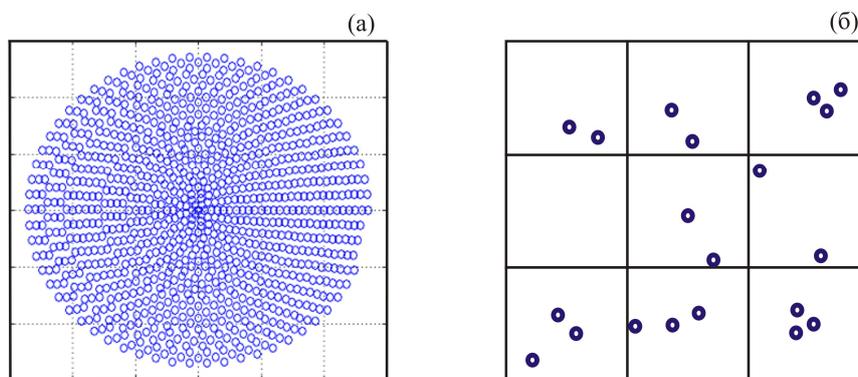


Рис. 2. Пример (а) –тестового объекта и (б) – расчетная сетка с частицами.

Недостатком, ограничивающим возможные применения известных подходов ДОА, БА и их модификаций [3], является невозможность моделирования стохастического автономного образования центров роста фракталов. Предлагаемый нами новый метод построения дендритных кластеров произвольной симметрии (рис. 3) со спонтанно образующимися центрами роста основан на комплексном использовании свойств классических агрегационных моделей ДОА и БА с учетом взаимодействия между составляющими дендрит частицами и одновременном движении нескольких частиц. Схема расчета включала также задание количественного критерия образования центров роста кластера.

На первом этапе нового алгоритма задается случайное движение частиц, составляющих дендритное образование. При задании их движения используются модели ДОА и БА [6] при расположении частиц внутри радиуса рождения.

На втором этапе для корректного учета взаимодействия частиц осуществляется сеточное представление данных с разбиением моделируемой области на сектора, в которых хранится информация о присутствующих в них частицах (рис. 2, б). Одновременно вводится эффективный радиус взаимодействия частиц, при превышении которого этим взаимодействием можно было пренебречь.

На рис. 3 приведены некоторые результаты использования разработанных моделей для получения различных 2D дендритных образований со стохастическим образованием их центров роста. Для модели “первичного бульона” (рис. 3, а) в начальный момент времени в каждой клетке сетки с некоторой вероятностью P_b рождаются N_b частиц. В дальнейшем при взаимодействии они могут образовать дендритоподобные кластеры, которые растут, используя только первоначальный материал. На рис. 3, б показан вариант модели, близкой к классическим вариантам центрально-симметричных дендритных образований [3-4, 6-7]. Рождение частиц происходит только на окружности рождения частиц. С целью оптимизации работы алгоритма рассматривается отказ от расчёта случайного угла рождения [6] – вместо этого при построении сетки вычисляется множество клеток, пересекающихся с окружностью рождения. Такие клетки считаются периферийными и способными породить новые частицы. На каждой итерации модели в каждой периферийной

клетке, если в ней нет неподвижных частиц, с заданной вероятностью рождается новая частица. Если частица выходит за границы моделируемой области, она исключается из процесса моделирования. Для быстроты работы алгоритма моделирование начинается с сетки небольшого размера. В момент, когда все периферийные клетки содержат хотя бы одну неподвижную частицу, размер сетки увеличивается и происходит перерасчёт множества периферийных клеток.

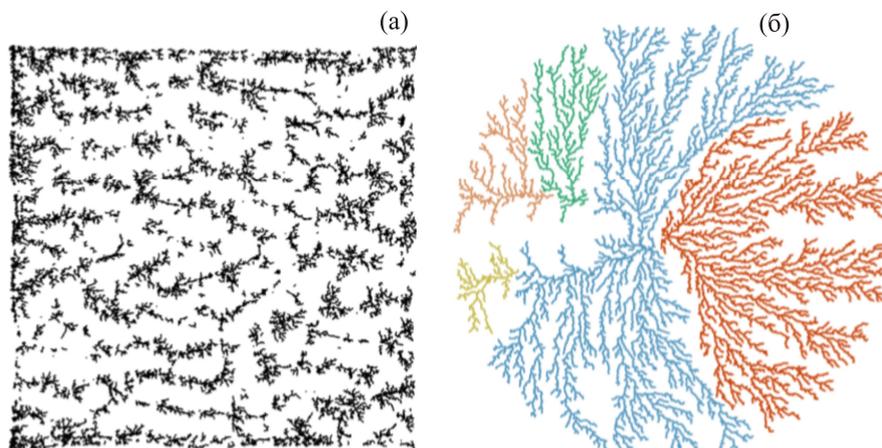


Рис. 3. Примеры моделирования дендритных структур: (а) – модель “первичного бульона”, (б) – модификация модели диффузии, ограниченной агрегацией.

В программной реализации допускается возможность перехода к классическим моделям ДОО и БА [1, 3-7]. Результаты моделирования формирования двумерных фрактальных дендритных структур разными способами показали, что предельное значение фрактальной размерности кластеров принимает значение близкое к $D = 1,71$. Таким образом, выполненная работа позволила вскрыть особенности динамики изменения фрактальной размерности отдельных кластеров с разной симметрией в зависимости от числа составляющих их частиц.

Описанная модель формирования дендритных образований позволяет создавать их с разной геометрией и разной степенью разреженности (рис. 3). Кроме того, разработанная модель даёт новые возможности управления ростом дендритов со стохастическими центрами роста, что может использоваться в качестве имитации морфогенеза некоторых биологических объектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.А. Каретин “Самоорганизация живых систем. Краткий курс синергетики для биологов” Владивосток: Мор. гос. ун-т., 2017.
2. Д.Н. Бухаров, А.О. Кучерик, С.М. Аракелян // Сборник научных трудов IX Международной конференции по фотонике и информационной оптике. М.: НИЯУ МИФИ, 2019. С. 388.
3. J.R. Nicolás-Carlock, J.L. Carrillo-Estrada, V. Dossetti // Scientific reports. 2016. V. 6. P. 19505.
4. Д.Д. Ружицкая, Ю.В. Рыжикова, С.Б. Рыжиков // Известия РАН. Серия физическая. 2018. Т.82. №11. С. 1512.
5. Е. Федер “Фракталы”. М.: Мир, 1991.
6. Ю.В. Рыжикова, С.Б. Рыжиков // Ученые записки физического факультета МГУ. 2018. №5. С. 1850401.
7. Т.А. Witten, L.M. Sander // Phys. Rev. Lett. 1981. V. 47. P. 1400.

Моделирование бесконечных импедансных волноводов постоянного сечения

А.Н. Боголюбов, А.И. Ерохин, М.И. Светкин

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

mihail-svetkin@mail.ru

Рассматривается задача для бесконечного волновода постоянного сечения без заполнения с потерями в стенках, описываемыми граничными условиями Шукина-Леонтовича с переменным импедансом по границе сечения. С помощью метода конечных элементов находятся собственные моды и строятся дисперсионные характеристики рассматриваемого волновода.

Волноводы являются важной составляющей множества электронных устройств с широкой областью применения, среди которых можно выделить генераторы СВЧ [1], антенны [2], резонаторы [3]. Свойства волновода – его дисперсионные характеристики, уровни потерь зависит от множества параметров – формы продольного и поперечного сечения, наличие вставок, заполнения и свойств материала, из которого волновод сделан. Такое большое количество параметров, определяющих свойства волновода требует разработки различных математических моделей, которые могут описать поведение электромагнитных полей в рассматриваемой волноведущей структуре. Предлагаемый в данной работе метод на основе метода конечных элементов позволяет рассчитывать широкий класс задач для волноводов с различной геометрией и с неоднородным импедансом.

Пусть бесконечный волновод имеет постоянное сечение D и ориентирован вдоль оси z . Электромагнитное поле в нем описывается системой уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= ik\mathbf{H}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -ik\mathbf{E}, \end{aligned} \quad (1)$$

$(x, y) \in D$, $z \in (-\infty, \infty)$. На границе сечения ∂D ставятся граничные условия Шукина-Леонтовича [4]:

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}] = -W[\mathbf{n}, [\mathbf{n}, \mathbf{H}]] \quad (2)$$

где \mathbf{n} – внешняя нормаль к границе ∂D , $W = W(x, y)$, $(x, y) \in \partial D$ – переменный импеданс.

При данном выборе геометрии решение (1) может быть записано с помощью функций Борнуса [5] электрического \tilde{u} и магнитного типов \tilde{v} , удовлетворяющих уравнениям Гельмгольца. Будем искать решение в виде бегущей волны:

$$\tilde{u}(x, y, z) = u(x, y)e^{i\gamma z}, \quad \tilde{v}(x, y, z) = v(x, y)e^{i\gamma z}, \quad (3)$$

тогда в сечении D получим спектральную задачу относительно параметра γ .

$$\Delta u + k^2 u = \gamma^2 u, \quad \Delta v + k^2 v = \gamma^2 v. \quad (4)$$

Граничные условия (2) для функций Борнуса примут вид:

$$(k^2 - \gamma^2)u = -W \left(i\gamma \frac{\partial v}{\partial \tau} + ik \frac{\partial u}{\partial n} \right), \quad W(k^2 - \gamma^2)v = i\gamma \frac{\partial u}{\partial \tau} - ik \frac{\partial v}{\partial n}, \quad (5)$$

где n – нормаль, а τ – касательная к границе ∂D .

В случае идеальных стенок $W = 0$ условие (5) переходит в условие Дирихле для u , и Неймана для v , и задачи разделяются на независимые решения электрического и магнитного типов. В случае импедансных стенок такого разделения не происходит, и моды становятся гибридными.

Таким образом, задача нахождения собственных мод импедансного волновода сводится к отысканию таких значений γ и таких нетривиальных u и v , при которых выполнено (4), (5).

Данная задача решается методом конечных элементов, который приводит к матричной квадратичной задаче на собственные значения относительно параметра γ .

$$A_0 C + \gamma A_1 C + \gamma^2 A_2 C = 0. \quad (6)$$

где C – столбец коэффициентов разложения функций Борнуса по базису конечных элементов.

Решение с помощью предложенного метода верифицировалось на задаче для бесконечного круглого импедансного волновода, поскольку для этой задачи известно аналитическое решение. В табл. 1 представлены значения спектрального параметра γ , полученные аналитически и численно с помощью предложенного метода. На рис. 1. представлены распределение действительной части электрической функции Борнуса в сечении волновода.

γ , аналитическое	γ , численное	Мода
$5.7618 + 0.0704i$	$5.7616 + 0.0704i$	TE ₀₁ (вырожденная 2 раза)
$5.6047 + 0.1310i$	$5.6044 + 0.1310i$	TM ₀₀
$5.2800 + 0.1367i$	$5.2789 + 0.1369i$	TE ₀₂ (вырожденная 2 раза)

Табл. 1. Постоянные распространения круглого волновода низших мод.

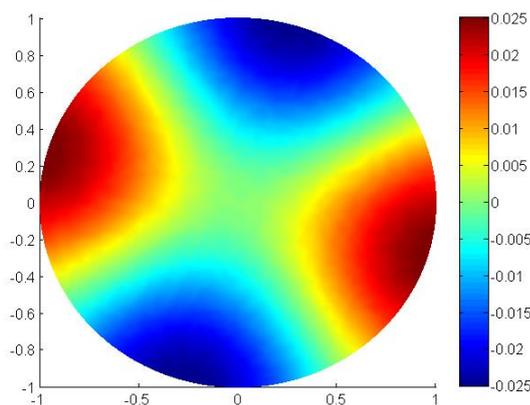


Рис. 1. Мода TE₀₂ круглого импедансного волновода.

Далее предложенный метод применялся для волноводов более сложного сечения – прямоугольные, коаксиальные прямоугольные, L-образные, H-образные и с неоднородным импедансом на границе. На рис. 2 изображены моды L-образного волновода с постоянным импедансом на границе и прямоугольного волновода с импедансной левой и идеальными остальными границами.

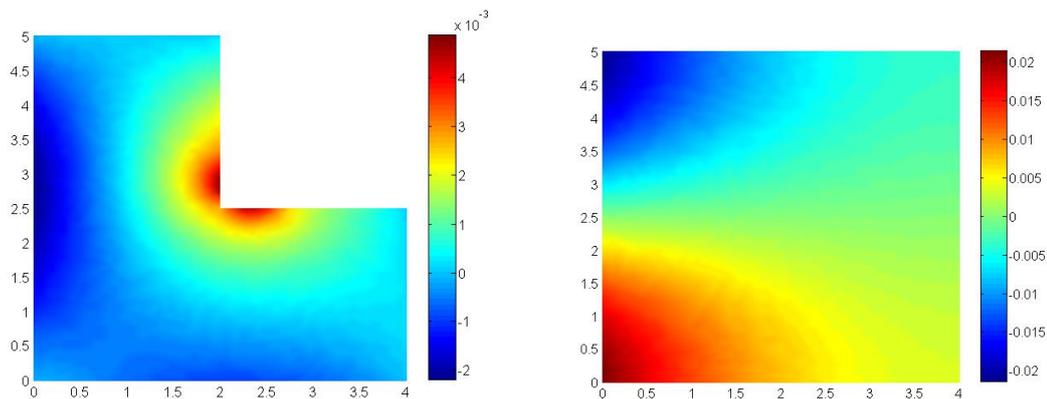


Рис. 2. Низшие моды L-образного волновода (слева) и прямоугольного волновода с левой импедансной границей (справа).

Таким образом, предложенный метод позволяет исследовать волноводы самого разнообразного сечения с переменным импедансом на границе области. Продемонстрировано согласование результатов с аналитическим решением для круглого волновода. Могут быть построена дисперсионная характеристика и зависимость спектра при изменении распределения и величины импеданса. Этот подход открывает широкие возможности для настройки подавления определенных мод в волноводе, что позволит использовать их как фильтры. Также полученный набор мод импедансного волновода может быть использован для обобщения метода, разработанного ранее для построения дисперсионных характеристик идеальных волноводов ступенчатого типа [6] на ступенчатые импедансные волноводы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rahmani Z., Jazi B., Heidari-Semiromi E. //Physics of Plasmas. – 2014. – Т. 21. – №. 9. – С. 092122.
2. Henry M. et al. //IEEE Transactions on Advanced Packaging. – 2009. – Т. 32. – №. 1. – С. 93-100.
3. Chien H. Y. et al. //IEEE Transactions on microwave theory and techniques. – 2009. – Т. 57. – №. 7. – С. 1774-1782.
4. Л.А. Вайнштейн «Электромагнитные волны» М.: Радио и связь, 1988.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. ЖТФ. 18. С. 959. (1948).
6. Боголюбов А. Н., Ерохин А. И., Светкин М. И. // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2018. — Т. 58, № 6. — С. 951–960.

В секцию 14

Е.Н. Терентьев, Н.Е. Шилин-Терентьев

Анализ результатов сверхразрешения тени Черной Дыры Powehi

В работе представляются результаты сверхразрешения изображений Черной Дыры (ЧД) Powehi, полученные с Телескопа Горизонта Событий (ТГС). При анализе результатов сверхразрешения впервые выделен кластер звезд перед набегающей тенью ЧД, две обтекающие трубки звездотоков и кластеры звезд за ЧД.

Изображение с ТГС и обусловленные R&SR изображения

ТГС [9] состоит из 8 приемных синхронизированных (по атомным часам) антенн в

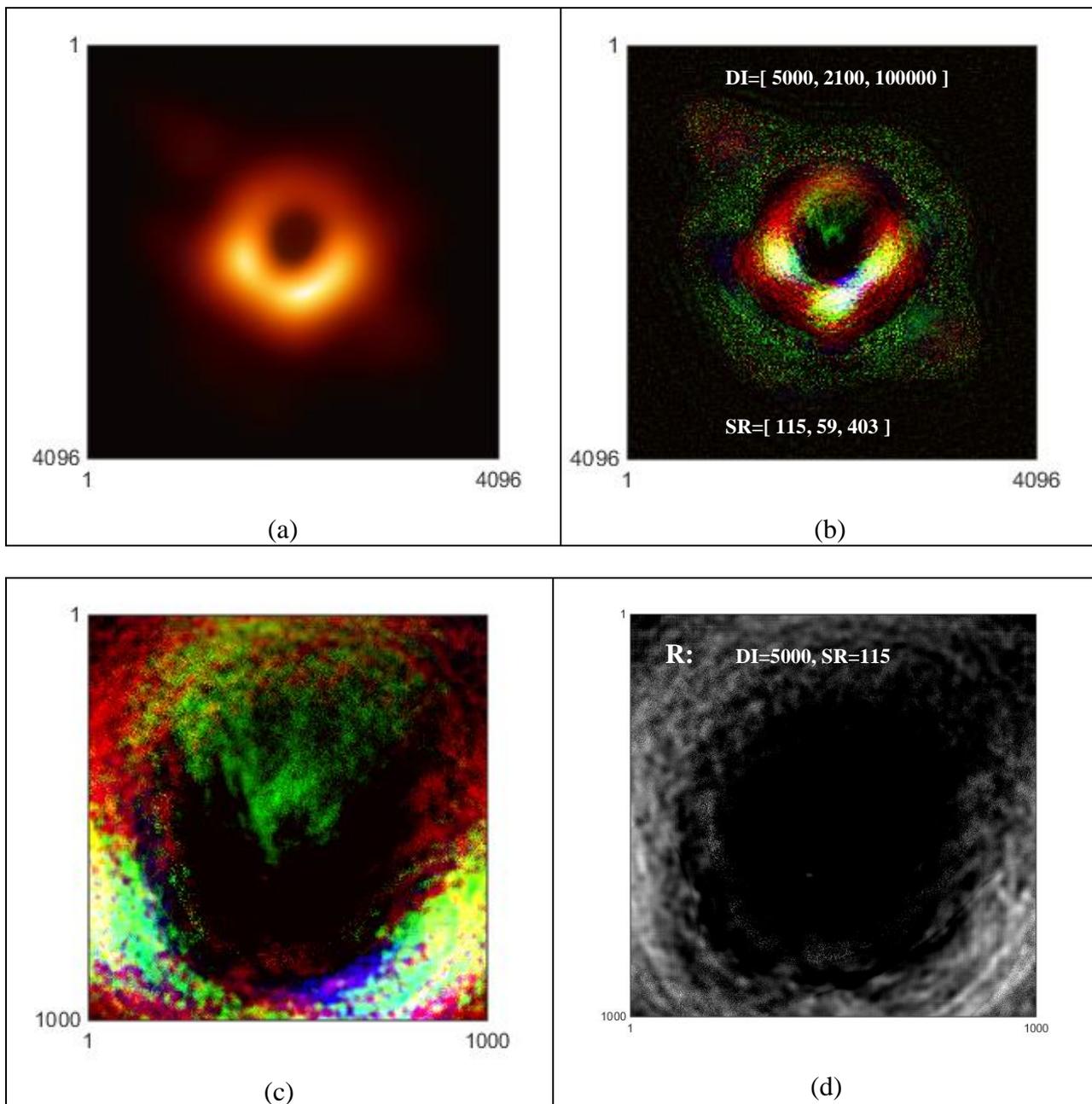


Рис -1: (а) изображение ЧД Powehi обусловленное R&SR изображение с выделенной центральной частью – (с) и в R канале (d).

трех радиодиапазонах {R, G, B}. Профессор Katherine L. Bouman впервые реализовала математическую стыковку [10] данных с 8 телескопов, превратив их в один ТГС с большой апертурой (~10000 км) и получила первое изображение ЧД Powehi [1,9].

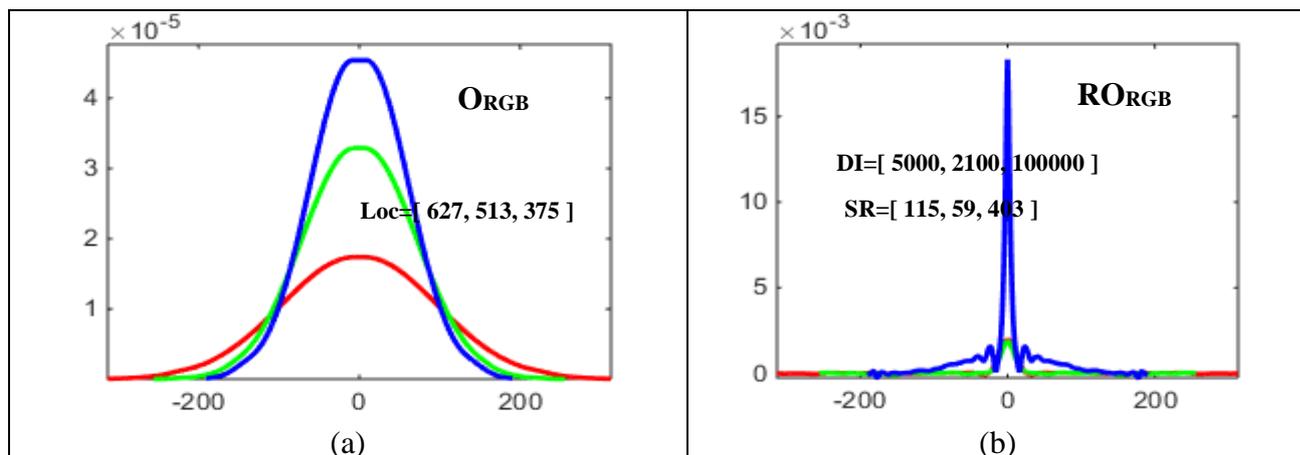


Рис -2: (a) – АФ O_{RGB} в трех радиодиапазонах {R, G, B}, (b) – RO_{RGB} разрешенные АФ O_{RGB}

В США 5 сентября 2019 г. объявили лауреатов премии Breakthrough Prize [12]. В области фундаментальной физики награда в \$3 млн досталась большому коллективу ученых – 347 человек, которые впервые сфотографировали сверхмассивную Черную Дыру.

В методе R&SR АФ разрешенные АФ RO_{RGB} являются более “узкими-тонкими” по сравнению с исходными АФ O_{RGB} , величины сверхразрешения SR считаются через интегралы от МПФ [2-5].

Полученные величины сверхразрешений SR соответствуют виртуальному ТГС с апертурой от Земли до Луны.

Модификации методов R&SR АФ [2-8] могут быть реализованы в электронной микроскопии, в новых радиолокационных технологиях, в радарх с синтезированной апертурой, КТ, МРТ томографии, телескопах и т.п.

Анализ результатов

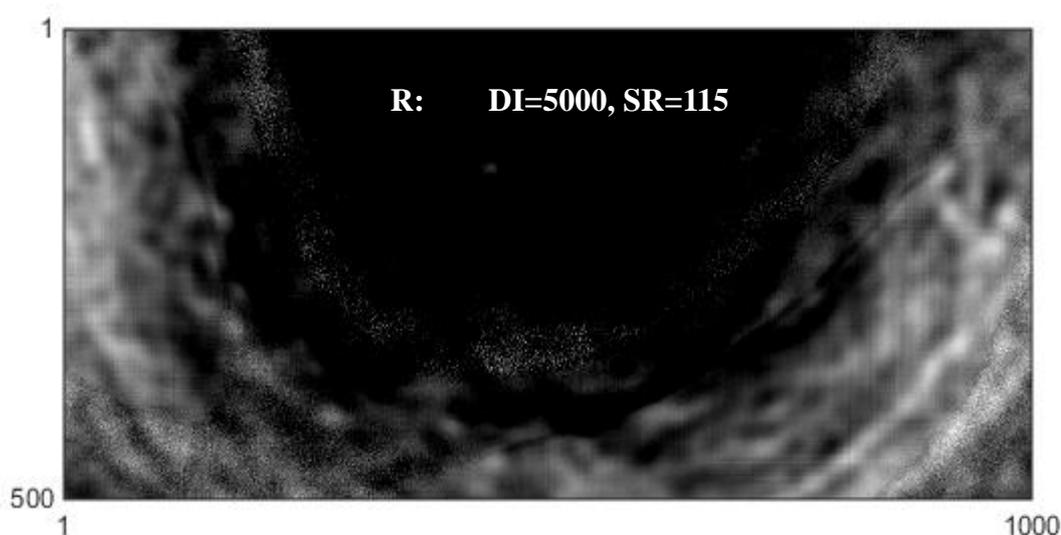


Рис -3: R&SR фрагмент изображения по каналу R

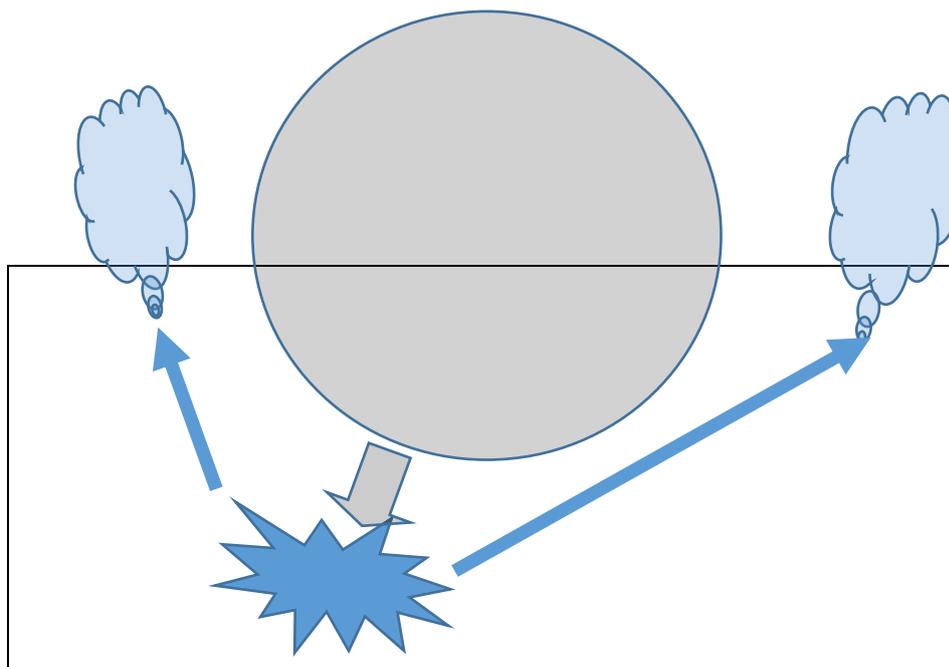


Рис -4. По каналу R наблюдаем движение тени ЧД по стрелке, кластер звезд перед тенью ЧД, две обтекающие трубки звездотоков и кластеры звезд за ЧД.

Обсуждение. Конечно, хотелось бы исследовать движения объектов – кластеров звезд, звездотоков и динамику плевков - Jet Spitting по 4 дням наблюдений ЧД Powehi, это и было бы доказательством правильности модели R&SR и верности результатов анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. <https://www.eso.org/public/images/eso1907a/>
2. Е.Н. Терентьев, Н.Е. Терентьев//ИЗВЕСТИЯ РАН, СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2015, том 79, № 12, с. 1633-1637.
3. Terentiev, E.N. and Terentiev, N. E.//ISSN 1062-8738, *Bulletin of the Russian Academy of Science. Physics*, 2015, Vol.79, No 12, pp.1427-1431, DOI 10.3103/S1062873815120229
4. Е.Н. Терентьев, Н.Е. Терентьев, Ю.А. Пирогов, И.И. Фаршакова//УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА, 9 с., №6, 1761005(2017)
5. Terentiev, E.N., Terentiev, N.E., Farshakova, I.I. // DOI: 10.1007/978-3-319-77788-7_19C.
6. E. N. Terentiev, N. E. Shilin-Terentiev // doi.org/10.1007/978-3-030-11533-3_44.
7. E. N. Terentiev, I. I. Farshakova, I. N. Prikhodko, N. E. Shilin-Terentyev //doi: 10.11648/j.sjams.20190705.12, ISSN: 2376-9491 (Print); ISSN: 2376-9513 (Online).
8. E. N. Terentiev, I. I. Farshakova, N. E. Shilin-Terentyev // <http://www.sciencepublishinggroup.com/journal/paperinfo?journalid=301&doi=10.11648/j.ajaa.20190703.11>.
9. E. N. Terentiev, I. N. Prikhodko and I. I. Farshakova // *Concept of mathematical microscope*, AIP Conference Proceedings 2171, 110010(2019); <https://doi.org/10.1063/1.5133244>
10. The Event Horizon Telescope Collaboration, First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole, *The Astrophysical Journal Letters*, 875:L1 (17pp), 2019 April 10, <https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab0ec7>
11. Bouman, Katherine L.; Johnson, Michael D.; Zoran, Daniel; Fish, Vincent L.; Doeleman, Sheperd S.; Freeman, William T. (2016). "*Computational Imaging for VLBI Image Reconstruction*": 913–922. [arXiv:1512.01413](https://arxiv.org/abs/1512.01413), doi:10.1109/CVPR.2016.105., hdl:1721.1/103077. Cite journal requires |journal= (help).
12. <https://breakthroughprize.org/News/54>

Обратная задача математического моделирования формы однозеркального параболического коллиматора

Ф.Б. Хлебников, Д.А. Коняев, А.Н. Боголюбов, Н.Е. Шапкина

Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова

mnfkhl@gmail.com

Компактные полигоны — это измерительные стенды для исследования дифракции плоских электромагнитных волн. Каждый компактный полигон состоит из безэховой камеры, в которую помещено измерительное оборудование, пилона, на который крепится исследуемый объект, источника излучения и коллиматора, преобразующего сферическую волну источника в поле, приближенное по структуре к полю плоской волны хотя бы в некоторой заранее заданной области пространства. Такая область называется рабочей зоной, и именно в ней проводится физический эксперимент. Наиболее распространённым типом коллиматоров на сегодняшний день остаётся однозеркальный параболический коллиматор — несимметричное проводящее зеркало, в фокус которого помещают источник излучения. Такой коллиматор работает благодаря своим геометрическим свойствам.

Всякий измерительный прибор вносит свою погрешность в результат, и коллиматор не является исключением. Дифракционные эффекты на границах зеркала могут существенно исказить поле в рабочей зоне и, так как полностью избавиться от них невозможно, при проектировании коллиматоров всегда применяют комплекс мер, позволяющих снизить их влияние на поле в рабочей зоне.

Одним из способов подавления краевых эффектов является применение коллиматоров со скруглёнными краями. Такие коллиматоры сложны в производстве, установки и юстировке, но позволяют добиться более высокой точности по сравнению с более традиционными коллиматорами с зазубренными краями.

В настоящей работе построена математическая модель протяжённого коллиматора со скруглёнными краями, решена прямая задача поиска распределения поля в рабочей зоне, а также обратная задача синтеза коллиматора со скруглёнными краями.

Так как для решения обратной задачи необходимо многократно решать прямую задачу с различными входными параметрами, отдельное внимание следует уделить построению геометрической модели коллиматора. В работе рассматривается модель протяжённого зеркала в виде цилиндра сложного сечения, состоящего из параболической дуги, скруглений специальной формы на основе эллипса и задней стенки. Сечение должно обладать непрерывной кривизной, это следует как из физических соображений, так и является необходимым условием для применения ряда численных методов, использованных в работе. Эти свойства должны сохраняться в как можно более широком диапазоне входных параметров.

Для выполнения этих условий, форма скруглений была скорректирована при помощи сглаживающей функции специального вида. Также, чтобы не допустить пересечения параболического участка с задней стенкой, последняя была дополнена

финитной функцией с нулевыми производными на границе носителя (т.н. функция «шапочка»). Благодаря этим мерам, удаётся корректно построить зеркало практически при всех возможных комбинациях геометрических параметров, имеющих физический смысл.

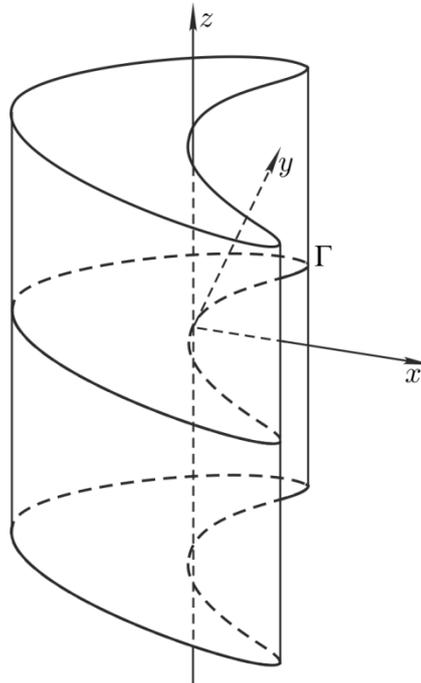


Рис. 1. Модель протяженного параболического коллиматора со скругленными краями.

Задача дифракции во внешней по отношению к зеркалу области состоит из системы уравнений Максвелла, условия излучения Зоммерфельда и граничного условия, в нашем случае это импедансное граничное условие Щукина-Леонтовича. С учётом геометрии задачи, эту систему можно свести к двум системам уравнений Гельмгольца с граничным условием третьего рода, которые сводятся к паре интегральных уравнений. Полученные интегральные уравнения решаются при помощи метода Крылова-Боголюбова.

При помощи вышеописанной модели был создан вычислительный комплекс, предназначенный для вычисления распределения рассеянного поля в рабочей зоне протяженного зеркального коллиматора, после чего была проведена верификация результатов модели.

Сами по себе скруглённые края коллиматора существенно улучшают распределение поле в рабочей зоне, но ещё более впечатляющие результаты получаются, если использовать специальным образом подобранные параметры скруглений. Чтобы определить наилучшие значения параметров скруглений, требуется поставить и решить обратную задачу синтеза.

Введя равномерную сетку в рабочей зоне коллиматора и посчитав среднее значение поля в узлах сетки, мы можем рассматривать среднее квадратичное отклонение поля от этого значения как функционал от входных параметров задачи, в частности от параметров скруглений. Тогда минимум этого функционала соответствует оптимальным значениям параметров коллиматора, имеющего наилучшее распределение поля в рабочей зоне.

Найти эти параметры можно при помощи метода Нелдера-Мида, как показывают численные эксперименты, неоднородность поля в рабочей зоне коллиматора с оптимизированными параметрами может не превышать нескольких процентов.

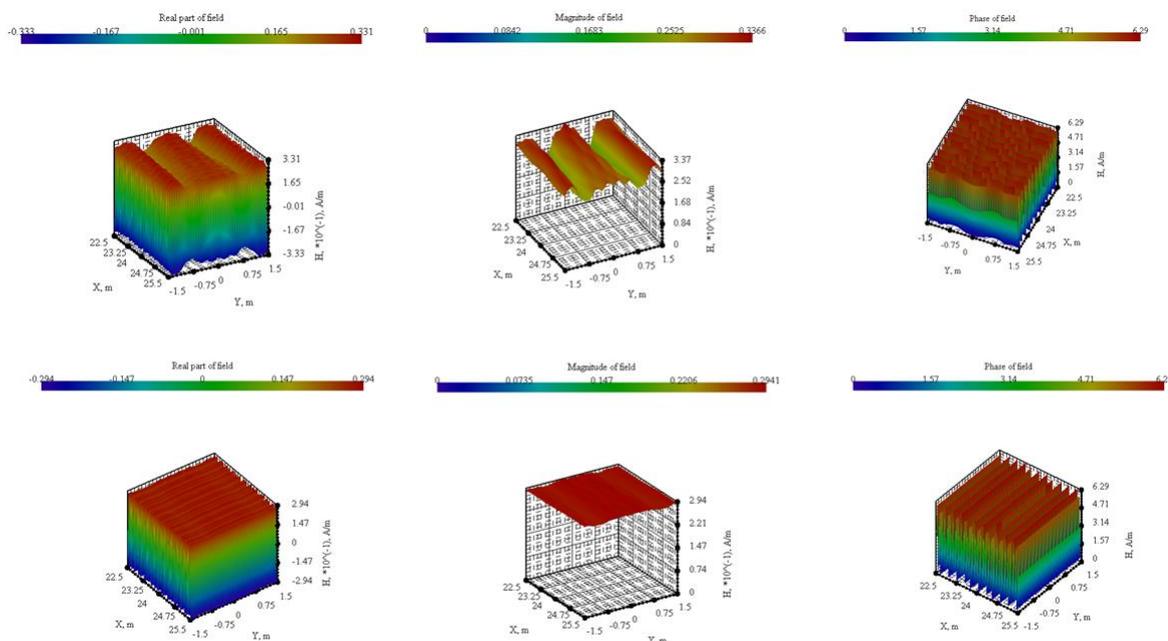


Рис. 2. Оптимизация параметров зеркала

Недостатком полученного алгоритма является то, что построенный коллиматор проявляет свои свойства только на одной частоте, в то время как реальные коллиматоры работают в определенном диапазоне частот. Чтобы оптимизировать поведение зеркала в диапазоне частот, нужно внести поправки в постановку задачи, рассмотрев, к примеру, новый функционал, равный сумме среднеквадратичных отклонений на нескольких разных частотах, входящих в исследуемый диапазон.

На каждой конкретной частоте результаты такого коллиматора будут хуже, однако в целом диапазоне частот оно будет вполне достаточным для проведения измерений с большой точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балабуха Н.П., Зубов А.С., Солосин В.С. // Компактные полигоны для измерения характеристик рассеяния объектов. М.: Наука, 2007.
2. Gupta I. J., Ericksen K. P., Burnside W. D. A method to design blended rolled edges for compact range reflectors // Antennas and Propagation, IEEE Transactions on. – 1990. – Т. 38. – №. 6. – С. 853-861.
3. Ф. Б. Хлебников, А. Н. Боголюбов, Д. А. Коняев, Н. Е. Шапкина Математическое моделирование электромагнитного поля в рабочей зоне компактного полигона // Физические основы приборостроения. — 2018. — № 2. — С. 63–69.

Улучшение оценок погрешности для экспоненциально сходящихся квадратур

В.С. Хохлачев¹, А.А. Белов^{1,2}, Н.Н. Калиткин³

¹МГУ им. М.В. Ломоносова

²РУДН

³ИПМ им. М.В. Келдыша

valentin.mycroft@yandex.ru aa.belov@physics.msu.ru kalitkin@imamod.ru

Введение. В работе [1] была доказана теорема, что для неограниченно дифференцируемой функции интеграл по периоду (или интеграл по окружности в комплексной плоскости) аппроксимируется формулой трапеций на равномерной сетке не со степенной погрешностью, а с экспоненциальной. Пусть

$$I = \int_0^{2\pi} u(x) dx, \quad I_N = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{h}{2} (u_n + u_{n+1}). \quad (1)$$

Здесь $u_n = u(x_n)$, $x_n = nh$, $h = 2\pi/N$ – равномерная сетка. Пусть L есть наименьшее расстояние от всех особых точек функции $u(x)$ на комплексной плоскости до вещественной оси. Тогда справедлива мажорантная оценка

$$\delta = |I - I_N| \leq \frac{2\pi M_1}{\exp(LN) - 1}, \quad M_1 = \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |u| \quad (2)$$

Такой характер зависимости погрешности от N означает очень быструю сходимость.

В работах [2-4] экспериментально было показано, что эти теоретические оценки справедливы лишь для функций с полюсами первого порядка. В данной работе получены следующие результаты.

Мажорирующая константа. Улучшена мажорантная оценка (2). Пусть функция постоянна: $u(x) = C$. Очевидно, для такой функции формула трапеций точна. Поэтому погрешность (2) для функции $u(x) - C$ такова же, как для функции $u(x)$. Однако константа M для функции $u(x) - C$ будет другой.

Выберем такую константу C , чтобы минимизировать величину M для новой функции. Для вещественной функции $u(x)$ этот выбор очевиден: $C = 0.5(\max u(x) + \min u(x))$. Это дает следующую оценку:

$$M_2 = \frac{1}{2} (\max u(x) - \min u(x)). \quad (3)$$

Константа M_2 оказывается меньше, чем M_1 , как минимум в 2 раза. Особенно велика разница этих констант, если величины $\max u$ и $\min u$ сопоставимы. Аналогичная оценка построена для комплекснозначных функций $u(x)$.

Апробация оценок. Были проведены расчеты тестовых интегралов, берущихся точно в элементарных функциях. Показано, что если подынтегральное выражение имеет полюсы только первого порядка, то оценка (2) является **асимптотически точной** (а не просто мажорантной).

На рис. 1 показана типичная зависимость отношения оценки (2) с константой M_2 к фактической погрешности от N . Видно, что указанное отношение слегка отличается от константы при $LN < 0.5$ и очень быстро стремится к константе при увеличении N . Это убедительно свидетельствует, что зависимость от N в оценке (2) действительно является асимптотически точной, и вдобавок применимой при очень малых значениях LN . Это показывает высокую ценность оценки (2).

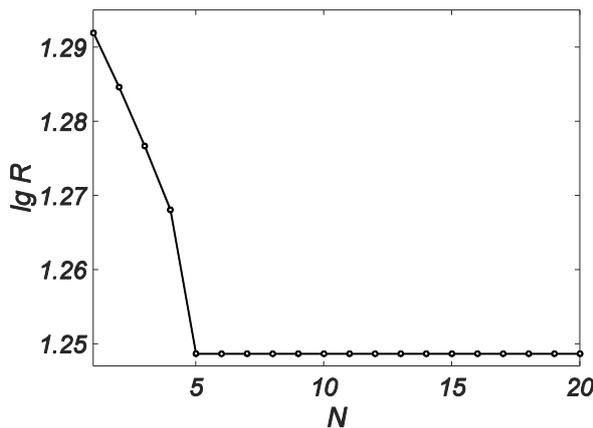


Рис. 1. Отношение R оценки (2) с константой M_2 (3) к фактической погрешности.

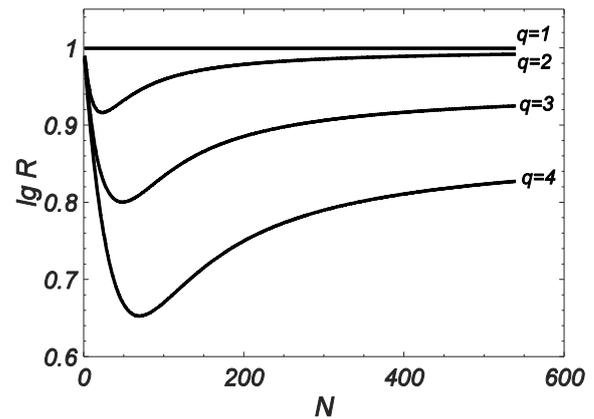


Рис. 2. Отношение R оценки (4) с константой M_2 (3) к фактической погрешности. Кратности полюсов указаны у кривых.

Полюсы целого порядка. Детальный анализ доказательства, приведенного в [1], показал, что оценка (2) применима только для подынтегральных функций, имеющих полюсы первого порядка.

В данной работе для полюсов целого порядка $q > 1$ найдена следующая эмпирическая оценка:

$$\delta = 2\pi M \frac{(2LN + \exp(-2LN/q))^{q-1}}{\exp(2LN) - 1} \quad (4)$$

Расчеты тестовых интегралов показали, что оценка (4) также является асимптотически точной. На рис. 3 представлен типичный вид отношения оценки (4) к фактической погрешности для полюсов различной кратности в зависимости от N . Видно, что при увеличении N это отношение выходит на константу.

Существенно особые точки. Найдены новые интегралы от неперiodических функций, определенных на полупрямой, для которых а) значение точно выражается в элементарных функциях, б) квадратурная формула трапеций сходится экспоненциально, в) особая точка является существенно особой и располагается в точке $x = 0$ (то есть на границе промежутка интегрирования). Интегралы такого вида не подпадают под теорему из [1]. Они возникают, например, при вычислении скоростей химических или ядерных реакций по их сечению в термодинамически равновесной среде.

Показано, что в этом случае погрешность квадратурных формул зависит от шага сетки немонотонно и не описывается существующими теориями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Trefethen L.N., Weideman J. A. C. // SIAM Review. 56:3 (2014). 385.
2. Kalitkin N.N., Kolganov S.A. // Doklady Math. 95:2 (2017). 157.
3. Kalitkin N.N., Kolganov S.A. // Math. Models Comp. Simul. 9:5 (2017). 554.
4. Kalitkin N.N., Kolganov S.A. // Math. Models Comp. Simul. 10:4 (2018). 472.

Исследование электромагнитного поля вблизи цилиндра с двуугольником в сечении

М.М. Шушарин, И.Е. Могилевский

Кафедра математики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова
nirashush1999@gmail.com

При экспериментальном исследовании дифракции электромагнитных волн на открытых полигонах могут возникать сложности, связанные с транспортировкой, погодными условиями и другими причинами, поэтому зачастую легче проводить эксперименты в закрытых помещениях, в которых различными способами имитируются условия открытого пространства, то есть в компактных полигонах. Безэховая камера представляет собой экранированное помещение с покрытой радиопоглощающим материалом внутренней поверхностью. Геометрия безэховых камер подобрана так, чтобы волны, отражённые от стен, затухали как можно сильнее, прежде чем дойти до приёмника. Однако оборудование, необходимое для проведения эксперимента, также может создавать помехи при измерениях. К примеру, подставка - пилон, на которую помещается исследуемый объект, имеет специфическую (оживальную) форму, подобранную для уменьшения отражения электромагнитных волн обратно к излучателю из соображений геометрической оптики. Она представляет собой наклонный цилиндр с двуугольником (фигура, образованная пересечением двух кругов) в сечении, слабо сужающийся сверху. При этом хорошо известно, что наличие рёбер на границе области приводит к возникновению сингулярностей у электромагнитного поля в их окрестности [1,2]. Для увеличения точности измерений, производимых в безэховой камере, требуется учесть вклад, вносимый в электромагнитное поле подставкой. Поэтому исследование поля в окрестности ребра пилона является важной и востребованной задачей.

Пилон предполагается идеально проводящим бесконечным цилиндром, направленным вдоль вертикальной оси с двуугольником в сечении, на который под произвольным углом падает плоская электромагнитная гармоническая волна произвольной поляризации. При таких условиях задача может быть сведена к двумерной.

В работе проводится теоретическое исследование электромагнитного поля в окрестности ребра пилона. При этом используется метод построения асимптотического представления решения в окрестности особой точки границы, впервые предложенный В.А.Кондратьевым [3].

Рассматриваются установившиеся колебания, тогда решение будет периодически по времени. Для математической постановки задачи электромагнитное поле представляется в виде суперпозиции падающего и дифрагированного полей. Тогда для дифрагированного поля на бесконечности можно поставить условия излучения Зоммерфельда. Полное поле можно представить, как сумму двух полей, в одном из которых перпендикулярен оси цилиндра вектор напряжённости электрического поля (поле магнитного типа), а в другом перпендикулярен оси вектор напряжённости магнитного поля (поле электрического типа). Тогда из условий идеальной проводимости на границе области можно получить условия Дирихле для вертикальной компоненты напряжённости электрического поля для поля электрического типа и условия Неймана для вертикальной компоненты напряжённости магнитного поля для поля магнитного типа. Наклонное падение плоской волны можно учесть, если искать решение, периодическое вдоль вертикальной оси. Это позволяет свести исследуемую

задачу к скалярной краевой задаче для двумерного уравнения Гельмгольца в области вне двуугольника с условиями Зоммерфельда на бесконечности для дифрагированного поля с условиями Дирихле на границе для поля электрического типа и задачу с условиями Неймана для поля магнитного типа. При такой постановке у краевой задачи существует единственное решение [4].

Для выделения особенности поля вводится нормированное функциональное пространство, впервые предложенное в работах В.А. Кондратьева [3]. Для применения этого метода сперва нужно произвести дробно-линейное преобразование координат, которое переведёт двуугольник в бесконечный сектор. Затем всё, кроме главной части уравнения переносится в правую часть и переобозначается за некоторую неизвестную функцию. С помощью условия Мейкснера можно произвести начальную оценку для решения, что позволяет оценить правую часть уравнения в соответствующей норме. Переходя в полярную систему координат и делая замену радиальной переменной, можно перевести область вне сектора в бесконечную полосу. После преобразования Фурье по новой переменной для Фурье-образа решения получается уравнение, допускающее решение в виде ряда Фурье по синусам для граничных условий Дирихле и по косинусам для условий Неймана. Из вида полученного выражения и соответствующих оценок на правую часть уравнения можно заключить, что Фурье-образ решения представляет собой мероморфную функцию, определённую в полосе на комплексной плоскости и найти расположение её полюсов. В случае условий идеальной проводимости все полюсы будут лежать на мнимой оси. Это позволяет перейти от интегрирования по действительной оси к интегрированию по прямой, расположенной выше на комплексной плоскости, а вычеты в полюсах, лежащих между прямыми лягут в основу асимптотического представления решения. Интеграл по верхней прямой можно оценить с помощью нормы введённого ранее пространства. Таким образом, получено представление электромагнитного поля в окрестности ребра двуугольника в виде суммы сингулярной части и гладкой добавки, для которой получена оценка в соответствующей норме. Главная особенность поля стремится к нулю на границе как степенная функция с показателем, пропорциональным углу двуугольника. При острых углах показатель меньше единицы, значит уже первая её производная стремится к бесконечности, а именно через первые производные, согласно уравнениям Максвелла, выражаются остальные компоненты поля.

Полученное представление может быть использовано для повышения скорости сходимости численных методов при математическом моделировании безэховой камеры. Поскольку сингулярная часть поля, благодаря полученному представлению, может быть аппроксимирована точно, проблема сводится к аппроксимации гладкой части.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Г. Свешников, И.Е. Могилевский, Избранные математические задачи теории дифракции, Физический Факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2012.

2. И.Е. Могилевский, Вариационно-разностные методы в задачах моделирования волноведущих систем, Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук, 2001.

3. В.А. Кондратьев, Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками, Труды Московского Математического Общества, т.16, 1967, с. 227-313.

4. А. Г. Свешников, А. Н. Боголюбов, В. В. Кравцов, Лекции по математической физике, Физический Факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 1993