

## **НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ**

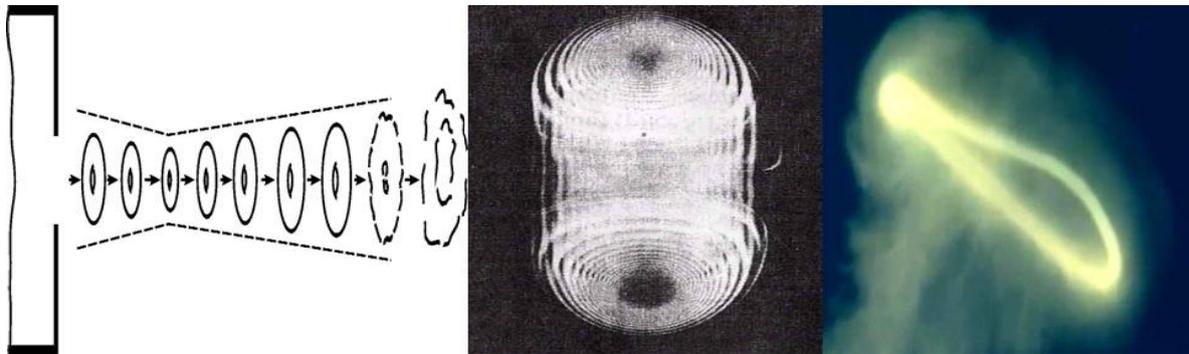
<b>Динамика и эволюция тороидальных вихрей аналоговыми моделями</b> <i>С.Т. Белякин</i> .....	2
<b>Исследование воздействия импульсных электромагнитных помех на устойчивость работы электронных автоколебательных систем</b> <i>П.С. Глазунов, Е.А. Воробьёва, В.А. Вдовин, А.И. Слепков</i> .....	4
<b>Нелинейная динамика позитронов в электромагнитных и гравитационных полях</b> <i>М.Г.Гапочка, В.И.Денисов, И.П.Денисова, А.Ф. Королев, Н.Н.Кошелев</i> .....	6
<b>Влияние периода решетки на ток, протекающий через полупроводниковую сверхрешетку</b> <i>А.О. Сельский, О.И. Москаленко, А.А. Короновский</i> .....	9
<b>Переमेжаемость вблизи границы обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора</b> <i>В.А. Ханадеев, О.И. Москаленко, А.А. Короновский</i> .....	11

## Динамика и Эволюция тороидальных вихрей аналоговыми моделями

С.Т. Белякин<sup>1</sup>

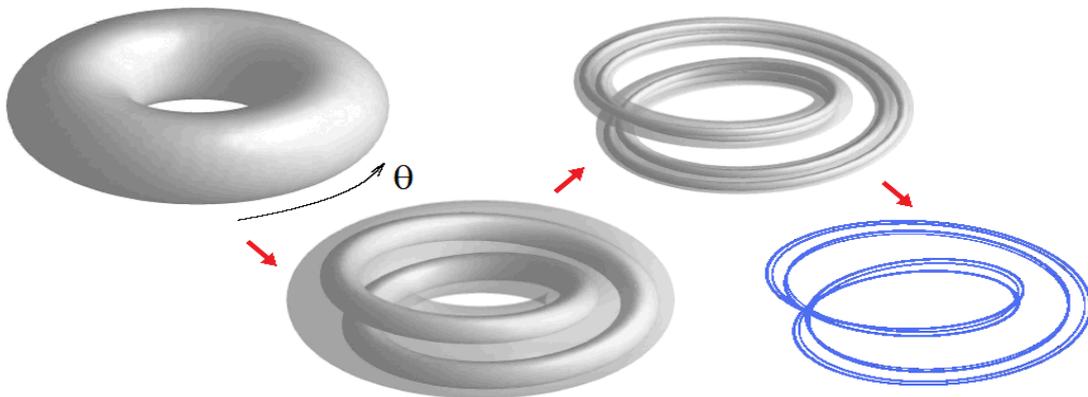
<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,  
физический факультет, кафедра общей физики  
belyakin1962@mail.ru

Для получения тороидальных вихревых, используется генератор вихревых потоков рис.1. В первой части рис.1. представлен вихревой генератор с эволюцией тороидального потока, во второй части рис.1. представлен тороидальный вихрь в устойчивом динамическом состоянии. В третьей части рис.1. представлена бифуркация тороидального вихря.



**Рис.1.** Вихревой генератор с эволюцией тороидального потока. Тороидальный вихрь в устойчивом динамическом состоянии. Бифуркация тороидального вихря.

Геометрические конструкции гиперболических аттракторов Аттрактор Смале - Уильямса [1,2] представлена в рис.2.



**Рис.2.** Эволюция странного аттрактора гиперболического типа.

Если ввести угловую координату изображающей точки  $q$ , то на последовательных итерациях она, очевидно, подчиняется отображению Бернулли  $q_{n+1} = \{2q_n\}$ . По оставшимся двум направлениям элемент фазового объема претерпевает сжатие. Поэтому подходящим кандидатом с точки зрения реализации аттрактора Смейла - Вильямса представляется система связанных неавтономных генераторов.

Как реализовать динамику, отвечающую отображению Бернулли, в физической системе [3]. Обратимся к показанной на рис.3 блок-схеме. Это неавтономная колебательная система, построенная на базе двух автогенераторов с характерными частотами  $\omega_0$  и  $2\omega_0$ . Параметр, управляющий возбуждением одного и другого генератора, медленно изменяется во времени в противофазе с периодом  $T$ , который составляет целое число периодов основной частоты:  $T = 2\pi N/\omega_0$ . Таким образом, по очереди возбуждается то один, то другой генератор. Воздействие первого генератора на второй производится через нелинейный квадратичный элемент. Порождаемая вторая гармоника служит затравкой при возбуждении второго генератора. В свою очередь, второй генератор действует на первый через нелинейный элемент, осуществляющий смещение поступающего сигнала и вспомогательного опорного сигнала на частоте  $\omega_0$ . При этом появляется составляющая на разностной частоте. Она попадает в резонанс первому генератору и служит затравкой, когда он начинает генерировать. Оба генератора как бы по очереди передают возбуждение один другому.

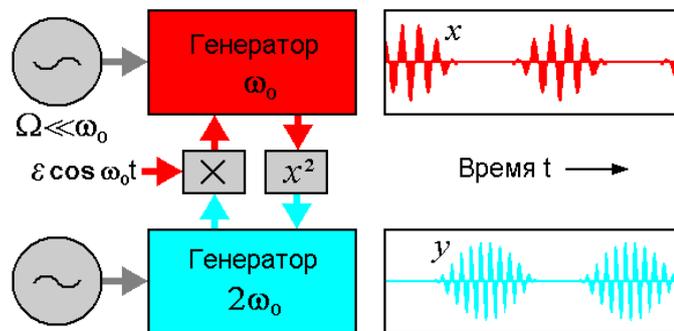


Рис.3. Неавтономная колебательная система, построенная на базе двух автогенераторов с характерными частотами  $\omega_0$  и  $2\omega_0$ .

Для наблюдения описанного механизма численно, рассмотрим систему уравнений (1), двух осцилляторов Ван - Дер - Поля с переменными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (A \cos 2\pi t / T - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x &= \varepsilon y \cos \omega_0 t, \\ \ddot{y} - (-A \cos 2\pi t / T - y^2)\dot{y} + \omega_0^2 y &= \varepsilon x^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Наличие таких физических систем открывает возможности для приложений глубоко проработанного раздела математики – гиперболической теории, а также переводит в практическую плоскость задачу сравнительного исследования гиперболического и негиперболического хаоса в теории и эксперименте. Данная система может быть использована для изучения тороидальных вихревых процессов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С.П. Кузнецов “ Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике.” УФН, 181, 2011, №2, 121-149.
2. S.P. Kuznetsov // Phys. Rev. Lett., 2005. V. 95. No 1. P. 144101.
3. S.P. Kuznetsov // Phys. Rev. E, 2006. V. 74. No 1. P. 046207.

## Исследование воздействия импульсных электромагнитных помех на устойчивость работы электронных автоколебательных систем

П.С. Глазунов<sup>1</sup>, Е.А. Воробьёва<sup>1</sup>, В.А. Вдовин<sup>2</sup>, А.И. Слепков<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Кафедра общей физики Физического факультета МГУ

<sup>2</sup>ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН

[ps.glazunov@physics.msu.ru](mailto:ps.glazunov@physics.msu.ru)

Согласно [1], механизмы воздействия электромагнитных импульсов на электронные приборы условно делятся на три группы. К первой группе относятся воздействия, связанные с тепловым нагревом (тепловые воздействия). Ко второй группе – процессы, вызванные электрическими разрядами и пробоями. К третьей группе – сбои и помехи, возникающие за счёт наведённой импульсами добавочной разности потенциалов между различными элементами схем электронных приборов. Механизмы воздействия, принадлежащие к первым двум группам, обычно приводят к поломке функциональных элементов приборов (диодов, транзисторов и т.п.). Механизмы, относящиеся к третьей группе, не связаны с необратимыми повреждениями каких-либо цифровых элементов, однако они способны приводить к временной неработоспособности приборов. Порог мощности электромагнитных импульсов, необходимый для возникновения механизмов третьей группы значительно ниже, чем для механизмов двух первых групп, поэтому в настоящей работе изучалась третья группа механизмов воздействия.

В качестве модели электронной автоколебательной системы была выбрана простейшая модель - осциллятор Ван-дер-Поля. Основной характеристикой, показывающей величину воздействия электромагнитного импульса на работу осциллятора, была выбрана вероятность сбоя бита  $P$  (под битом понимается одно колебание автоколебательной системы), следующего непосредственно после воздействия. Для расчёта этой вероятности была использована формула, приведённая в работе [2]:

$$P(z) = 0.5 \cdot (1 - \operatorname{erf}(z / \sqrt{2})), \quad z = \frac{U_{\text{bit}}}{U_{\text{int}}} \sqrt{\frac{T_{\text{bit}}}{T_{\text{int}}}} \quad (1)$$

здесь  $\operatorname{erf}$  – функция ошибок,  $U_{\text{bit}}$ ,  $T_{\text{bit}}$  – амплитуда и длительность бита,  $U_{\text{int}}$ ,  $T_{\text{int}}$  – амплитуда и длительность возмущения, вносимого импульсной помехой (подробнее см. [2]).

Для моделирования осциллятора Ван-дер-Поля использовалось классическое уравнение Ван-дер-Поля в безразмерных величинах с внешней силой  $f(t)$  [3]:

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = f(t) \quad (2)$$

Для численного решения уравнения (2) использовалась быстрая схема Верле. Рассматривался случай сильной нелинейности ( $\mu=20$ ), поскольку в таком случае меандр колебаний осциллятора Ван-дер-Поля по форме более близок к прямоугольным импульсам. При таком значении коэффициента нелинейности амплитуда колебаний осциллятора составляет  $x_0=2$  ед., а период колебаний осциллятора составляет  $T=34$  ед. Переход от реальных физических единиц к безразмерным величинам также приведён в [3].

Рассматривалось воздействие одиночных импульсных помех продолжительностью много меньшей периода автоколебаний. Был получен важный результат, а именно выделение класса помех, для которых вероятность сбоя бита определяется интегралом

от амплитуды помехи. Для данного класса помех оказался возможным вывод аналитических формул, описывающих величину фазового сдвига. Вывод основан на интегрировании уравнения (2) в приближении о том, что величина фазового сдвига много больше продолжительности импульсного воздействия. Корректность аналитического подхода подтверждается результатами численного моделирования, проведённого в нашей предыдущей работе [4]. Доказывается, что интеграл от амплитуды помехи (по сути «площадь» помехи) представляет суммарный ток, наведённый импульсной помехой в контуре генератора Ван-дер-Поля.

Достоинством работы является вывод аналитических формул, подтверждающих гипотезу о том, что вероятность сбоя бита определяется преимущественно фазовым сдвигом меандра автоколебаний. Пример подобного фазового сдвига изображен на рисунке 1. Пунктирный график соответствует невозмущенному решению уравнения Ван-дер-Поля, сплошной – решению с возмущением. Третий график соответствует профилю помехи. В данном случае помеха представляла собой прямоугольный импульс с амплитудой  $A=5$  и продолжительностью  $T=1$  (на рисунке амплитуда импульсной помехи нормирована на единицу). Фазовый сдвиг меандра при таких параметрах составляет около 4.5 единиц.

Стоит отметить, что теория плохо работает в том случае, когда импульсное воздействие происходит в момент действия положительной обратной связи автоколебательной системы. Однако, при большом коэффициенте нелинейности интервал действия работы положительной обратной связи много меньше периода колебаний осциллятора, поэтому при подсчёте средней вероятности сбоя бита данное обстоятельство несильно сказывается на результатах.

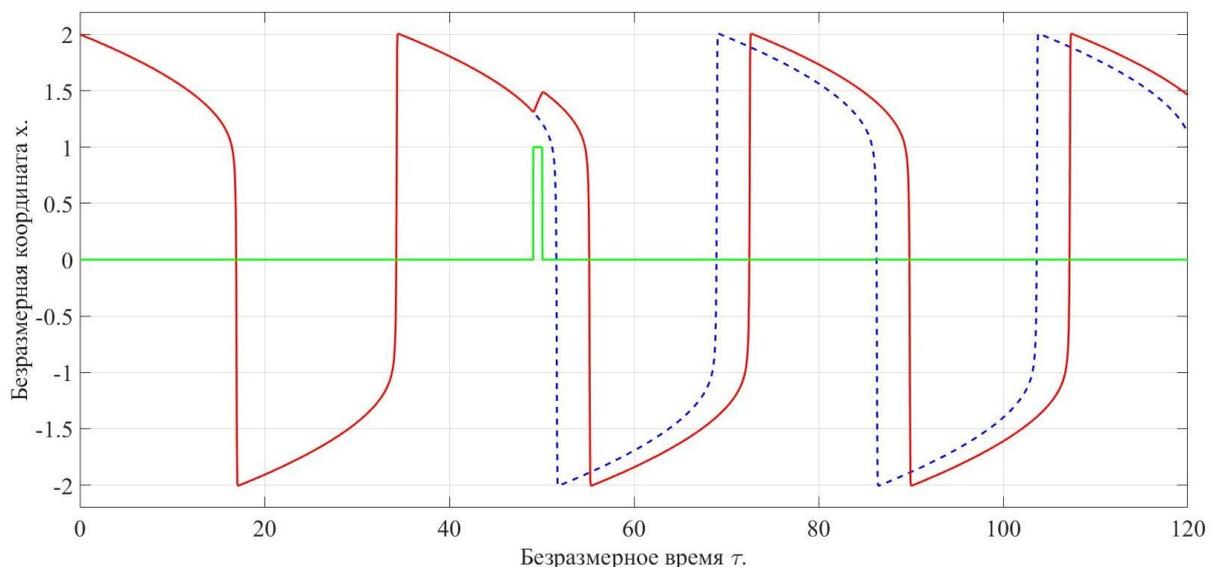


Рис. 1. Фазовый сдвиг меандра автоколебаний осциллятора Ван-дер-Поля под воздействием импульсной помехи амплитуды  $A=5$  и продолжительности  $T=1$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. В.А. Вдовин, В.В. Кулагин, В.А. Черепенин // Электромагнитные волны и электронные системы. 2003. Т.8. No 1.С. 64
2. Л.Н. Здухов и др. // Журнал радиоэлектроники. 2011. No 5.
3. А.П. Кузнецов и др.// Изв. вузов «ПНД». 2014. т. 22. No 4. С. 3
4. П.С. Глазунов и др.// Журнал радиоэлектроники. 2019. No 11.

## Нелинейная динамика позитронов в электромагнитных и гравитационных полях

М.Г.Гапочка<sup>1</sup>, В.И.Денисов<sup>1</sup>, И.П.Денисова<sup>2</sup>, А.Ф. Королев<sup>1</sup>, Н.Н.Кошелев<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

<sup>2</sup>Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)  
n.koshelev@mail.ru

Движение электрически заряженных частиц в электромагнитном и гравитационном полях описывается нелинейной системой уравнений в обыкновенных производных второго порядка. В наиболее общей четырехмерной форме эти уравнения [1] принимают вид:

$$mc \left\{ \frac{dU^n}{ds} + \Gamma_{ik}^n U^i U^k \right\} = \frac{q}{c} F^{nk} U_k, \quad (1)$$

где  $ds = \sqrt{g_{ik} dx^i dx^k}$  – интервал,  $g_{ik}$  – метрический тензор,  $U^i = dx^i/ds$  – четырехвектор скорости,  $\Gamma_{ik}^n$  – символы Кристоффеля,  $F^{nk}$  – тензор электромагнитного поля.

Уравнения (1) имеют первый интеграл:

$$g_{ik} U^i U^k = 1. \quad (2)$$

Интегрирование уравнений (1)-(2), из-за их нелинейности представляет собой серьезную математическую задачу. Эти уравнения непосредственно вытекают из общей теории относительности Эйнштейна, в которой квант гравитационного поля – гравитон является безмассовой частицей.

Однако в последнее время появились статьи [2-4], в которых уравнения Эйнштейна модифицируются так, чтобы гравитон был массивным. Во всех этих теориях предполагается, что масса гравитона  $m_g \sim 10^{-66} \text{ з}$  настолько мала, чтобы ее присутствие при современной чувствительности измерительной техники не проявлялось во всех экспериментах, выполненных в гравитационном поле Солнечной системы.

Теории гравитации с массивным гравитоном с необходимостью являются биметрическими, в которых используются два метрических тензора: псевдоевклидова пространства-времени  $\eta_{ik}$ , которое рассматривается [4] как экспериментальный факт, и псевдориманова пространства-времени  $g_{ik}$ , по геодезическим которого движется вещество.

Уравнения движения заряженных частиц в электромагнитном и гравитационном полях в этих теориях являются более сложными, чем уравнения (1)-(2) и в общем случае вводят два типа масс для каждой частицы: инертную  $m_I$  и пассивную гравитационную  $m_G$ :

$$m_G c g_{pn} \left\{ \frac{dU^n}{ds} + \Gamma_{ik}^n U^i U^k \right\} + (m_I - m_G) c \eta_{pn} \left\{ \frac{du^n}{d\sigma} + \gamma_{ik}^n u^i u^k \right\} \frac{d\sigma}{ds} = \frac{q}{c} F_{pk} U^k, \quad (3)$$

где  $u^n = dx^n/d\sigma$ ,  $d\sigma = \sqrt{\eta_{ik} dx^i dx^k}$  – интервал в псевдоевклидовом пространстве-времени,  $\Gamma_{ik}^n$  – символы Кристоффеля по метрике  $g_{ik}$ ,  $\gamma_{ik}^n$  – символы Кристоффеля по метрике  $\eta_{ik}$ .

Несложно убедиться, что при умножении уравнения (3) на  $U^p = dx^p/ds$ , или на  $u^p = dx^p/d\sigma$ , получаем, как это и должно быть, тождество  $0=0$ .

Таким образом, для проверки гипотезы о существовании не нулевой массы у гравитона, необходимо исследовать нелинейную динамику, предсказываемую

уравнениями (3), и, в первую очередь, выяснить соотношение между инертной и гравитационными массами.

Согласно принципу эквивалентности Эйнштейна [1], любое электрически незаряженное пробное тело в гравитационном поле должно двигаться по траектории, не зависящей от его структуры и состава. Для электронейтральных частиц это означает равенство гравитационной и инертной масс.

В настоящее время существуют теории гравитации [5-7], согласно уравнениям которых, гравитационная масса электрически заряженной частицы может быть не равной ее инертной массе:  $M_g^q = M_i^q + kq$ , где  $q$  – электрический заряд частицы,  $k$  – коэффициент,  $M_g^q$  – гравитационная масса частицы,  $M_i^q$  – ее инертная масса.

Из этих соотношений следует, что гравитационная масса любого электрически незаряженного тела должна совпадать с его инертной массой, так как электрически нейтральное тело состоит из одинакового числа электронов и протонов. Эксперименты Брагинского и Панова [8] с телами макроскопических размеров подтвердили этот вывод с большой точностью.

Измерения отношения гравитационной массы к ее инертной массе для электрически заряженных частиц до сих пор не проводились. Такие эксперименты, казалось бы, удобнее начинать с электрона. Однако таким измерениям мешает эффект Барнхилла-Шиффа [9]: в области вакуума, огражденной проводящей оболочкой, существует индуцированное гравитацией электрическое поле, действие которого на не релятивистски движущийся электрон полностью компенсирует действие на него силы гравитации. В результате этой компенсации не релятивистский электрон в вакуумной области движется с постоянной скоростью. Эксперименты Уитборна-Файербенка, проведенные в прошлом веке [10], подтвердили это предсказание теории.

Для того чтобы нарушить компенсацию гравитационной силы, действующей на электрон, силой Барнхилла-Шиффа, необходимо использовать слабо релятивистские электроны, в результате чего постановка соответствующего эксперимента оказывается значительно сложнее эксперимента Уитборна-Файербенка.

Кроме электрически заряженных частиц в природе существуют и соответствующие им античастицы. В настоящее время в ЦЕРНЕ, в рамках эксперимента Gravitational Behaviour of Antihydrogen at Rest, было показано, что отношение гравитационной массы электрически нейтрального атома антиводорода, состоящего из позитрона и антипротона, к инертной массе этого атома такое же, как и у обычного атома водорода. Но из этого эксперимента нельзя сделать выводов о гравитационных свойствах отдельно взятых позитронов или отдельно взятых антипротонов. Вполне может оказаться так, что в соответствии с гравитационными теориями [5-7] гравитационная масса позитрона может быть на некоторую величину  $ke_0$  больше его инертной массы, а гравитационная масса антипротона окажется на такую же величину  $ke_0$  меньше инертной массы антипротона:  $m_g = m_i + ke_0$ ,  $M_g = M_i - ke_0$ , где  $M_g$  и  $m_g$  – гравитационные массы антипротона и, соответственно, позитрона,  $M_i$  и  $m_i$  – их инертные массы,  $e_0$  – электрический заряд позитрона. Тогда гравитационная масса антиводорода будет равна его инертной массе:  $M_g + m_g = M_i + m_i$ .

Гравитационные свойства элементарных частиц из-за чрезвычайной малости гравитационного взаимодействия в настоящее время экспериментально изучены очень слабо. Особенно это касается античастиц, гравитационные свойства которых до сих пор не проверялись на эксперименте.

Поэтому возникает необходимость проанализировать возможности постановки эксперимента по измерению отношения гравитационной массы к инертной массе для позитрона, который является античастицей для электрона. Следует сразу же отметить, что серьезным недостатком этого эксперимента, также как любого эксперимента с

античастицами, является аннигиляция позитронов при их столкновении с остатками газа в вакуумной области экспериментальной установки. Однако этот недостаток в значительной степени может быть уменьшен созданием более глубокого вакуума в рабочей области экспериментальной установки. Во всяком случае, этот недостаток не мешает проводить эксперименты с позитронами на ускорителях и в экспериментальной физике элементарных частиц.

Рассмотрим схематически две возможные постановки экспериментов по измерению отношения гравитационной массы позитрона к его инертной массе, использующих не релятивистские и слаборелятивистские позитроны. В обоих случаях в качестве источника позитронов необходимо использовать  $\beta^+$  активные элементы, обладающие достаточно большим периодом полураспада и не очень большой энергией позитрона. Наиболее подходящим нестабильным элементом для этих целей является изотоп церия  $^{139}\text{Ce}$ . У него период полураспада составляет 138 дней, с энергией вылетающих позитронов 166 кэВ. При такой энергии позитрон считается слаборелятивистским и его можно не замедлять при втором методе экспериментов. Другим нестабильным элементом, позитроны которого после замедления в постоянном электрическом поле можно использовать в описываемых экспериментах, является изотоп натрия  $^{22}\text{Na}$ . У него период полураспада значительно больше, чем у  $^{139}\text{Ce}$  и составляет 2.6 лет. Однако и энергия позитронов, вылетающих при  $\beta^+$  распаде  $^{22}\text{Na}$ , равна 546 кэВ, что требует при проведении эксперимента предварительного их замедления.

Расчеты показывают, что при проведении экспериментов с не релятивистскими позитронами они в соответствии с уравнениями (3) должны двигаться с ускорением  $a_z$ , направленным к Земле и равным:

$$a_z = -\frac{m_G}{m_I} \left[ 1 + \frac{m_G^e}{m_I} \right] g$$

где  $m_G$  и  $m_I$  – гравитационная и, соответственно, инертная массы позитрона.  $m_G^e$  – гравитационная масса электрона,  $g$  – ускорение свободного падения,

Если использовать схему слаборелятивистского эксперимента, то из расчетов следует, что движение позитронов в вертикальном направлении будет происходить с ускорением  $a_z$ , направленным к Земле и равным:

$$a_z = -\frac{m_G}{m_I} \left[ 1 + \frac{m_G^e}{m_I} \sqrt{1 - \beta^2} \right] g,$$

где  $\beta$  – отношение скорости позитрона к скорости света.

В обоих рассмотренных случаях предлагаемый гравитационный эксперимент является радиофизическим по своей постановке.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. Эйнштейн “Собрание научных трудов” М.: Наука. 1965.
2. P.G. Freund, A. Maheshwari and E. Schonberg. // *Astrophys. J.* 1969. V. 157. P. 857.
3. M. Visser. // *General Relativity and Gravitation.* 1998. V. 30. P. 1717.
4. S.V. Babak and L.P. Grishchuk. // *Phys. Rev D.* 1999. V. 61. P. 024038.
5. H. Dittus, C. Lammerzahn and H. Selig. // *General Relativity and Gravitation.* 2004. V. 36. P. 571.
6. F. Rohrlich. // *Foundations of Physics.* 2000. V. 30. P. 621.
7. M. Goto, P.L. Natti and E.R. Takano Natti. // *Class. Quantum Grav.* 2010. V. 27. P. 025005.
8. V.B. Braginsky and V.I. Panov. // *Sov. Phys.-JETP.* 1971. V. 34. P. 464.
9. L.I. Schiff and M.V. Barnhill. // *Phys. Rev.* 1966. V. 151 P. 1067.
10. F.C. Witteborn and W.M. Fairbank. // *Phys. Rev. Lett.* 1967. V. 19. P. 1049.

## Влияние периода решетки на ток, протекающий через полупроводниковую сверхрешетку

А.О. Сельский, О.И. Москаленко, А.А. Короновский

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени  
Н.Г. Чернышевского

selskii@gmail.com

Полупроводниковые сверхрешетки — сложные наноструктуры, состоящие из нескольких чередующихся тонких ( $\sim 10$  нм) слоев различных полупроводниковых материалов, которые возможно использовать для генерации и управления высокочастотными колебаниями [1, 2]. В последнее время большой интерес представляет исследование подобных наноструктур с позиций нелинейной динамики [3, 4]. Ранее было показано, что большое влияние на электронную динамику в сверхрешетках оказывают наклонное магнитное поле [3, 4], температура [5], межминизонное туннелирование [6] и изменение вдоль решетки концентрации легирующей примеси [7]. В настоящей работе рассмотрено, как динамика электронов в сверхрешетке, определяющая характеристики тока, изменяется при изменении периода решетки.

Ток, протекающий через полупроводниковую решетку, рассчитывается из решения следующей системы уравнений [2]:

$$\begin{aligned} e\Delta x \frac{dn_m}{dt} &= J_{m-1} - J_m, \quad m = 1 \dots N, \\ F_{m+1} &= \frac{e\Delta x}{\epsilon_0 \epsilon_r} (n_m - n_D) + F_m, \quad m = 1 \dots N, \\ J_m &= en_m v_d(\overline{F_m}), \end{aligned} \quad (1)$$

В данном случае период решетки структуры полупроводниковой сверхрешетки на прямую не входит в уравнения. Он вводится через зависимость дрейфовой скорости от напряженности электрического поля, которая в отсутствие магнитного поля находится по формуле Эсаки-Тсу [1]:

$$v_d = \frac{d\Delta}{2\hbar} \frac{\tau\omega_B}{(1 + \tau^2\omega_B^2)}, \quad \omega_B = eFd/\hbar. \quad (2)$$

Таким образом, для изменения периода решетки необходимо изменять зависимость дрейфовой скорости от напряженности электрического поля, используемую при моделировании. На рисунке 1 показаны реализации тока при различных напряжениях для двух значений решетки: красным  $d = 8.23$  нм, зеленым  $d = 8.25$  нм. Таким образом, видно что даже небольшое изменение периода структуры существенно меняет вид токовых осцилляций. Меняются не только величина тока, но и вид колебаний. Что важно для использования нелинейных эффектов, которые часто присутствуют в сверхрешетках при добавлении наклонного магнитного поля. Впрочем, при большом изменении периода решетки необходимо учесть изменение транспорта через структуру и возможный рост числа событий межминизонного туннелирования, как в [6]. Потому на первом этапе вводились только малые изменения периода решетки. Также интерес представляет изучение возможности локального изменения периода (в

рамках 1-2 слоев решетки), как в [7]. Однако, такая работа подразумевает существенное изменение численной схемы.

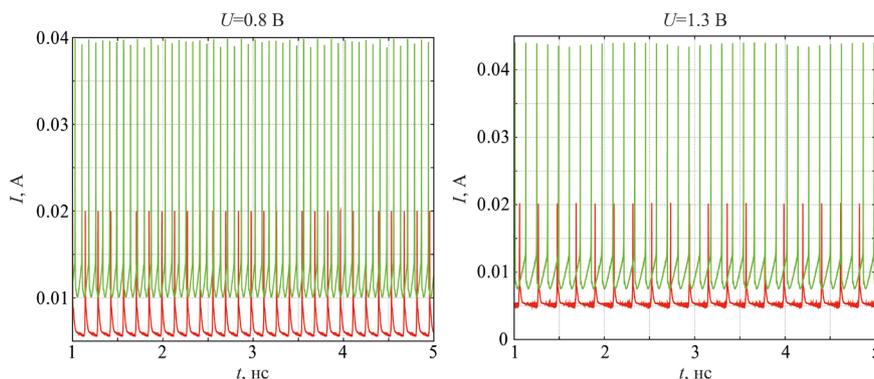


Рис. 1. Реализации тока, протекающего через полупроводниковую сверхрешетку, при разных периодах решетки для разных значениях напряжения, приложенного к структуре.

На рисунке 2 показаны зависимости от напряжения амплитуды и частоты колебаний тока для двух значений решетки: красным  $d = 8.23$  нм, зеленым  $d = 8.25$  нм. Можно видеть, что небольшое увеличение периода решетки существенно увеличивает амплитуду и частоту колебаний, сдвигая при этом пороговое значение напряжения, при котором начинается генерация колебаний. Такой результат крайне интересен для приложений, связанных с использованием сверхрешеток в качестве высокочастотных генераторов.

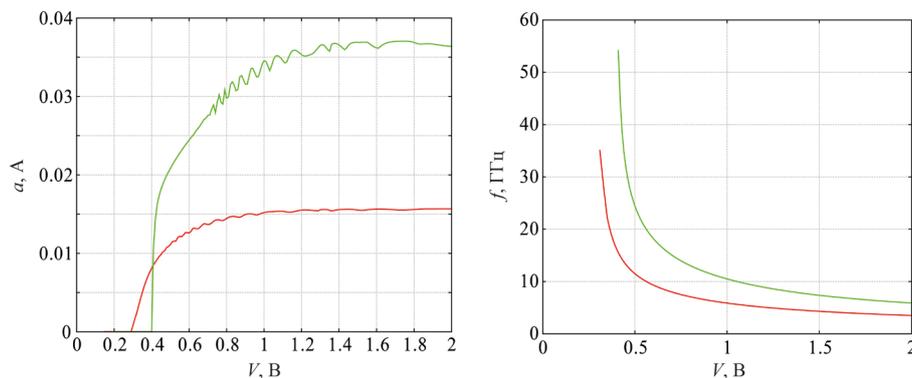


Рис. 2. Зависимости от напряжения, приложенного к структуре, амплитуды и частоты колебаний тока, протекающего через полупроводниковую сверхрешетку, при разных периодах решетки.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Esaki L., Tsu R. // IBM J. Res. Develop. 1970. V. 14. P. 61.
2. Wacker A. // Phys. Rep. 2002. V. 357. P. 1.
3. Greenaway M. T., Balanov A. G., Schöll E. et. al. // Phys. Rev B. 2009. V. 80. P. 205318.
4. Alexeeva N., Greenaway M. T., Balanov A. G. et. al. // Phys. Rev. Lett. 2012. V. 109. P. 024102.
5. Selskii A. O., Koronovskii A. A., Hramov A. E. et. al. // Phys. Rev B. 2011. V. 84. P. 235311.
6. Сельский А. О., Короновский А. А., Москаленко О. И. и др. // ЖТФ. 2015. Т. 85. № 4. С. 62.
7. Сельский А. О., Короновский А. А., Москаленко О. И. и др. // Письма в ЖТФ. 2017. Т. 43. № 20. С. 3.

## Переमेжаемость вблизи границы обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора

В.А. Ханадеев, О.И. Москаленко, А.А. Короновский

ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

[v.a.hanadeev@gmail.com](mailto:v.a.hanadeev@gmail.com)

Явление перемежаемости, возникающее при переходе от одного типа поведения к другому, хорошо известно в настоящее время [1]. Говоря о перемежаемости, подразумевают чередование регулярного (периодического или стационарного) и нерегулярного (хаотического) поведения или чередование различных хаотических режимов. Перемежаемость присутствует в разных динамических системах, в том числе физических, медицинских и биологических. Она наблюдается также вблизи границ синхронных режимов, в частности, на границе возникновения режима обобщенной синхронизации [2]. Для определения характеристик перемежающегося поведения в данном случае обычно используют метод вспомогательной системы [3]. В настоящее время перемежающееся поведение хорошо исследовано только в системах с достаточно простой топологией аттрактора, как, например, у систем Ресслера. В частности, известно, что на границе обобщенной синхронизации в данном случае наблюдается перемежаемость типа «on-off» [4]. Однако, существует также класс систем с так называемой сложной (двулистной) структурой аттрактора [5], переход к обобщенной синхронизации в которых может характеризоваться совсем другими механизмами, а следовательно, и совершенно другими характеристиками перемежаемости.

В настоящей работе на примере двух однонаправленно связанных систем Лоренца [6] и генераторов Чуа [7] проводится анализ характеристик перемежающегося поведения, наблюдаемого на границе обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора. Однонаправленно связанные системы Лоренца описываются следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sigma(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_1 &= r_1 x_1 - y_1 - x_1 z_1, \\ \dot{z}_1 &= -b z_1 + x_1 y_1, \\ \dot{x}_2 &= \sigma(y_2 - x_2) + \varepsilon(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_2 &= r_2 x_2 - y_2 - x_2 z_2, \\ \dot{z}_2 &= -b z_2 + x_2 y_2,\end{aligned}\tag{1}$$

где  $\mathbf{x}_{1,2} = (x_{1,2}, y_{1,2}, z_{1,2})$  – векторы состояний взаимодействующих ведущей и ведомой систем, соответственно,  $\sigma = 10$ ,  $b = 2$ ,  $r_1 = 40$  и  $r_2 = 35$  – управляющие параметры,  $\varepsilon$  – параметр связи.

Уравнения для однонаправленно связанных генераторов Чуа записываются в виде:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \alpha_1(y_1 - x_1^3 - c x_1), \\ \dot{y}_1 &= -z_1 - (y_1 - x_1), \\ \dot{z}_1 &= \beta y_1, \\ \dot{x}_2 &= \alpha_2(y_2 - x_2^3 - c x_2), \\ \dot{y}_2 &= -z_2 - (y_2 - x_2) + \varepsilon(y_1 - y_2), \\ \dot{z}_2 &= \beta y_2,\end{aligned}\tag{2}$$

где  $\mathbf{x}_{1,2} = (x_{1,2}, y_{1,2}, z_{1,2})$  – векторы состояний взаимодействующих однонаправленно связанных генераторов,  $\alpha_1 = 10$ ,  $\alpha_2 = 10.1$ ,  $\beta = 16$  и  $c = -0.143$  – управляющие параметры,  $\varepsilon$  – параметр связи.

При выбранных значениях управляющих параметров в обеих системах наблюдаются хаотические аттракторы со сходной двулистной структурой, что позволяет применять одинаковые методы и подходы для анализа поведения в таких системах.

Установлено, что в обоих случаях распределения длительностей ламинарных фаз и зависимости средних длительностей ламинарных фаз от параметра связи подчиняются экспоненциальным законам, что не характерно для перемежаемости типа «on-off». Исследованы механизмы возникновения перемежаемости в данном случае. Обнаруженный тип поведения назван перемежаемостью перескоков.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – докторов наук (проект № МД-21.2020.2).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Berge P., Pomeau Y., Vidal C. // *Order within chaos*. New York: John Wiley and Sons; 1984.
2. Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S. and Abarbanel H.D.I. *Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems* // *Phys. Rev. E*. 1995. V.51. P. 980 – 994.
3. Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M. *Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach* // *Phys. Rev. E*. 1996. V. 53. № 5 P. 4528 –4535.
4. Hramov A.E., Koronovskii A.A. *Intermittent generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic oscillators* // *Europhysics Letters*. 2005. V. 70, N. 2. P. 169-175.
5. Кузнецов С.П. // *Динамический хаос* // М.: Физматлит. 2006. 356 с.
6. Zheng Z., Wang X., Cross M.C. // *Transitions from partial to complete generalized synchronizations in bidirectionally coupled chaotic oscillators* // *Phys. Rev. E*. 2002. V. 65, N. 5. P. 056211.
7. Huang A., Pivka L., Wu C. W. // *Int. J. Bifurcation and Chaos*, V. 6, 1996. P. 2175–2222,