

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
В РАДИОФИЗИКЕ И ОПТИКЕ**

<b>Оптимизация процедуры решения уравнений движения дискретной модели Власова-Дарвина</b> <i>С.С. Анненков, Л.В. Бородачев.....</i>	3
<b>Математическое моделирование волноведущих систем на основе метаматериалов</b> <i>А.Н. Боголюбов, Н.А. Боголюбов, Ю.В. Мухартова, Д.П. Мартынов.....</i>	5
<b>Ненадёжность стандартных алгоритмов автоматического выбора шага для ОДУ на примере задачи химической кинетики</b> <i>П.Е. Булатов, А.А. Белов, Н.Н. Калиткин.....</i>	7
<b>Использование графических ускорителей при моделировании нелинейных ультразвуковых пучков</b> <i>Е.О. Коннова, В.А. Хохлова, П.В. Юлдашев.....</i>	10
<b>Математическая модель конической безэховой камеры</b> <i>Т.А. Кузьмич, Н.П. Балабуха, Н.Е. Шапкина.....</i>	14
<b>Метод пространственных дифференциалов в детектировании и описании одномодовых волновых структур</b> <i>А.В. Бланк, А.А. Насонов, Н.А. Сухарева.....</i>	17
<b>О возможности использования цилиндрической струи жидкости в качестве антенного элемента</b> <i>А.А. Очиров, Т.К. Артёмова, С.В. Ходырев.....</i>	22
<b>Исследование энергетического спектра нанокластеров Si и BrSi для построения твердотельного одноатомного транзистора</b> <i>А.А. Паршинцев, В.В. Шорохов.....</i>	24
<b>Одноэлектронный молекулярный транзистор на основе семейства молекул с выделенными одноатомными зарядовыми центрами</b> <i>А.А. Паршинцев, В.В. Шорохов, Е.С. Солдатов.....</i>	25
<b>Математическое моделирование дифракции на телах с кусочно-гладкой границей</b> <i>А.Н. Боголюбов, И.Е. Могилевский, В.В. Ровенко, М.И. Светкин.....</i>	26
<b>Паттерный анализ характеристик аппроксимантов фракталоподобных многослойных систем с метаслоями</b> <i>Ю.В. Рыжикова, Ю.В. Мухартова, С.Б. Рыжиков.....</i>	29
<b>Построение эффективных алгоритмов расчета прямоугольных волноводов с импедансными стенками</b> <i>А.Н. Боголюбов, А.И. Ерохин, М.И. Светкин.....</i>	32

<b>Статистические характеристики квантовых поляризационных состояний, формируемых в РДС-кристаллах: математическое моделирование</b>	
<i>А.В. Белинский, Р. Сингх</i> .....	36
<b>Аподизационные задачи выделения скрытых объектов</b>	
<i>Е.Н. Терентьев, И.И. Фаршакова, И.Н. Приходько</i> .....	41
<b>Задачи анализа объектов в изображениях</b>	
<i>Е.Н. Терентьев, А.Д. Дьяконова, И.Д. Кузнецов</i> .....	45
<b>О точной локализация объектов и вихрей в изображениях</b>	
<i>Е.Н. Терентьев, И.Н. Приходько, И.И. Фаршакова</i> .....	49
<b>Отбор реакций для задач управляемого термоядерного синтеза</b>	
<i>О.И. Топор, И.А. Федоров, А.А. Белов, Н.Н. Калиткин</i> .....	53
<b>Обобщение метода Ричардсона для итерационных процессов высоких порядков</b>	
<i>С.М. Трушин, В.С. Хохлачев, А.А. Белов, Н.Н. Калиткин</i> .....	57

## Оптимизация процедуры решения уравнений движения дискретной модели Власова-Дарвина

С.С. Анненков, Л.В. Бородачев  
Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова  
[borodach2000@mail.ru](mailto:borodach2000@mail.ru)

Ретроспектива работ, посвященных численным исследованиям по методу макрочастиц в области низкочастотных явлений разреженной плазмы, позволяет говорить об устойчивом интересе к использованию в полевой части самосогласованной плазменной модели дарвинского (или магнитоиндукционного) приближения [1]. Оно подразумевает активное использование разложения Гельмгольца для векторных величин наряду с пренебрежением поперечным током смещения в полевом формализме Максвелла. Последнее позволяет рассматривать плазму как систему с мгновенным дальним действием, что исключает наличие в ней свободных электромагнитных волн. Очевидным следствием этого в контексте конечно-разностной аппроксимации самосогласованной аналитической модели является снятие по существу проблемы устойчивости (а вместе с ней и ограничений на временной шаг, обусловленных критерием Куранта [2]) явных схем численного решения полевых дарвинских уравнений.

Таким образом теперь (в отличии полного электромагнитного представления) величина временного шага эволюции дискретной самосогласованной (дарвинской) системы, во многом определяющая экономичность численного алгоритма, обусловлена именно процедурой разностного интегрирования уравнений движения частиц, выбор которой обусловлен как физическими соображениями, так и условиями ее устойчивости.

В этой связи представляет интерес использование не одной, а нескольких динамических схем в рамках одного плазменного кода, позволяющее существенно минимизировать численные затраты. Это положение особенно актуально в продолжительных по времени компьютерных экспериментах, свойственных указанной выше области математического моделирования плазмы.

Предлагаемая методика оптимизации процедуры численного решения уравнений движения заключается в рациональном динамическом сопряжении в счете явной (экономичной, но условно устойчивой) и неявной (безусловно устойчивой, но менее экономичной) схем, обусловленном величиной временного шага  $\tau$ , физически адекватного конкретной стадии исследуемого процесса.

Для апробации указанной методики оптимизации был выбран программный код, реализующий дискретную модель Власова-Дарвина в гамильтоновом представлении с геометрией фазового пространства  $(x, v_x, v_y, v_z)$  и периодическими граничными условиями [3]. В качестве динамических схем использовались: явная схема 2-ого порядка «Leap-frog» [2] (с условием устойчивости  $\tau\omega_{pe} < 2$ ) и неявная безусловно устойчивая редуцированная схема 2-ого порядка точности [4].

Особенность схемы «Leap-frog» заключается в центрировании по времени за счет нахождения координат на целых слоях по времени, а скоростей - на полуцелых; неявная же редуцированная схема подразумевает нахождение фазовых координат на целых слоях. Это приводит к необходимости “сшивания” скоростей при переходе с одной схемы на другую, что в терминах послойного перехода  $t^0 \rightarrow t^1 = t^0 + \tau$  выглядит следующим образом:

$$v^{1/2} = (v^0 + v^1) / 2, \quad v^0 = (v^{-1/2} + v^{1/2}) / 2.$$

Основная цель оптимизации - детальное временное разрешение процесса на “активных” стадиях и крупные шаги интегрирования в остальное время. Общий подход состоит в мониторинге резкого характера изменений величины базового параметра (параметров) моделируемого процесса как критерий перехода на другую, более экономичную и физически адекватную схему. При этом вопрос о выборе базового параметра решается в каждой конкретной постановке компьютерного эксперимента отдельно.

В качестве модельной задачи была выбрана электромагнитная неустойчивость по Вайбелю, для численного исследования которой ранее успешно применялись магнитоиндукционные коды [5]. Вайбелевскую неустойчивость вызывает анизотропия функции распределения частиц по скоростям. Возникающие при этом токовые слои сфазированы таким образом, чтобы усилить возникшее вначале распределение магнитного поля, способствуя росту возмущений, имеющих линейную и нелинейную стадии с последующим этапом стагнации.

Таким образом ключевым параметром для критерия выбора динамической схемы при моделировании этого процесса является средняя плотность энергии магнитного поля. Соответствующий критерий можно задать следующим образом:

$$|w_B(t+\tau) - w_B(t)| < \tau \delta w - \text{неявная редуцированная схема}$$

$$|w_B(t+\tau) - w_B(t)| > \tau \delta w - \text{явная схема «Leap-frog»}$$

Качественно он выделяет условно линейные и нелинейные участки временного профиля плотности энергии  $w_B(t)$ . В практической реализации применялось  $\delta w = \text{const}$ , но для более тонкой настройки можно использовать  $\delta w = \delta w(t)$ .

Результатом использования данной методики оптимизации счета явилось сокращение времени симуляции (в сравнении со “сплошным” проходом по явной схеме с малым шагом) примерно на 15%.

Стоит отметить, что предложенная методика уже в настоящем виде применима к широкому спектру задач моделирования низкочастотной плазмифики. Дальнейшее ее совершенствование заключается в оптимизации выбора физически адекватного временного шага, учитывающей вычислительную “стоимость” применяемой в данный момент счета динамической схемы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. C.G. Darwin // Phil. Magazine. 1920, V. 39, P. 537.
2. R.W. Hockney, J.W. Eastwood “Computer Simulation Using Particles” N.-Y.: McGraw-Hill, 1981.
3. Л.В. Бородачев, А. А. Беляев // УЗФФ, 2017, № 4, С. 1740702-1.
4. Л.В. Бородачев // ЖВМиМФ. 1991, Т. 31, № 6, С. 934.
5. L.V. Borodachev, D.O. Kolomiets // J. Plasma Phys., 2011, V. 77, P. 277.

## Математическое моделирование волноведущих систем на основе метаматериалов

А.Н. Боголюбов, Н.А. Боголюбов, Ю.В. Мухартова, Д.П. Мартынов

*МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет*

[bogan7@yandex.ru](mailto:bogan7@yandex.ru) [russell67@yandex.ru](mailto:russell67@yandex.ru) [muharova@yandex.ru](mailto:muharova@yandex.ru) [martynovphelps@mail.ru](mailto:martynovphelps@mail.ru)

Метаматериалы представляют собой периодические системы резонансных элементов, взаимодействующих с электромагнитными волнами [1]. Размеры элементов и расстояния между ними в МГц диапазоне намного меньше длины волны электромагнитного излучения. Свойства метаматериала зависят не только от отдельных резонансных элементов, но и от взаимодействия между ними [1-3]. Интерес к разработке и исследованию метаматериалов увеличивается с каждым годом. Для моделирования процессов распространения электромагнитных волн в метаматериалах удобно использовать их эффективные диэлектрическую и магнитную проницаемости.

Данная работа посвящена исследованию и реализации процесса усреднения электромагнитного поля для произвольного немагнитного периодического метаматериала с диэлектрическими вставками с целью вычисления его эффективных параметров. Реализуемый алгоритм основан на методике, предложенной в работах [4-5], посвященных разработке систематического и самосогласованного подхода к процедуре усреднения для произвольного периодического метаматериала. Достоинством данного подхода является то, что при его реализации не используется задача на собственные значения метаматериала, но в то же время он может полностью характеризовать эффекты частотной дисперсии, магнитоэлектрическую связь и пространственную дисперсию даже в области запрещенных частот или при наличии потерь в материале.

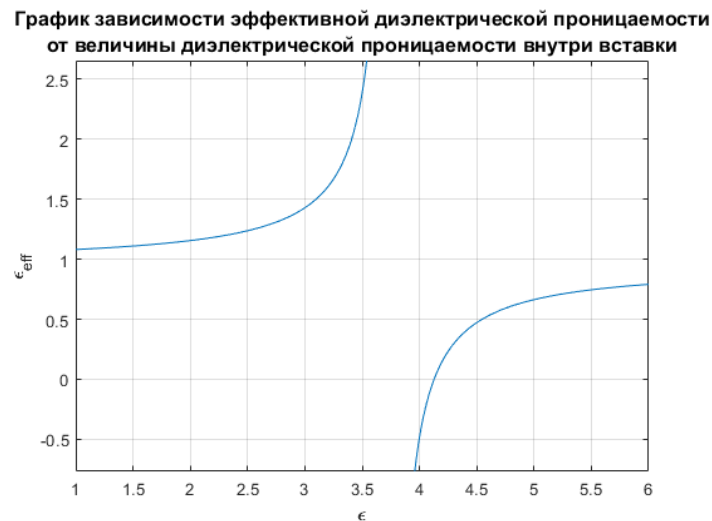
Одной из весьма сложных проблем при использовании процедуры усреднения является учет эффекта пространственной дисперсии, которого большинство существующих на данный момент процедур усреднения не предсказывают и не учитывают, в то время как многие практически значимые метаматериалы характеризуются сильной пространственной дисперсией даже при низких частотах [6-7]. Еще одной важной проблемой является учет бианизотропии в метаматериалах. Известно, что если включения в метаматериале не обладают достаточной симметрией, то возникает магнито-электрическая связь (известная также как гиротропия или оптическая активность) и в настоящее время нет удовлетворительной теории, позволяющей систематически рассчитывать магнитоэлектрические перекрестные слагаемые.

Основная идея предлагаемого в [4] подхода – возбудить периодический материал подходящим распределением источников. При этом задача усреднения эквивалентна интегро-дифференциальной системе, которая с помощью диадной функции Грина сводится к интегральному уравнению. Полученное интегральное уравнение в свою очередь может быть решено численно, в результате чего можно рассчитать значения компонент диады эффективной диэлектрической проницаемости при различных частотах и направлениях волнового вектора.

Был построен эффективный алгоритм вычисления компонент диадной функции Грина, используемой в интегральном уравнении. Для этого вначале была построена удовлетворяющая условиям Флоке решетчатая функция Грина, с помощью которой выражается диадная функция Грина. Для численного решения интегрального уравнения разработан сеточный метод с использованием двух сдвинутых друг относительно друга сеток. Метод протестирован для интегрального уравнения, ядром которого является

решеточная функция Грина. Была поставлена и решена тестовая задача, решение которой привело к согласующимся с аналитическим решением результатам.

Разработанный алгоритм был применен для расчета эффективной диэлектрической проницаемости периодического немагнитного метаматериала с шаровыми диэлектрическими вставками при различных частотах, а также различных абсолютных значениях и направлениях волнового вектора. Исследование эффективной диэлектрической проницаемости такого метаматериала при различных соотношениях диэлектрической проницаемости вставок и основной среды показало наличие зонной структуры. Также проводилось исследование свойств метаматериала при изменении радиуса шаров-вставок. При увеличении радиуса вставок был обнаружен своеобразный “фазовый переход”, характеризующийся скачком эффективной диэлектрической проницаемости, когда внешняя среда и среда-вставка по сути меняются ролями.



Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (проект 19-01-00593).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. L. Solymar, E. Shamonina. “Waves in Metamaterials”. Oxford University press. 2009.
2. E. Shamonina, V.A. Kalinin, K. H. Ringhofer, and L. Solymar// J. Appl. Phys. 2002. 92. P. 6252.
3. J.D. Baena, L. Jelinek, R. Marqués, M. Silveirinha // Phys. Rev. A 2008. No78. P. 013842.
4. M. G. Silveirinha // Phys. Rev. B. 2007. No75. P. 115104.
5. M.G. Silveirinha and C.A. Fernandes // IEEE Trans. on Antennas and Propagation. 2005. Vol. 53. No1. PP. 347-355.
6. E. Tatartschuk, N. Gneiding, F. Hesmer, A. Radkovskaya, E. Shamonina // Journal of Applied Physics. 2012. 111. P. 094904.
7. E. Tatartschuk, A. Radkovskaya, E. Shamonina, L. Solymar // Physical Review B. 2010. 81. P. 115110.

## Ненадёжность стандартных алгоритмов автоматического выбора шага для ОДУ на примере задачи химической кинетики

П.Е. Булатов<sup>1</sup>, А.А. Белов<sup>1</sup>, Н.Н. Калиткин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>МГУ им. М.В. Ломоносова

<sup>2</sup>ИИМ им. М.В. Келдыша РАН

[bulatov.pawel1996@yandex.ru](mailto:bulatov.pawel1996@yandex.ru)

**Проблема.** Многие прикладные задачи сводятся к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \mathbf{F}(\mathbf{u}, t) \\ \mathbf{u}(t_0) &= \mathbf{u}_0 \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{u}$  – вектор неизвестных функций,  $\mathbf{F}$  – вектор правых частей. Для решения задач Коши существуют различные численные методы. Из них наименьшей трудоёмкостью обладают явные схемы, например, схемы ERK.

Задача (1) называется жёсткой, если в ней характерные времена процессов имеют большую разномасштабность. Жёсткие задачи Коши сложны для численного решения. Приходится выбирать избыточно малый постоянный шаг по независимой переменной, поскольку для получения правильного решения требуется, чтобы величина шага была меньше характерного времени самого быстрого процесса в системе. Общее число шагов будет очень большим, что сделает решение такой задачи слишком трудоёмким. Примером жёсткой задачи Коши является задача химической кинетики, рассмотренная в [1] и в [2].

Для решения жёстких задач Коши широко применяются стандартные алгоритмы автоматического выбора шага. Наиболее популярными являются пакеты Гира и Дормана-Принса [3]. Метод Гира основан на локальном сгущении сеток, а метод Дормана-Принса использует вложенные схемы. Эти методы хорошо зарекомендовали себя, и на мягких задачах либо задачах невысокой жесткости дают хорошую точность уже при малом числе шагов. Однако, на более сложных жестких задачах они могут давать сбой. Например, известны случаи (см. [3]), когда стандартные пакеты измельчают шаг там, где это не нужно. Кроме того, они не дают гарантированной оценки погрешности, то есть, фактическая погрешность может значительно отличаться от заданной.

Работоспособность метода обычно проверяется на задаче с известным точным решением путём сравнения решения, полученного по численному методу, с точным решением. В данной работе в качестве теста взята прикладная задача кинетики химических реакций, которая считается особенно сложной. Точное решение этой задачи неизвестно. Поэтому проверить работу стандартных пакетов можно только по другому численному расчету, надёжность которого не вызывает сомнений. В качестве такого «контрольного» метода в данной работе используются расчеты на геометрически-адаптивных сетках.

**Горение водорода в кислороде.** В данной работе в качестве жёсткой задачи Коши используется задача химической кинетики для процесса горения водорода в кислороде. Учитываются 25 элементарных реакций с участием 9 видов частиц (O, H, O<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>, OH, HO<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>O, O<sub>3</sub>, H<sub>2</sub>O<sub>2</sub>) при постоянной температуре, равной 6000K или 2000K.

**Геометрически-адаптивные сетки.** В [4] был предложен метод построения геометрически-адаптивных сеток в аргументе «Длина дуги интегральной кривой». За счёт такого выбора аргумента уменьшается шаг в областях резкого (скачкообразного)

изменения решения. Дополнительно шаг измельчается на участках, где велика кривизна интегральной кривой. В [1] этот метод был обобщён на явные схемы. При этом кривизна вычисляется только через значения правых частей, которые и так участвуют в записи схемы. Поэтому метод является экономичным.

Одновременно с нахождением решения вычисляется апостериорная асимптотически точная оценка погрешности по методу Ричардсона. Было показано (см. [1] и [2]), что данный метод обеспечивает надёжное решение задачи химической кинетики с заданной точностью. Это особенно актуально ввиду трудоёмкости задачи.

**Процедура сравнения.** В данной работе стандартные пакеты Гира и Дормана-Принса сравниваются с методом геометрически-адаптивного выбора шага на жёсткой задаче Коши. Задача решается двумя способами: при помощи геометрически-адаптивных сеток с применением явных схем Рунге-Кутты и при помощи стандартного пакета Гира или Дормана-Принса. Решение по стандартным пакетам осуществляется двумя способами: в аргументе «время» и в аргументе «длина дуги». Полученные по стандартным пакетам решения сравниваются с решением, полученным на геометрически-адаптивных сетках.

Вычисления производились в среде MATLAB с использованием встроенных реализаций пакетов Гира и Дормана-Принса (функции MATLAB `ode15s` и `ode45`).

При решении задачи с геометрически-адаптивным выбором шага контролируется сходимость решения с теоретическим порядком точности и достижение ошибок машинного округления. Поэтому это решение можно считать точным, а отклонение от него решений по стандартным пакетам – фактической ошибкой последних. Так как узлы сравниваемых решений не совпадают, то «точное» решение интерполируется на узлы решения, полученного по стандартным пакетам. После нахождения «точного» решения вычисляется оценка погрешности интерполяции.

**Результаты расчётов.** Для каждого случая производилась серия расчётов по стандартному пакету с уменьшением заданной относительной точности `tolerance`. Результаты вычислений приведены на рисунках. По оси абсцисс отложена величина, обратная `tolerance`. Круглыми маркерами изображено отклонение решения по стандартному пакету от «точного» решения, квадратными – число узлов, получившееся в сетке стандартного пакета, ромбиками – уровень ошибок интерполяции. Фиолетовой прямой изображена заданная относительная точность.

При уменьшении `tolerance` отклонение решения, полученного по стандартному пакету, и число шагов в нём быстро переставали меняться.

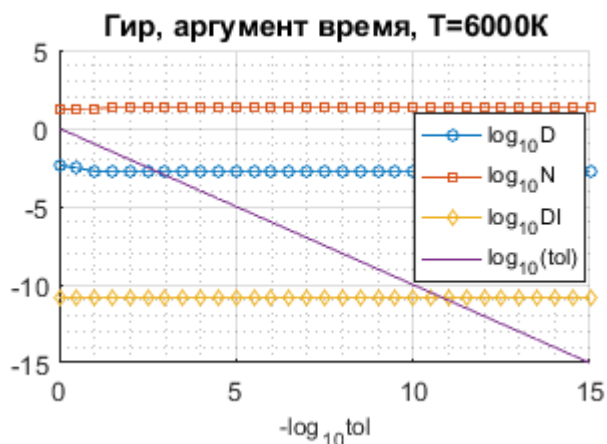


Рис. 1. Пакет Гира в аргументе время.

С расчётом в аргументе время справился только пакет Гира (рис. 1), при этом давая точность не лучше  $1e-2$ . Число узлов составляет лишь около 50. Таким образом,



трудоемкость расчета невелика, однако фактическая погрешность совершенно не соответствует запрошенной пользователем. Погрешность интерполяции на несколько порядков меньше отклонений решений по стандартным пакетам, а значит, ею можно пренебречь.

Рассмотрим расчёт по программе Гира в аргументе длина дуги (рис. 2). Видно, что отклонение и число узлов быстро выходят на константу. Фактическая точность стандартных пакетов не превышает  $1e-6$ . Число узлов около 110.

При температуре 2000 К точность хуже, так как задача становится более жёсткой.

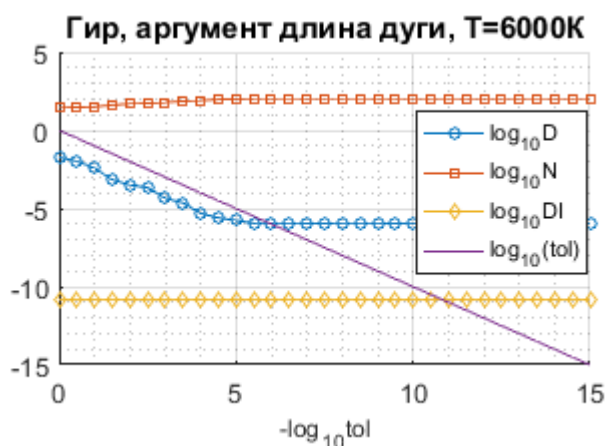


Рис. 2. Пакет Гира в аргументе длина дуги.

Программа Дормана-Принса в целом даёт результаты, аналогичные результатам по программе Гира, но срабатывает только в аргументе «длина дуги». Она делает подробную сетку (около 3000 узлов) и работает надёжнее на задачах разной жёсткости (при 6000К и 2000К результаты почти одинаковы).

Таким образом, найден новый пример задачи, в которой стандартные программы теряют надёжность. Это задача химической кинетики, которая традиционно считается особенно сложной. Проверка программы Гира на этом примере интересна еще и потому, что первоначально этот пакет разрабатывался как раз для подобных задач.

## ЛИТЕРАТУРА

1. П.Е. Булатов, А.А Белов, Н.Н Калиткин «Расчет химической кинетики явными схемами с геометрически-адаптивным выбором шага» // Препринты Института прикладной математики им. М.В. Келдыша. 2018.
2. А.А. Белов, Н.Н. Калиткин «Экономичные методы численного интегрирования задачи Коши для жестких систем ОДУ» // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, № 7. В печати.
3. Э.Хайрер, Г.Ваннер «Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи» М.: Мир, 1999.
4. А.А. Белов, Н.Н. Калиткин, И.П Пошивайло «Геометрически-адаптивные сетки для жестких задач Коши» // Доклады Академии наук. 2016. Т. 466, №3, С. 276–281.

## Использование графических ускорителей при моделировании нелинейных ультразвуковых пучков

Е.О. Коннова<sup>1</sup>, В.А. Хохлова<sup>2</sup>, П.В. Юлдашев<sup>3</sup>

<sup>1</sup>студент, <sup>2</sup>доцент, д.ф.-м.н., <sup>3</sup>ст. п., к.ф.-м.н.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

[helen.7aprel@gmail.com](mailto:helen.7aprel@gmail.com)

В области медицинской акустики на сегодняшний день быстро развивается направление неинвазивной хирургии, в котором мощные фокусированные ультразвуковые пучки используются для разрушения заданных структур организма. В роли таких структур могут выступать опухоли [1]. При проектировании преобразователей для генерации мощного ультразвука и определении эффективности и безопасности терапевтического воздействия возникает задача моделирования нелинейных звуковых пучков [2]. В моделях считается, что излучателем генерируется монохроматическая волна, спектр которой в процессе распространения обогащается высшими гармониками за счет эффекта акустической нелинейности. При этом расчеты обычно проводятся на основе волновых моделей эволюционного типа, в которых эволюционной переменной является координата вдоль направления распространения пучка, то есть вдоль оси  $z$  (рис. 1).

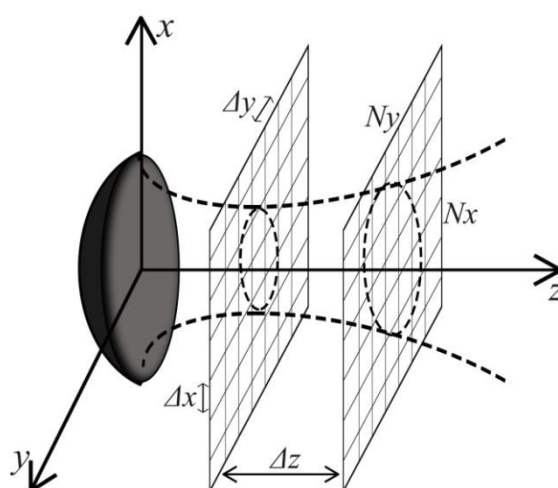


Рис 1. Схематическая иллюстрация метода расчета нелинейного ультразвукового пучка

Одним из часто используемых уравнений для моделирования ультразвуковых пучков является нелинейное уравнение Вестервелта, которое в предположении отсутствия обратного рассеяния можно записать в эволюционной форме как:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \tau \partial z} = \frac{c_0}{2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) + \frac{\beta}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} + \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^3 p}{\partial \tau^3}, \quad (1)$$

где  $p(x, y, z, \tau)$  – акустическое давление,  $c_0$  – скорость звука в среде,  $\tau = t - z/c_0$  – время в бегущей системе координат,  $\beta$  – коэффициент нелинейности,  $\delta$  – коэффициент термовязкого поглощения. Дифференциальные операторы в правой части уравнения описывают эффекты дифракции, нелинейности и термовязкого поглощения соответственно. Такая трехмерная волновая модель позволяет количественно точно

описывать нелинейные ударноволновые поля, создаваемые фокусированными преобразователями мощного ультразвука в однородных поглощающих средах [3]. Данное уравнение сложно решать в общем виде, поэтому обычно в численных расчетах используется метод расщепления по физическим факторам, согласно которому на каждом шаге сетки вдоль оси пучка каждый эффект рассчитывается отдельно с помощью определенного метода.

При численном решении уравнения (1) на каждом шаге по  $z$  дискретизованное поле давления представлено в памяти ЭВМ в виде трехмерной матрицы, которая содержит набор амплитуд  $2N_{\max}$  гармоник спектра волны, возникающих при разложении ее профиля в конечный ряд Фурье в каждой пространственной точке плоскости  $xu$  на сетке с числом точек  $N_x$  по оси  $x$  и  $N_y$  по оси  $y$ :

$$p(x, y, z, \tau) = \sum_{n=-N_{\max}}^{N_{\max}} p_n(x, y, z) e^{i\omega_n \tau},$$

где круговые частоты гармоник  $\omega_n = \omega n$ ,  $\omega$  – круговая частота источника,  $p_n$  – комплексные амплитуды гармоник. При этом в памяти ЭВМ достаточно хранить всего одну половину спектра по положительным частотам, так как вторая половина по отрицательным частотам является комплексно сопряженной к первой.

В связи с большим количеством данных (размер матриц может достигать  $N_x = 10000$  на  $N_y = 10000$  на  $N_{\max} = 1000$ ) и сложностью расчетов, в общем случае для решения уравнения требуется использование суперкомпьютерных мощностей. С учетом оптимизаций пространственных распределений гармоник удается решить задачу на ПК и серверах с многоядерными центральными процессорами (CPU) [4]. Однако даже в случае параллельного исполнения на нескольких ядрах процессора (обычно от 2 до 16) выполнение одного расчета может занимать до нескольких суток. При этом для характеристики поля одного излучателя во всем диапазоне мощностей обычно требуется провести несколько десятков расчетов [3]. Отсюда видно, что представленная вычислительная задача требует ускорения.

В настоящее время все большую популярность в численном моделировании приобретают алгоритмы, адаптированные для вычисления на графических процессорах видеокарт. Преимущество графических процессоров (GPU) заключается в том, что они содержат до нескольких тысяч небольших ядер, способных выполнять максимально много арифметических операций одновременно, в то время как в составе центральных процессоров присутствует несколько мощных ядер, выполняющих максимально широкий набор инструкций [5]. Современные GPU адаптируются для выполнения пользовательских программ. Так, для GPU уже реализованы библиотеки стандартных математических операций и методов, связанных, например, с линейной алгеброй и быстрым преобразованием Фурье.

Построение алгоритма решения дифракционного оператора на GPU методом углового спектра было рассмотрено в работе [6]. В данной работе была рассмотрена задача ускорения расчетов нелинейного оператора уравнения (1), который представлен дифференциальным уравнением:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\beta}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial p^2}{\partial \tau}. \quad (2)$$

Так как акустическое давление представимо в виде ряда Фурье по временным гармоникам, то уравнение (2) в данной точке пространства запишется в виде [7]:

$$\frac{\partial p_n}{\partial z} = \frac{\omega\beta}{\rho_0 c_0^3} \left( \sum_{k=1}^{N_{\max}-n} p_k p_{n+k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} p_k p_{n-k} \right) \quad (3)$$

где  $p_n$  – комплексно сопряженная амплитуда гармоники. Таким образом, для нахождения поля на следующем шаге  $\Delta z$  по оси  $z$  необходимо решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для амплитуд гармоник, которая может быть поставлена как задача Коши:

$$dy/dz = f(x, y), \quad y(z_0) = y_0. \quad (4)$$

Здесь вектор значений  $y$  размера  $N_{\max}$  представляет набор гармоник в каждой точке пространственной сетки, а  $f$  – функция в правой части уравнения (3). Приближенное решение системы на следующем  $m+1$  шаге строится методом Рунге-Кутты четвертого порядка [8]:

$$\begin{aligned} y_{m+1} &= y_m + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ k_1 &= f(x_m, y_m), \\ k_2 &= f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(x_m + h, y_m + hk_3), \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь численный шаг  $h = \Delta z$ . Суммарная ошибка расчетов данным методом составляет  $O(h^4)$ . Вычисления повторяются в цикле, перемежаясь с решением дифракционного оператора до прохождения необходимого интервала по оси  $z$ .

Начальное распределение комплексной амплитуды первой гармоники в плоскости  $z = 0$  было получено при помощи интеграла Рэля, рассчитанного для фокусированного преобразователя с частотой 1 МГц, диаметром 10 см и с фокусным расстоянием 9 см. Распределение задавалось на квадратной сетке с общим числом ячеек  $N_x N_y$ , где  $N_x = N_y = 640$ , с пространственными шагами  $\Delta x = \Delta y = 0.4$  мм.

В данной задаче расчеты были проведены на GPU видеокарты Nvidia GTX1070 с числом ядер CUDA, равным 1920, для чего была написана функция ядра CUDA, которая реализует алгоритм (5). Число гармоник  $N_{\max}$  было выбрано равным 100. Распараллеливание производилось по пространственным координатам плоскости  $xy$ . Для сравнения расчеты по алгоритму (5) проводились на обычном многоядерном процессоре, в котором 8 ядер выполняли параллельно вычисления для разных пространственных точек в плоскости  $xy$ . В результате было получено, что решение задачи на GPU позволяет ускорить вычисления в несколько раз.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бэйли М.Р. и др. // «Физические механизмы воздействия терапевтического ультразвука на биологическую ткань», Акуст. журн., Т 49, № 4, С. 437-464.
2. Rosnitskiy P.B. et al. // [IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control](#), 2017, Vol. 64, no. 2, P. 374 – 390.
3. [Kreider W. et al.](#) // [IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control](#), 2013, Vol. 60, no. 8, P. 1683 – 1698.

4. Юлдашев П.В. и др. // Акуст. журн., 2011, Т. 57, № 3, С. 337 – 347.
5. Перепёлкин Е.Е. и др. «Вычисления на графических процессорах (GPU) в задачах математической и теоретической физики», М: Ленанд 2014.
6. Коннова Е.О. и др. «Использование графических ускорителей в моделировании ограниченных ультразвуковых пучков», Сборник тезисов «Ломоносов-2018», С. 693 – 695.
7. Кашеева С.С. и др. // Акуст. журн., 2000, Т. 46, № 2, С. 211 – 219.
8. Калиткин Н.Н. «Численные методы» М.: Наука, 1978.

## Математическая модель конической безэховой камеры

Т.А. Кузьмич<sup>1</sup>, Н.П. Балабуха<sup>2</sup>, Н.Е. Шапкина<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,  
 физический факультет, Москва, Россия

<sup>2</sup>Институт Теоретической Прикладной Электродинамики РАН

[kuzmich.ta16@physics.msu.ru](mailto:kuzmich.ta16@physics.msu.ru)

Появление рупорных БЭК различной формы обусловлено необходимостью проводить анализ рассеяния и излучения электромагнитных волн на частотах, менее 1 ГГц. Такие безэховые камеры представляют собой металлическую конструкцию, состоящую из волновода переменного сечения, имеющего обычно секториальную, пирамидальную или коническую форму, с открытым излучающим концом, которая завершается прямоугольной или цилиндрической частью, где размещается исследуемый объект. Внутренняя поверхность камеры покрыта радиопоглощающим материалом, источник помещается вблизи вершины рупора.

Для лучшего приближения поля в области размещения объекта к полю плоской волны была рассмотрена концепция безэховой камеры конической формы (рис. 1а). Конструкция камеры позволяет ограничиться рассмотрением поля только в апертуре конической части камеры. В качестве источника будем использовать электрический диполь. В работе строится математическая модель такой камеры.

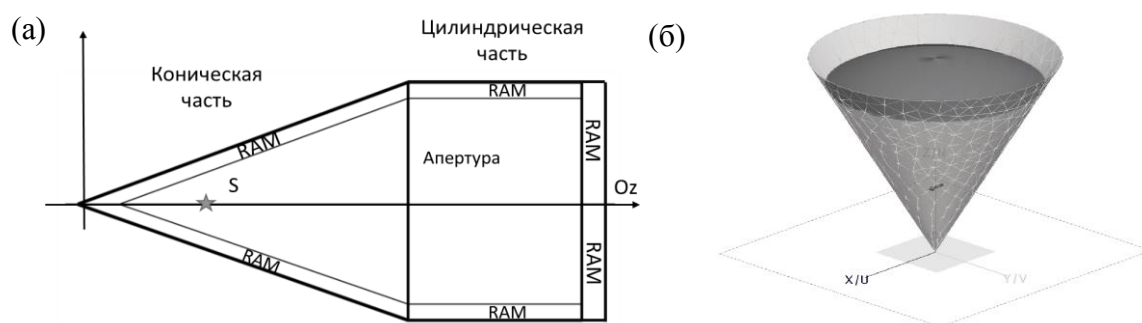


Рис.1. (а) Безэховая камера с конической частью. RAM – радиопоглощающий материал, S – источник излучения. (б) Модель конической БЭК с идеально проводящими стенками.

Сначала рассмотрим камеру с идеально проводящей конической поверхностью. Эта постановка задачи позволяет получить аналитическое решение и дает возможность оценить точность расчетов. В этом случае постановка задачи имеет следующий вид: электромагнитная волна, созданная диполем, расположенным перпендикулярно оси конуса (рис. 1б), распространяется внутри идеально проводящей конической поверхности. Анализ электрических и магнитных компонент поля производится в апертуре конической части камеры.

Электромагнитные волны удовлетворяют уравнениям Максвелла, которые вместе с граничными условиями на поверхности камеры представляют собой краевую задачу:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = ik \vec{H}, \\ \operatorname{rot} \vec{H} = -ik \vec{E}, \\ \operatorname{div} \vec{E} = 0, \operatorname{div} \vec{B} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$E_\varphi|_{\theta=\gamma} = 0, \quad E_r|_{\theta=\gamma} = 0, \quad \text{при } 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r < +\infty.$$

Электромагнитные волны, существующие в коническом рупоре, могут быть, подобно волнам в волноводе, разбиты на два класса — на электрические и магнитные волны. Для каждого типа можно ввести электрические и магнитные потенциалы. Использование такого рода потенциалов позволяет свести уравнения Максвелла к уравнению волнового типа. Далее краевая задача для потенциала решалась методом разделения переменных. После введения электрического потенциала  $U$  получаем следующую краевую задачу в сферической системе координат:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right) + k^2 U = 0, \\ U|_{\theta=\gamma} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Для волн магнитного типа задача ставится следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \right) + k^2 V = 0, \\ \left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{\theta=\gamma} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Собственные значения в соответствующей задаче Штурма-Лиувилля для угловой части являются нецелыми, поэтому были найдены численно, итерационным методом. После этого было получено решение для радиальной части.

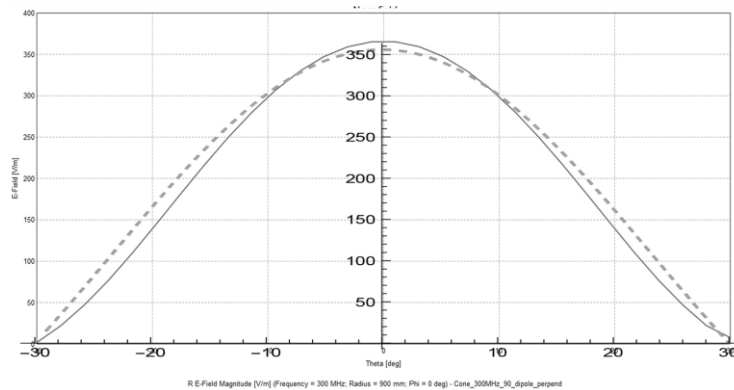


Рис.2. Сравнение решения, полученного на основе аналитического анализа и решения, с помощью FEKO

Общее решение можно представить в виде двух волн: бегущей волны, распространяющейся от источника к открытому концу, и стоячей, распространяющейся к вершине конической поверхности.

$$\begin{aligned} U_s &= \zeta_{\nu_{mn}} P_{\nu_{mn}}^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad V_s = \zeta_{\mu_{mn}} P_{\mu_{mn}}^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \\ U_{-s} &= \psi_{\nu_{mn}} P_{\nu_{mn}}^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad V_{-s} = \psi_{\mu_{mn}} P_{\mu_{mn}}^m(\cos \theta) e^{im\varphi}. \quad m \in (-\infty, +\infty), \quad m \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (4)$$

Для более сложных структур для такого рода задач используется численное решение уравнений Максвелла, в частности, методом интегральных уравнений. Для модели с идеально проводящей поверхностью конической части беззховой камеры было также построено решение с помощью вычислительного пакета FEKO.

Исследовано угловое и радиальное распределение поля в апертуре камеры, проведено сравнение результатов, полученных на основе аналитического решения

задачи и с помощью вычислительного пакета (рис. 2). Показано хорошее соответствие результатов.

Для получения лучшего распределения электромагнитного поля рассматривается модель камеры, стенки которой покрыты диэлектриком. Были произведены расчеты с помощью вычислительного пакета. Также для сравнения были построены диаграммы направленности для случая конической и секториальной безэховых камер [4] (рис. 3а). Так же исследовано распределение поля при разных углах раскрытия конуса (рис. 3б).

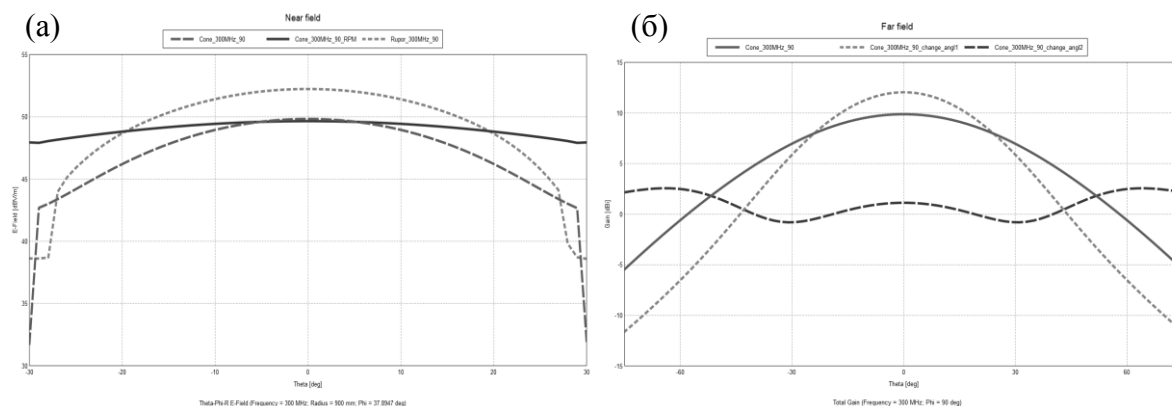


Рис.3. (а) Сравнение диаграмм направленности для конической (штрихованная линия), секториальной (пунктирная линия) и конической с РПМ (сплошная линия) БЭК. (б) Сравнение диаграмм направленности при угле раскрытия конуса  $\pi/6$  (сплошная линия),  $\pi/4$  (пунктирная линия),  $\pi/9$  (штрихованная линия).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнштейн Л.А., Электромагнитные волны, Радио и связь, 1988.
2. Банков С.Е., Курушин А.А., Расчет излучаемых структур с помощью FEKO, ЗАО «НПП «РОДНИК», 2008.
3. Кеппер М.К., Шапкина Н.Е. «Математическое моделирование конической безэховой камеры», Волны-2017
4. Кеппер М.К. «Математическое моделирование секториальной безэховой камеры», Ломоносов-2016
5. V. Rodriguez // ACES JOURNAL, Vol. 28, No. 12, 2013
6. Кузьмич Т.А., Математическое моделирование безэховой камеры конической формы, Ломоносов – 2019



## Метод пространственных дифференциалов в детектировании и описании одномодовых волновых структур

А.В. Бланк, А.А. Насонов, Н.А. Сухарева

Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва

[blankarkadiy@physics.msu.ru](mailto:blankarkadiy@physics.msu.ru), [nasonov.al17@gmail.com](mailto:nasonov.al17@gmail.com), [suhareva@phys.msu.ru](mailto:suhareva@phys.msu.ru)

Повышение пропускной способности открытых оптических каналов передачи данных связано прежде всего с использованием всего набора модулируемых параметров векторных волновых пучков, таких как амплитуда, частота, однородная и неоднородная поляризация, орбитальный угловой момент сигнального пучка. Для коллимированных пучков в благоприятных условиях на оптической трассе дополнительно возможно использование пространственно-кодовых конструкций, создаваемых на основе собственных функций уравнения распространения – пространственных мод волнового пучка. Число доступных для процессов кодирования пространственных мод ограничено лишь апертурой приемопередающих устройств, их исходная ортогональность позволяет на стороне принимающего узла использовать традиционные методы корреляционного распознавания.

Выбор исходного профиля пучков проводится из класса структурно-устойчивых решений волнового уравнения. При распространении в турбулентной атмосфере подобных пучков необходимо учитывать закономерности распространения и распада доступных состояний орбитального углового момента пучка, формирование оптических вихрей. Одномодовые пучки Лагерр-Гаусса с высокими значениями радиального и азимутального квантовых чисел, прежде всего вихревые пучки, при распространении в турбулентной атмосфере испытывают рассеяние, характеризующееся меньшими значениями сечений, нежели для пучков TEM<sub>00</sub> с тем-же профилем гауссовой огибающей. Работа со структурно устойчивыми пучками, как и само понятие структурной устойчивости, требует аккуратного соблюдения условий, в которых свойство устойчивости может реализоваться. Наиболее известные элементы параметрического семейства Эрмита-Лагерра-Гаусса должны рассматриваться в дальней зоне, поскольку не являются устойчивыми в зоне Френеля. Если необходима работа именно в ближней зоне, следует выбирать параметрическое семейство Айнса-Гаусса.

Работа с пространственными сигнально-кодовыми конструкциями на основе структурно-устойчивых волновых пучков требует значительного числа процедур предварительной обработки изображения, выполняющих нормировку интенсивности, калибровку масштаба, подавление помех. Структурно-устойчивые волновые пучки как собственные функции волнового уравнения, могут быть модифицированы при изменении типа симметрии среды, сохраняя при этом ряд инвариантов, определяемых законами сохранения. Фактически такие распределения эквивалентны помехоустойчивым сверточным кодам, декодером для которых могут быть обратные обобщенному принципу Гюйгенса-Френеля дифференциальные отображения. Пространственные дифференциалы первого и второго порядков от профиля распределения интенсивности в плоскости регистрации позволяют выполнять сравнение регистрируемого профиля волнового пучка с опорными масками. Помимо этого, на основе значений пространственных дифференциалов развиты алгоритмы определения характерных границ распределения интенсивности, введены новые характеристики -- спектр локальных ориентаций, выявленность структуры.

Определим волновую функцию через комплексную амплитуду [1]:

$$u(x, y, z) = F(x, y, z)e^{ikz}$$

где  $F(x, y, z)$  - медленно меняющаяся с ростом  $z$  комплексная функция. В параксиальном приближении:

$$\frac{\partial^2 F(x, y, z)}{\partial z^2} \ll k \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}$$

справедливо уравнение параболического типа[2]:

$$\frac{\partial^2 F(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x, y, z)}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} = 0$$

Представим комплексную амплитуду  $F(x, y, z)$  через измеряемые физические характеристики - интенсивность и фазу:

$$F(x, y, z) = \sqrt{I(x, y, z)} \exp(i\phi(x, y, z)), \quad \text{где } I(x, y, z)|_{z=const} - \text{измеряемая величина}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( I \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( I \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + k \frac{\partial I}{\partial z} = 0 \\ 2I \left( \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \right) - \left( \frac{\partial I}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial I}{\partial y} \right)^2 - 4I^2 \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + 2k \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] = 0 \end{cases}$$

Тензор структуры изображения на основе первых дифференциалов определим в каждой точке плоскости регистрации следующим образом:

$$\hat{J}(x, y) = \begin{bmatrix} J_{xx}(x, y) & J_{yx}(x, y) \\ J_{xy}(x, y) & J_{yy}(x, y) \end{bmatrix},$$

где используются сглаженные квадратичные формы –

$$J_{xx}(x, y) = \sum_{\eta}^C \sum_{\xi}^R \omega(y - \xi, x - \eta) \left( \frac{\partial I(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right)^2$$

$$J_{yy}(x, y) = \sum_{\eta}^C \sum_{\xi}^R \omega(y - \xi, x - \eta) \left( \frac{\partial I(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right)^2$$

$$J_{xy}(x, y) = J_{yx}(x, y) = \sum_{\eta}^C \sum_{\xi}^R \omega(y - \xi, x - \eta) \left( \frac{\partial I(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial I(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right)$$

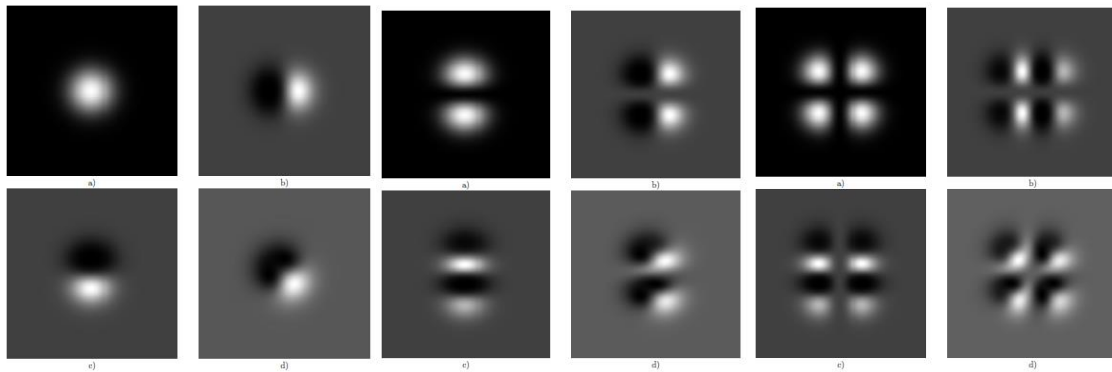


Рис.1: Профили исходных распределений интенсивности и соответствующие им значения  $J_{xx}(x, y)$ ,  $J_{yy}(x, y)$ ,  $J_{yx}(x, y)$  для мод TEM00, TEM01 и TEM11.

Исходя из инвариантов тензора второго ранга, определим аналог локальной "энергии деформации"[3], профиля распределения интенсивности следующим образом:

$$E(x, y) = J_{xx}(x, y) + J_{yy}(x, y) \sim \left(\frac{\partial I(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial I(x, y)}{\partial y}\right)^2.$$

Максимум квадратичной формы пространственной производной соответствует множеству точек перегиба первых пространственных производных профиля интенсивности и фактически может быть использован для оценки линейных размеров пучка в плоскости регистрации.

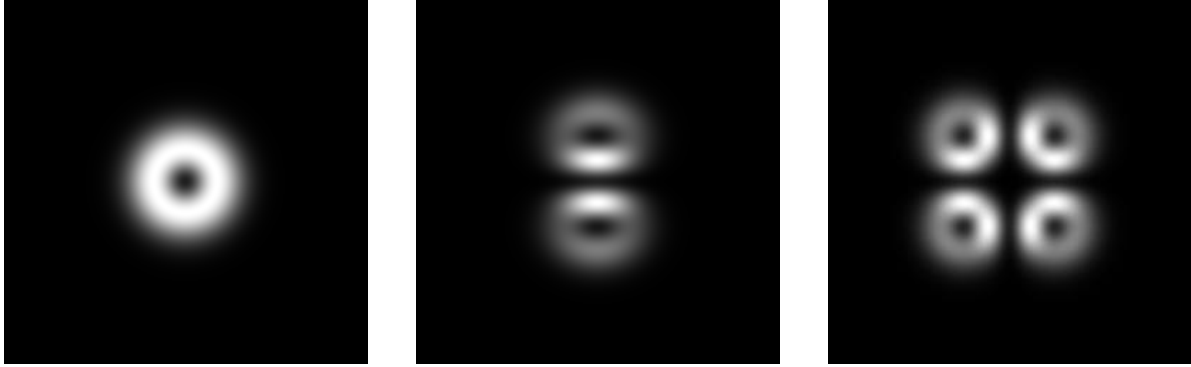


Рис.2: Профили энергоемкости для мод TEM00, TEM01 и TEM11

Вблизи нулевых значений интенсивности существует связь между модулем орбитального момента (поперечной компонентой вектора Умова-Пойнтинга) и вторыми пространственными производными:

$$|\text{rot}\vec{j}||_{(x_0, y_0)} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y}\right)^2} \Bigg|_{(x_0, y_0)} = \frac{1}{k} \sqrt{\det M} \Big|_{(x_0, y_0)}$$

Если определить матрицу пространственных дифференциалов второго порядка, модуль орбитального момента будет связан с её детерминантом:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 I}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \end{pmatrix}, \quad |\text{rot}\vec{j}||_{(x_0, y_0)} \sim \sqrt{\det M} \Big|_{(x_0, y_0)}$$

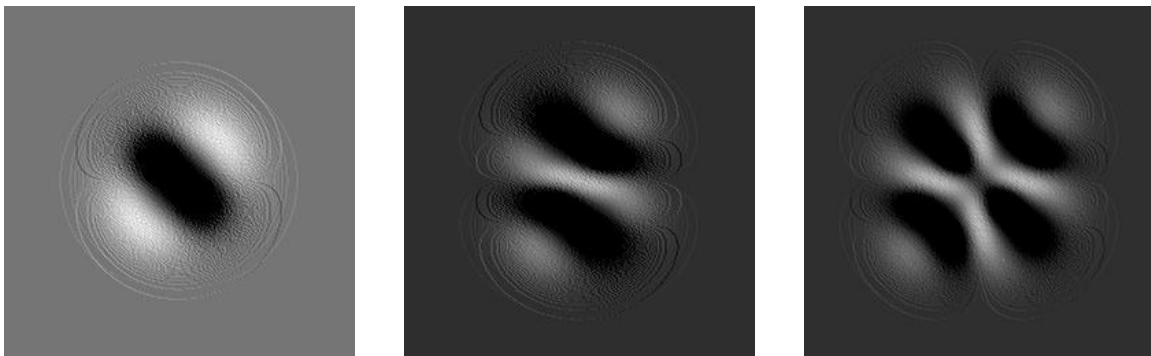


Рис.3: Профили орбитального момента для мод TEM00, TEM01 и TEM11.

Используя матрицу вторых пространственных дифференциалов, можно записать эллиптическое уравнение для профиля изменения фазы волнового пучка:

$$4I^2 \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + 2k \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] = L(I),$$

где

$$L(I) = 2I(M_{xx} + M_{yy}) - (J_{xx} + J_{yy}) = 2I \text{Tr}(M) - \text{Tr}(J)$$

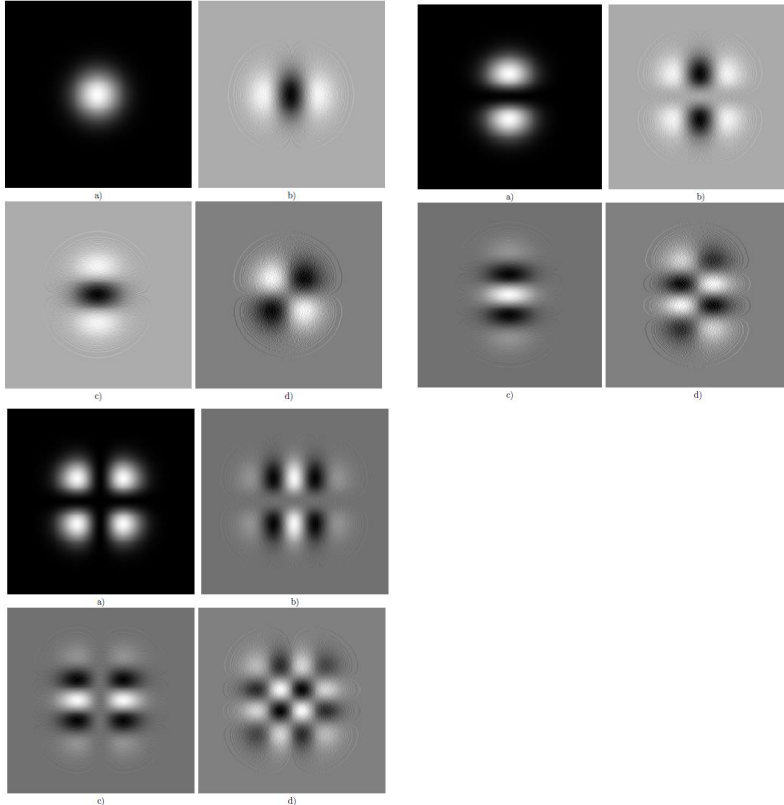


Рис.4: Профили исходных распределений интенсивности и соответствующие им значения  $M_{xx}(x,y)$ ,  $M_{yy}(x,y)$ ,  $M_{yx}(x,y)$  для мод TEM00, TEM01 и TEM11.

Многообразие представленных признаков распознавания и коррекции принятия решения при регистрации пространственной структуры пучка позволяет синтезировать оптимальные алгоритмы реконструкции сообщений в системах пространственного кодирования.[4][5]

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамочкин Е. Г., Волостников В. Г. Современная оптика гауссовых пучков. – 2010.
2. Волостников В. Г. Методы анализа и синтеза когерентных световых полей //М.: Физматлит. – 2014.
3. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980.
4. Meschede D. Optics, light and lasers: the practical approach to modern aspects of photonics and laser physics. – John Wiley & Sons, 2017.
5. Jähne B. Spatio-temporal image processing: theory and scientific applications. – Springer Science & Business Media, 1993. – Т. 751.



## **О возможности использования цилиндрической струи жидкости в качестве антенного элемента**

А.А. Очиров, Т.К. Артёмова, С.В. Ходырев  
*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова*  
[otchirov@mail.ru](mailto:otchirov@mail.ru), [artemova@uniyar.ac.ru](mailto:artemova@uniyar.ac.ru)

Антенные элементы широко используются при приеме и передачи информации по различным беспроводным каналам связи. С развитием науки и техники форма антенн и материалы, из которых они изготавливались, претерпевали значительные изменения. До недавнего времени материалами для изготовления антенн служили металлы или твердые диэлектрики. В работах [1] – [3] была показана принципиальная возможность использования жидкого диэлектрика в качестве основы для антенного элемента. В этих работах использовалась практически одна и та же конструкция антенны: жидкость (как правило соленую воду) помещают внутрь вертикального цилиндрического сосуда, а штырь с током заводят в эту трубку таким образом, чтобы он находился по центру. Исследовались зависимости диаграммы направленности и эффективности такого рода антенн в зависимости от геометрических размеров сосуда и от состава (солености) раствора. Полученные результаты свидетельствуют о потенциальной возможности создания жидких антенн с характеристиками, похожими на характеристики короткой проволочной антенны.

Однако ранее не рассматривалась возможность создания антенны из цилиндрической струи жидкости со свободной поверхностью. Еще Д. Рэлей обратил внимание на то, что свободно стекающая вертикально вниз цилиндрическая струя жидкости является неустойчивой по отношению к капиллярному волновому возмущению ее свободной поверхности. Это связано с тем, что поверхностная энергия жидкости в цилиндре больше, чем у каплей такого же объема. При существовании какого-либо возмущения поверхности сколь угодно малой амплитуды капиллярные силы вызывают увеличение давления вблизи поверхности в местах сужения струи и локальное уменьшение давления в местах расширения. Это вызывает поток жидкости из областей сужения в области расширения и, как следствие, рост амплитуды возмущения и распад струи на капли. Помимо этого, при удалении от источника у свободно вытекающей струи должен уменьшаться радиус. Это следствие уравнения Бернулли: при удалении от источника увеличивается скорость элемента жидкости, значит должно уменьшаться давление, а следовательно силы поверхностного натяжения сильнее должны стягивать поверхность.

Очевидно, что распад струи приводит к уменьшению эффективной длины антенны, а искажение формы струи приводит к изменениям ее характеристик. В настоящем исследовании сделана попытка построить математическую модель жидкой антенны. Рассматривалась цилиндрическая струя жидкости, вытекающая вертикально вниз из бесконечного источника из отверстия радиуса  $R_0$ , в основании которой вводится штырь с током перпендикулярно оси цилиндра. Ставилась цель определить зависимость характеристик антенны от длины нераспавшейся части струи, искажения формы, связанного с сужением струи под действием капиллярных сил и от волнового возмущения струи.

Для начального приближения не учитывалось влияние электромагнитного поля на форму поверхности жидкости. Также считалось, что скорость потока жидкости в струе достаточно мала, для того, чтобы пренебрегать динамическим воздействием воздуха. Для простоты математических вычислений будем считать волновое возмущение

симметричным, т.е. будем предполагать, что движение жидкости вокруг оси симметрии отсутствует ( $v_\varphi = 0$ ). Математическая формулировка задачи в цилиндрических координатах по определению поля скоростей  $\mathbf{V} = v_r \mathbf{e}_r + v_z \mathbf{e}_z$ , давлений  $p$  и формы свободной поверхности  $\xi$  в этом случае записывается следующим образом [4]:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[ \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v_r) \right) \right] \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[ \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right) \right] \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v_r) = 0 \quad (3)$$

Здесь  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости, а в уравнениях движения (1) – (2) опущены квадратичные члены в силу малости предполагаемых возмущений. Очевидно, что компоненты скорости должны быть конечны на оси цилиндра ( $r = 0$ ), а граничные условия на поверхности цилиндра  $r = R_0 + \xi(z, t)$  можно записать в виде:

$$p_{rr} = p_\sigma \quad (4)$$

$$p_{rz} = 0 \quad (5)$$

Здесь  $p_\sigma$  – капиллярное давление жидкости.

Задача (1) – (5) решалась методом разложения по малому параметру, пропорциональному амплитуде волнового возмущения. Решение использовалось при построении модели антенны.

Были построены модели антенны, состоящей из диэлектрической жидкости, имеющей форму цилиндра и ровную боковую поверхность. Также была построена модель, учитывающая сужение цилиндра с удалением от источника и модель, учитывающая сужение цилиндра и возмущение боковой поверхности капиллярным волновым движением. Во всех моделях предполагалось, что штырь с током вводится в антенну перпендикулярно оси струи около ее основания. Анализ моделирования показывает принципиальную возможность использования такого рода антенных элементов. Для улучшения характеристик необходимо обеспечивать лучшее согласование токнесущего штыря с телом антенны. Это может быть достигнуто установкой дополнительной катушки индуктивности вблизи основания струи. Также были получены оценки влияния изменения формы поверхности на характеристики антенны, такие как диаграмма направленности, коэффициент усиления и др.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Zhang J. et al. //Advanced Materials Research. – Trans Tech Publications, 2013. – Т. 716. – С. 586-589.
2. Feng C. et al. //2016 IEEE International Conference on Microwave and Millimeter Wave Technology (ICMMT). – IEEE, 2016. – Т. 2. – С. 826-828.
3. Fayad H., Record P. //Electronics Letters. – 2006. – Т. 42. – №. 3. – С. 133-134.
4. В.Г. Левич “Физико-химическая гидродинамика” – Гос изд-во физико-математической лит-ры, 1959.

## Исследование энергетического спектра нанокластеров Si и BrSi для построения твердотельного одноатомного транзистора

А.А. Паршинцев, В.В. Шорохов

Центр квантовых технологий, Физический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова

[parshincev@physics.msu.ru](mailto:parshincev@physics.msu.ru)

Технологии производства электронных компонентов перешли к суб-10 нм размерам. На протекание тока в системах со столь малыми размерами значительное влияние оказывают кулоновские эффекты и эффекты размерного квантования, по порядку величины, существенно превышающие тепловые флуктуации. Поэтому создание и исследование устройств, в которых такие эффекты являются основой, крайне важная и актуальная задача. Основным примером и одновременно базовым элементом среди подобных устройств является одноатомный одноэлектронный транзистор, представляющий собой единственный атом, выделенный физически или химически, отделенный туннельными контактами от электродов стока, истока и расположенный максимально близко от электростатического затвора, управляющего протеканием тока через транзистор.

В настоящее время широко применяется метод создания выделенных зарядовых центров в твердотельной кристаллической матрице [1]. Для исследования электронного транспорта в одноатомном транзисторе на основе единичного допанта необходимо предварительно рассчитать спектр полной энергии и одночастичные энергетические спектры нанокластера вещества внутри которого находится единичный допант. В настоящей работе рассчитаны спектры полной энергии и одночастичные энергетические спектры нанокластеров кремния, пассивированного атомами водорода и нанокластеров кремния с единичным допантом брома, пассивированного атомами водорода. Для расчета использовался метод Хартри-Фока и метод функционала плотности в программе квантово-химических расчетов NWChem [2].

Исследовались нанокластеры размером от 17 до 501 атома в нескольких зарядовых состояниях, рис. 1. Для каждого нанокластера проведена параметризация полной энергии, получена ширина щели HOMO-LUMO, вычислена эффективная емкость.

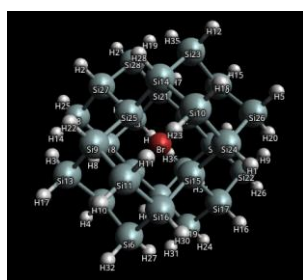


Рис. 1. Нанокластер BrSi<sub>28</sub>H<sub>36</sub>.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда, грант №16-12-00072-П.

### ЛИТЕРАТУРА

1. M. Fuechsle et al. // Nature nanotechnology, 242–246 (2012).
2. M. Valiev et al. // Comput. Phys. Commun. 181, 1477 (2010).



## **Одноэлектронный молекулярный транзистор на основе семейства молекул с выделенными одноатомными зарядовыми центрами**

А.А. Паршинцев, В.В. Шорохов, Е.С. Солдатов

*Центр квантовых технологий, Физический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова*

[parshincev@physics.msu.ru](mailto:parshincev@physics.msu.ru)

Металлорганические молекулы, содержащие одиночные атомы металлов, которые обладают свойствами выделенных зарядовых центров, являются перспективными кандидатами для построения атомных одноэлектронных устройств и элементов квантовых вычислительных устройств [1]. Ключевой физической особенностью металлических зарядовых центров в таких молекулах является близость по порядку величины значений характерной кулоновской энергии таких центров и дискретность их энергетического спектра.

В настоящей работе рассчитаны спектры полной энергии и одночастичные энергетические спектры электронов семейства молекул с выделенными одноатомными зарядовыми центрами на основе различных атомов переходных металлов. Для расчета одночастичных энергетических спектров и спектров полной энергии использовался метод Хартри-Фока в программе квантово-химических расчетов NWChem [2], а также метод функционала плотности для уточнения значений полной энергии и ширины щели НОМО-LUMO. Предложена модель расчета темпов туннелирования в одноатомном одноэлектронном транзисторе на основе таких молекул.

На основе данных расчета энергетических спектров одноатомных металлорганических молекул с выделенными металлическими зарядовыми центрами получена оценка на эффективную высоту и ширину туннельного барьера, возникающего в одноатомном одноэлектронном транзисторе.

По результатам расчета показано, что исследуемые молекулы могут быть использованы в качестве аналога одноатомных зарядовых центров. В то же время их кулоновские свойства несколько различны, что приводит к некоторым особенностям на транспортных характеристиках элементов на их основе. Для расчета транспортных характеристик ОМТ использовался подход, ранее описанный в работе [3,4], и метод имитационного моделирования Монте-Карло в режиме предельно медленной энергетической релаксации электронов [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 18-32-00907.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Fuechsle, M. et al. // Nat. Nanotechnol. 7, 242–246 (2012).
2. M. Valiev et al. // Comput. Phys. Commun. 181, 1477 (2010).
3. Averin, D. V. et al. // Phys. Rev. B 44, 6199–6211 (1991).
4. Beenakker, C. W. J. // Phys. Rev. B 44, 1646–1656 (1991).
5. Honerkamp J. // Stochastic dynamical systems: Concepts, numerical methods, data analysis. New York: Wiley-VCH (1994).

## Математическое моделирование дифракции на телах с кусочно-гладкой границей

А.Н. Боголюбов, И.Е. Могилевский, В.В. Ровенко, М.И. Светкин

МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики

bogan7@yandex.ru, imogilevsky@mail.ru, mihail-svetkin@mail.ru, rovenko.vladimir@physics.msu.ru

В настоящее время большой интерес представляют задачи дифракции, связанные с минимизацией рассеянного излучения от исследуемого объекта. Изучение этих задач может помочь, например, при конструировании маскирующих оболочек различных типов. В работе [1] при определённых частотах падающего излучения был получен эффект резонансного снижения рассеиваемого поля от гофрированного цилиндра с гладкой границей. Выясним наличие похожего эффекта при рассмотрении в качестве облучаемого объекта цилиндра с кусочно-гладкой границей, в частности, так называемый «ёжик» (рисунки 1 в конце тезисов).

Рассматривается задача о падении плоской монохроматической волны  $\{\bar{E}_0 = \bar{E}e^{-i\omega t}, \bar{H}_0 = \bar{H}e^{-i\omega t}\}$  на цилиндр радиуса  $R_c$  при отсутствии сторонних зарядов и токов в случае установившихся колебаний. Нас будет интересовать поведение поля в окрестности точек излома границы. Для данной задачи выполнены все условия представления компонент электромагнитного поля через две скалярные функции — функции Боргнаса [2]  $U$  (для поля электрического типа – ЭТ) и  $U'$  (для поля магнитного типа – МТ). С помощью парциальных условий излучения на воображаемой поверхности  $\Sigma_{r=R>R_c}$ , а на поверхности проводящего цилиндра поставим условия первого рода  $U(P)|_{P \in \Sigma} = 0$  для поля ЭТ и условия второго рода  $\frac{\partial U(P)}{\partial n}|_{P \in \Sigma} = 0$  для поля МТ [3]. С добавлением парциальных условий излучения система уравнений для функций Боргнаса  $\tilde{U}(r, \varphi)$  внутри поверхности  $\Sigma_R$  примет вид (зависимость от координаты  $z$  отсутствует):

$$\Delta \tilde{U} + k^2 \tilde{U} = 0 \text{ внутри } \Sigma_R \quad (1.1)$$

$$\tilde{U}(P)|_{P \in \Sigma} = 0 \text{ (ЭТ)} \quad \frac{\partial \tilde{U}(P)}{\partial n}|_{P \in \Sigma} = 0 \text{ (МТ)} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \tilde{U}(r, \varphi)}{\partial r} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \gamma_m(r) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{U}(r, \varphi') e^{-im\varphi'} d\varphi' \right\} e^{im\varphi} + \frac{\partial U_0(r, \varphi)}{\partial r} - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \gamma_m(r) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_0(r, \varphi') e^{-im\varphi'} d\varphi' \right\} e^{im\varphi} \quad (1.3)$$

Метод конечных элементов (МКЭ) [4] применяется для численного решения широкого класса краевых и начально-краевых задач математической физики в областях с различной геометрией, а также типами граничных условий. Эффективность МКЭ, как и у многих других численных методов, зависит от гладкости решения исходной задачи. В нашем случае сложной негладкой границы и при разрывных коэффициентах уравнений точность и скорость сходимости численного решения может существенно упасть. Для преодоления этой проблемы в данной работе предлагается метод конечных элементов с выделением асимптотического разложения решений в окрестности особых точек: выделяются окрестности особых точек, строятся аналитические решения внутри этих окрестностей в виде асимптотических разложений, полученные решения сшиваются с основным решением на сетке. Таким образом, особенности решения в особых точках переносятся в виде условий сопряжения на границы выделенных окрестностей. Рассмотрим применение изложенного метода к задаче дифракции плоской

волны на идеально проводящем теле, содержащим входящие углы, на которых могут возникать особенности градиента решения. Обозначим  $\Omega_c$  – рассматриваемое тело (цилиндр с кусочно-гладкой границей радиуса  $R_c$  – "ёжик") (Рисунок.1),  $\Omega$  – внешняя область. Выделим отдельно бесконечную точку, окружив ее окрестностью  $\Omega_o$  в виде внешней части круга радиуса  $R$ , и выделим окрестности всех входящих углов  $\{\Omega_n\}, n = 1 \dots N$ . Таким образом, с учётом вида падающей плоской волны и условий Зоммерфельда полное поле в  $\Omega_o$  представимо в виде:

$$U^{(0)}(r, \varphi) = e^{ikr} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} D_m^{(0)} H_m^{(1)}(kr) e^{im\varphi} \quad (2)$$

Окрестность входящего угла иголок "ежа"  $\Omega_n$  имеет вид сектора круга с раствором  $\omega_n > 3\pi/2$ . Решением уравнения Гельмгольца в  $\Omega_n$  с условием ограниченности в вершине угла и граничными условиями Неймана ( $\cos(v_{mn}\varphi)$ ) и Дирихле ( $\sin(v_{mn}\varphi)$ ) на лучах угла являются функции Бесселя нецелого порядка:

$$U^{(n)}(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} D_m^{(0)} J_{v_{mn}}(kr) \cos(v_{mn}\varphi) / \sin(v_{mn}\varphi), v_{mn} = \pi m / \omega_n \quad (3)$$

$\varphi$  отсчитывается от одного из лучей угла,  $D_m^{(0)}$  – произвольные коэффициенты.

С помощью асимптотических представлений (2-3) находится решение исходной задачи для уравнения Гельмгольца на сетке и в окрестностях особых точек. Отдельно для случаев электрического и магнитного типов. Программа реализована в пакете MATLAB. Полученная программа позволяет находить картину распределения полного и дифрагированного полей, а также диаграммы направленностей рассеяния для функций Борнниса электрического (ЭТ) и магнитного типов (МТ) в случаях без выделения (БВО) и с выделением (СВО) окрестностей углов (рисунок. 1).

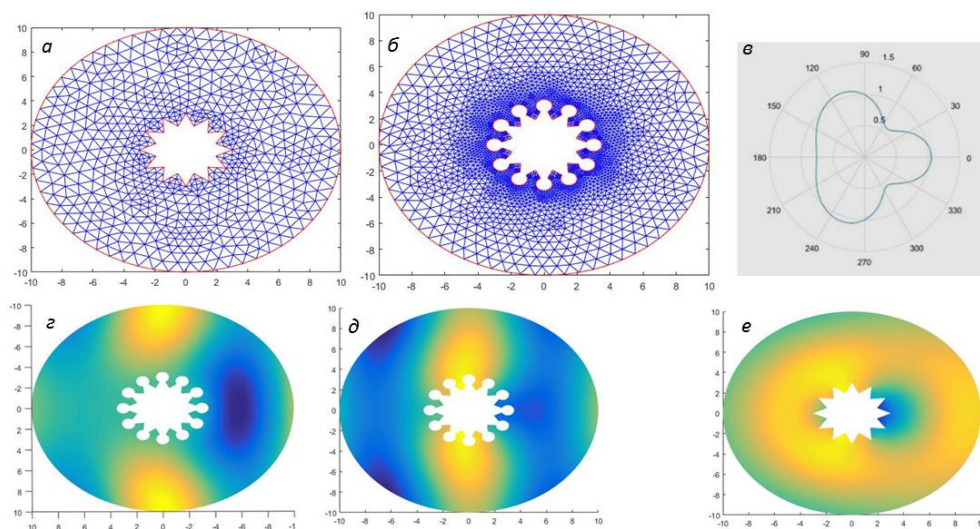


Рис. 1. Сетка БВО (а) и СВО (б). Диаграмма рассеяния для поля ЭТ БВО (в). Полные поля ЭТ (г) и МТ (д) СВО. Дифрагированное поле ЭТ БВО (е).

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 19.01.00593, 18-31-00377 мол\_а.

## ЛИТЕРАТУРА

*Труды школы-семинара «Волны-2019».*  
*Математическое моделирование в радиофизике и оптике*

1. Боголюбов А.Н. // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия, издательство. Изд-во Моск. ун-та (М.), 2018.
2. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. // Москва «ФИЗМАТЛИТ», 2004, 688 с.
3. Свешников А. Г., Могилевский И. Е. Избранные математические задачи теории дифракции. // Москва 2012, 239 с.
4. Калиткин Н. Н., Альшина Е. А. Численные методы в двух книгах.// Кн. 1: Численный анализ. Москва: «Академия», 2013, 304 с.

## Паттерный анализ характеристик аппроксимантов фракталоподобных многослойных систем с метаслоями

Ю.В. Рыжикова, Ю.В. Мухартова, С.Б. Рыжиков  
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,  
физический факультет  
ryzhikovaju@physics.msu.ru

В настоящее время проводятся многочисленные исследования, посвященные изучению свойств и возможностей практического использования разнообразных объектов с фрактальными свойствами [1-3]. В частности, многослойные структуры с метаслоями нашли применение при создании линзовых систем с высоким разрешением, узкополосных фильтров, широкополосных поглотителей, новых фрактальных антенн и других технических устройств.

Тем не менее, оптические характеристики аппроксимантов фракталоподобных многослойных систем с метаматериалами на данный момент изучены не достаточно хорошо. Свойственная многим из них фрактальность в значительной степени определяет их оптические свойства. При этом существует необходимость в определении степени влияния различных факторов на самоподобие их спектральных характеристик.

Применение аппроксимантов различной геометрии позволяет технически упростить процедуру получения структур с заданным набором оптических характеристик. Предварительные исследования [4-5] указывают на перспективность применения аппроксимантов для совершенствования новых средств оптической диагностики. Путем регистрации паттернов – отдельных элементов в характеристиках зондирующего излучения, появляется возможность идентифицировать многослойные системы с определенным типом симметрии и определять степень их структурных дефектов.

Цель настоящей работы состоит в оценке влияния различных изменений исследуемых многослойных структур с вставками из метаматериалов на устойчивость формы фрактальных паттернов их оптических спектров. Предполагается, что изменения могут быть внесены в многослойную систему переходом к модели аппроксимантов [5], изготовлением ряда слоев на основе широко применяющихся метаматериалов, характеризующихся разными дисперсионными соотношениями [5-8], а также варьированием принципа ее построения.

В работе рассматривается модель многослойных структур, составленных из двух типов слоев  $A$  и  $B$ . Слои  $A$  выполнены из метаматериала, который в определенном спектральном диапазоне характеризуется отрицательным показателем преломления. При этом слои  $B$  выполнены из пористого кварца с показателем преломления  $n_B$ .

Для построения аппроксимантов задается начальная структура на базе фракталоподобных числовых последовательностей  $S_l = \{A, B\}$ , где  $l$  – уровень генерации,  $A$  и  $B$  – составляющие элементы последовательности. Используемые последовательности определяют закон чередования элементов в первичной структуре. В многослойных структурах этот закон определяет распределение слоев с высоким и низким показателем преломления. Так, например, для систем  $m$ -боначки ( $m=2$ ) аппроксиманты  $A_l$  имеют вид (1):

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \left\{ \underbrace{B}_{S_0} \right\}^p, A_1 = \left\{ \underbrace{A}_{S_1} \right\}^p, A_2 = \left\{ \underbrace{AB}_{S_2} \right\}^p, \\
 A_3 &= \left\{ \underbrace{ABA}_{S_3} \right\}^p, A_4 = \left\{ \underbrace{ABAAB}_{S_4} \right\}^p, A_5 = \left\{ \underbrace{ABAABABA}_{S_5} \right\}^p, \dots, \\
 A_{l+1} &= \{S_l S_{l-1}\}^p,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $p$  – период аппроксиманта, то есть количество элементарных ячеек  $S_l$  в рассматриваемой многослойной структуре.

На рис. 1 представлены некоторые используемые дисперсионные зависимости диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$  и магнитной восприимчивости  $\mu$  для слоев из метаматериала.

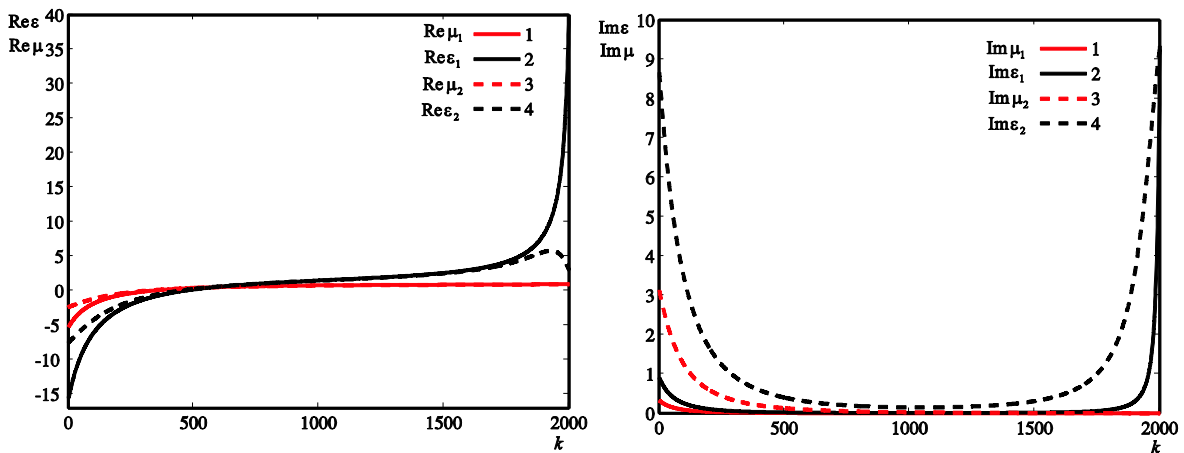


Рис. 1. Дисперсионные закономерности  $\varepsilon(k, \gamma), \mu(k, \gamma)$  при разных потерях  $\gamma$ . Функции 1,2 –  $\gamma = 0,05$  ГГц и 3,4 –  $\gamma = 0,9$  ГГц,  $k = 0 \dots 2000$  – коэффициенты дискретизации частоты  $f_k = 1.5(1 + 0.0033 \cdot k)$ .

Для расчетов спектров отражения и пропускания фракталоподобных многослойных структур применяется матричный подход с использованием логарифмического представления [3, 9]:  $r = -\ln(1 - R)$ , где  $r$  – приведенный коэффициент отражения,  $R$  – коэффициент отражения многослойной системы.

В результате проведенных расчетов было показано, что внесение метаматериалов с учетом их поглощения существенно видоизменяет форму структуры спектральных характеристик многослойных фракталоподобных систем. Исследование таких изменений проводилось с помощью паттерного анализа [10], основанного на фиксации и определении особенностей отдельных паттернов в спектральных характеристиках многослойных систем. Количественные оценки структурного соответствия фиксируемых паттерных образований выполнялись на основе корреляционного анализа.

На рис. 2 представлена зависимость приведенного коэффициента отражения  $r$  от поглощения  $\gamma$  многослойной системы  $m$ -боначки в случае  $m = 2$  с учетом дисперсионных эффектов. Из рис. 2 видно, что наличие поглощения сильно влияет на фракталоподобную структуру начальной спектральной характеристики, соответствующей  $\gamma = 0$ . При этом наблюдается ее сглаживание, и как следствие потеря фрактальных свойств спектра. При изменении  $\gamma$  наиболее устойчивой областью с точки зрения сохранения фрактальности является центральная часть спектра (паттерн *de*) вплоть до  $\gamma = 0,55$  ГГц.

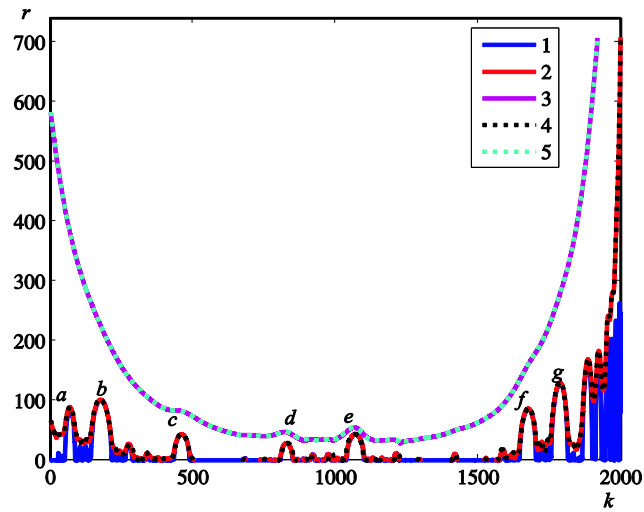


Рис. 2. Изменение спектральных характеристик многослойной системы  $m$ -боначки в случае  $m = 2$ ,  $n_B = 1,5$  при изменении коэффициента дискретизации частоты в пределах  $k = 0 \dots 2000$ . Здесь линия 1 соответствует первичной структуре с общим числом слоев  $J = 234$  при  $\gamma = 0$  ГГц, линии 2 и 3 – первичной структуре с поглощением  $\gamma = 0,05$  ГГц и  $\gamma = 0,9$  ГГц, линии 4 и 5 – аппроксиманту  $A_6 = \{S_6\}^{18}$  для систем 2 и 3, соответственно. Области  $ab$ ,  $bc$ ,  $de$ ,  $fg$  представляют собой паттерны.

Полученные результаты позволяют существенно дополнить диагностический метод [5, 10] на основе паттерного анализа применительно к аппроксимантам фракталоподобных структур.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 18-01-00723 а).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В.Ф. Кравченко, О.В. Кравченко “Конструктивные методы алгебры логики, атомарных функций, вейвлетов, фракталов в задачах физики и техники”. М.: Техносфера, 2018.
2. А.Н. Боголюбов, А.А. Петухов, Н.Е. Шапкина // Вестник Моск. Ун-та. Сер. 3. Физика, астрон. 2011. №2. С. 20.
3. Yu. Ryzhikova, Iu. Mukhartova, S. Ryzhikov // Journal of Physics: Conference Series. 2018. P. 012059.
4. Y. V. Ryzhikova, P. V. Korolenko, S. B. Ryzhikov // PIERs. 2017. P. 2742.
5. М.Г. Давыдова, П.В. Короленко, Ю.В. Рыжикова // Вестник Моск. Ун-та. Сер. 3. Физика, астрон. 2016. №4. С. 56.
6. A. Aghajamali et al. // Optik. 2014. V. 125. P. 839.
7. В.Г. Веселаго // УФН. 2003.Т. 173. С. 790.
8. Quan Xu et al. // Optik. 2010. V. 121. P. 1558.
9. Э.С. Путилин “Оптические покрытия”. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2010.
10. P.V. Korolenko, S.B. Ryzhikov, Yu.V.Ryzhikova // Physics of Wave Phenomena. 2013. V. 21. N 4. P. 256.



## Построение эффективных алгоритмов расчета прямоугольных волноводов с импедансными стенками

А.Н. Боголюбов, А.И. Ерохин, М.И. Светкин

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

[mihail-svetkin@mail.ru](mailto:mihail-svetkin@mail.ru)

Учет потерь в стенках при расчете сложных волноведущих систем является естественным продолжением более простой задачи с идеальными стенками. В случае отсутствия потерь поля в волноводе описываются с помощью ортонормированного базиса, построенного на основе собственных функций оператора Лапласа для поперечного сечения волновода с граничными условиями первого и второго рода [1], [2].

В случае граничных условий Щукина-Леонтовича [3]

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}] = -W[\mathbf{n}, [\mathbf{n}, \mathbf{H}]], \quad (1)$$

моды волновода становятся гибридными и не могут быть разделены на поля электрического и магнитного типов. В связи с этим для задачи с потерями приходится использовать различные приближенные методы или переходить к обобщенной постановке задачи, в которой граничные условия также выполняются в некотором обобщенном смысле [4].

В [5] предложен способ точного учета потерь в стенках, который заключается в построении специального базиса, позволяющего удовлетворить граничным условиям точно. Новый базис является классическим базисом, дополненным элементами, обеспечивающими выполнение граничных условий, при этом коэффициенты при них связаны с коэффициентами классического базиса системой линейных алгебраических уравнений. Коэффициенты при стандартных базисных функциях являются решением системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с жесткой матрицей, что снижает устойчивость алгоритма. Применение специальных методов, например метода направленной ортогонализации [6], позволяет повысить устойчивость алгоритма, но не решает проблему полностью.

В данной работе рассматривается построение системы базисных функций при малом импедансе, являющихся обобщением классического базиса для регулярного волновода. Они удовлетворяют уравнениям Максвелла точно, с достаточной высокой точностью удовлетворяют граничным условиям и при этом позволяют избежать появления жестких матричных задач.

Рассмотрим задачу для электромагнитного поля, описываемого уравнениями Максвелла, в бесконечном волноводе прямоугольного сечения с граничными условиями (1). Эта задача обладает симметрией поворота вокруг осей  $x$  и  $y$  волновода, что дает 4 типа решений. Не ограничивая общности, рассмотрим решение вида:

$$\begin{aligned} E_x &= C^{(ex)} \cos(px) \sin(qy) \exp(i\gamma z), \\ E_y &= C^{(ey)} \sin(px) \cos(qy) \exp(i\gamma z), \\ H_x &= C^{(hx)} \sin(px) \cos(qy) \exp(i\gamma z), \\ H_y &= C^{(hy)} \cos(px) \sin(qy) \exp(i\gamma z), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $p, q, \gamma \in \mathbb{C}$ . Решения с другими типами четности строятся аналогично.



Подстановка (2) в систему уравнений Максвелла приводит к задаче на собственные значения относительно параметра  $\gamma$  и столбца коэффициентов при полях  $[C^{(ex)}, C^{(ey)}, C^{(hx)}, C^{(hy)}]^T$ . Для произвольной пары  $p, q$  эта задача имеет две пары собственных векторов. Первая пара соответствует модам, распространяющимся в положительном направлении вдоль оси волновода, вторая – в отрицательном. Рассмотрим случай моды, распространяющейся в положительном направлении. Каждая пара отвечает одному собственному значению, поэтому их линейная комбинация также является собственным вектором. Таким образом, при заданных параметрах  $p, q$  множество решений, удовлетворяющих уравнениям Максвелла (8) примет вид

$$C(p, q) = V(p, q)S \quad (3)$$

где  $S$  – произвольный столбец высоты 2,  $V(p, q, k)$  - матрица, составленная из пары собственных векторов.

Подстановка решения (2) с коэффициентами (3) в граничные условия (1) приводит к переопределенной системе уравнений относительно столбца  $S$ ,  $\|S\| = 1$ :

$$Q(p, q)S = 0, \quad (4)$$

где  $Q$  – матрица размером  $4 \times 2$ . Таким образом, задача сводится к отысканию пары  $p, q$  и ненулевого столбца  $S$ , для которых выполнено (4).

В общем случае, задача (4) не имеет решения ни при каких  $p, q$ , поэтому будем искать такие  $p, q$ , при которых граничные условия будут выполнены приближенно. Для этого рассмотрим невязку  $\delta(p, q)$  (4)

$$Q(p, q)S = \delta(p, q). \quad (5)$$

Будем искать такие  $p, q$  и столбец  $S$ , при которых невязка достигает минимума. Эта задача эквивалентна поиску минимума наименьшего собственного значения квадратной эрмитовой матрицы  $U(p, q) = Q^*(p, q)Q(p, q)$ .

Поскольку  $W$  в граничном условии Шукина-Леонтовича предполагается малым, то  $p$  и  $q$  ищутся в окрестности  $p, q$  для идеального волновода.

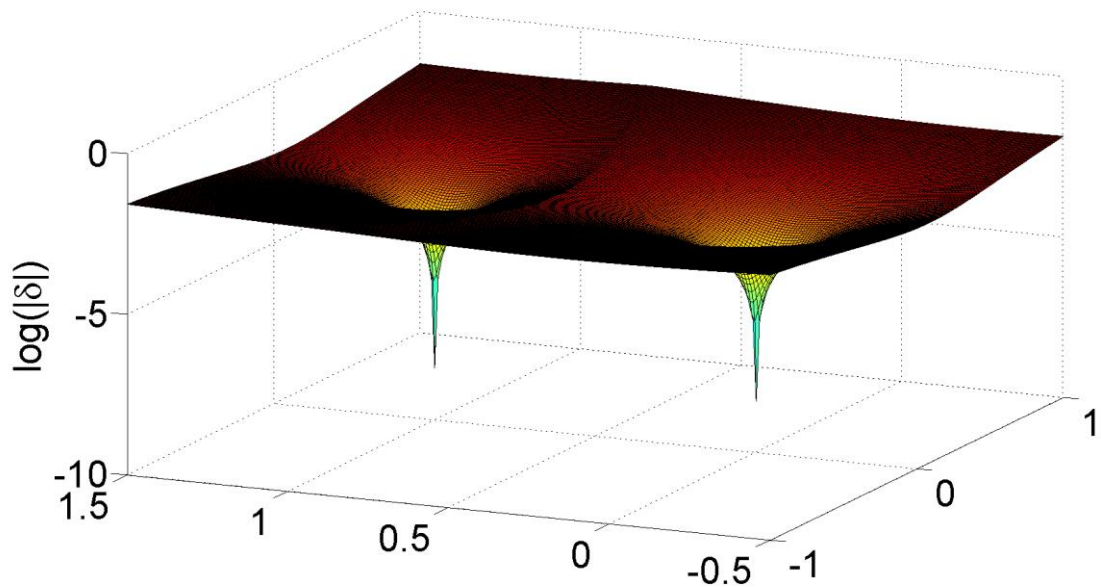


Рис. 1. Минимумы невязки  $\delta(p, q)$  для мод  $TE_{11}$  и  $TM_{11}$ .

На рис. 1 представлена комплексная плоскость, проходящая через два локальных минимума в окрестности точек  $p, q$ , соответствующих модам  $TE_{11}$  и  $TM_{11}$  для импеданса  $W = 0,001(1 - i)$ . В данном случае минимум нормы невязки достигает значения порядка  $10^{-9}$ .

С помощью предложенного метода были рассчитаны дисперсионные характеристики бесконечного импедансного прямоугольного волновода (рис. 2).

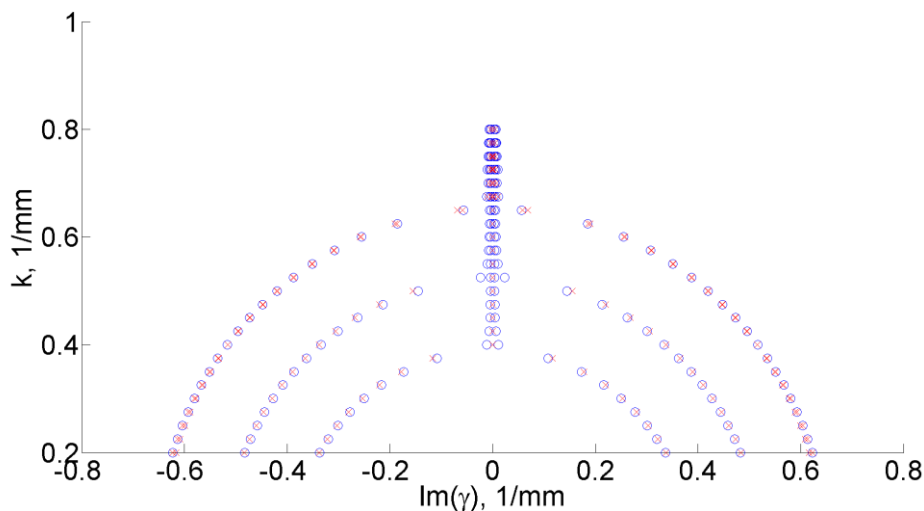


Рис. 2. Мнимая часть дисперсионной характеристики для идеального волновода (красный) и импедансного (синий).

Рассмотрен способ построения решений, которые удовлетворяют уравнениям Максвелла точно и приближенно условиям Щукина-Леонтовича при малом импедансе. Поскольку предложенным способом моды волновода с потерями выделяются независимо друг от друга, их использование при описании полей на участках постоянного сечения для волноводов сложной формы позволит значительно уменьшить жесткость итоговых матричных задач.

Работа выполнена при поддержке грантов №18-31-00377 мол\_а, 19-01-00593.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А.С. Ильинский «Математические модели электродинамики» М.: Высшая школа, 1991.
2. А.Н. Тихонов // ЖТФ. 18. С. 959. (1948).
3. А.Г. Свешников «Избранные математические задачи теории дифракции» М.: Физический факультет МГУ, 2012.
4. А.С. Ильинский «Колебания и волны в электродинамических системах с потерями» М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.
5. А.И. Ерохин и др., Учен. зап. физ. фак-та Моск. ун-та. 2016. № 6.
6. А.А. Быков и др. // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1979. – Т. 19. – №. 3. – С. 631-639.
7. Л.А. Вайнштейн «Электромагнитные волны» М.: Радио и связь, 1988.

## Статистические характеристики квантовых поляризационных состояний, формируемых в РДС-кристаллах: математическое моделирование

А.В. Белинский\*, Р. Сингх\*\*

\*Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 119991, ГСП-1, Москва

Эл. почта: \* [belinsky@inbox.ru](mailto:belinsky@inbox.ru) \*\* [ranjit.singh@mail.ru](mailto:ranjit.singh@mail.ru)

Рассмотрены вырожденный параметрический процесс  $\omega_o + \omega_e = 2\omega_e$  и суммарная генерация  $2\omega_e + \omega_o = 3\omega_e$  оптических волн (где  $(o)$  – обыкновенная,  $(e)$  – необыкновенная) внутри регулярной доменной структурой (РДС) кристалла с квадратичной нелинейностью. Развита квантовая теория описания статистических характеристик поляризационных состояний света для РДС-кристалла. Впервые получены результаты квантового описания для больших длин взаимодействия с помощью численного метода. Установлено, что степень поляризации можно управлять с помощью дисбаланса интенсивностей мод на частотах  $\omega_o$  и  $\omega_e$ : уменьшения среднего количества фотонов в одной и его увеличения в другой.

### Нелинейные процессы в РДС-кристалле

Рассмотрим 4 плоские монохроматические моды с частотами  $\omega_o, \omega_e, 2\omega_e, 3\omega_e$  и характеризующиеся операторами уничтожения (рождения) фотона  $\hat{a}_{1o} (\hat{a}_{1o}^+), \hat{a}_{1e} (\hat{a}_{1e}^+), \hat{a}_{2e} (\hat{a}_{2e}^+)$  и  $\hat{a}_{3e} (\hat{a}_{3e}^+)$ . Эти моды коллинеарно распространяются внутри РДС-кристалла с квадратичной нелинейностью. Операторы удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям:  $[\hat{a}_{jp}, \hat{a}_{kp}^+] = \delta_{jp, kp}$  ( $j, k = 1, 2, 3; p = o, e$ ). Одновременно происходят два процесса: параметрический процесс (тип II) и преобразование частоты вверх за счет суммирования частот субгармоник с частотой накачки [1]:

$$\omega_o + \omega_e = 2\omega_e, \quad (1.a)$$

$$\delta k_1 = k_{2e} - k_{1o} - k_{1e} + m_1 G_1 = \Delta k_1 + m_1 G_1,$$

$$\omega_o + 2\omega_e = 3\omega_e, \quad (1.b)$$

$$\delta k_2 = k_{3e} - k_{1o} - k_{2e} + m_2 G_2 = \Delta k_2 + m_2 G_2,$$

где  $k_{jp}$  – абсолютные значения волновых векторов мод с частотами  $\omega_{jp}$ ;  $\Delta k_q$  – волновые расстройки соответствующих процессов для однородного кристалла;  $q = 1, 2$ ;  $m_q = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$  – порядки квазисинхронизма;  $G_q = 2\pi/\Lambda_q$  – волновое число (модуль «псевдовектора» решетки доменной структуры с периодом  $\Lambda_q$ ). Выполнение условия квазисинхронизма для процессов (1.a), (1.b) соответствует  $\delta k_q = 0$ . Одновременный квазисинхронизм в одной и той же доменной структуре  $G = G_1 = G_2$  для двух (1.a), (1.b) процессов можно реализовать, например, при различных порядках квазисинхронизма  $m_q$  или при разных длинах когерентности  $L_q = \pi/\Delta k_q = \Lambda_q/2m_q$  в РДС-кристалле LiNbO<sub>3</sub> [1].

Гамильтониан взаимодействия рассматриваемых процессов имеет вид [1]:

$$\hat{H}_{int} = \hbar(\gamma_1 \hat{a}_{1o}^+ \hat{a}_{1e}^+ \hat{a}_{2e} + \gamma_2 \hat{a}_{1o} \hat{a}_{2e} \hat{a}_{3e}^+) + H. c. , \quad (2)$$

где  $\hbar$  – постоянная Планка,  $\gamma_{1,2}$  – коэффициенты нелинейного взаимодействия, H.c. – эрмитово сопряжение. Это приближение плоских монохроматических мод при коллинеарном взаимодействии. Поперечная пространственная структура пучков при этом полагается однородной.

Операторные уравнения движения по длине взаимодействия  $z$  внутри РДС-кристалла в представлении Гейзенберга описываются динамическим уравнением

$$\frac{d\hat{a}_{jp}}{dz} = [\hat{a}_{jp}, \hat{H}_{int}] .$$

Введем безразмерные нелинейные коэффициенты связи  $\xi = \gamma_2/\gamma_1$ . Тогда гамильтониан взаимодействия (2) принимает следующий вид:

$$\hat{H}'_{int} = \hbar(\hat{a}_{1o}^+ \hat{a}_{1e}^+ \hat{a}_{2e} + \xi \hat{a}_{1o} \hat{a}_{2e} \hat{a}_{3e}^+) + H. c. , \quad (2.a)$$

Введем приведенную длину взаимодействия  $\zeta = \gamma_1 z$ , диагонализуем гамильтониан взаимодействия (2.a) с помощью метода диагонализации [2] и найдем его собственные векторы и собственные значения.

### Статистические характеристики чисел фотонов и операторов Стокса

Для изучения поляризационных характеристик мод вычислим, как это принято [1,3-5,7-10], значения операторов Стокса и их дисперсий:

1. среднее количество фотонов  $N_{jp}(\zeta) = \langle \hat{a}_{jp}^+ (\zeta) \hat{a}_{jp} (\zeta) \rangle$ ,
2. коэффициенты корреляции фотонов между разными модами

$$g_{1o1e}^{(2)}(\zeta) = \frac{\langle \hat{a}_{1o}^+(\zeta) \hat{a}_{1o}(\zeta) \hat{a}_{1e}^+(\zeta) \hat{a}_{1e}(\zeta) \rangle}{N_{1o}(\zeta) N_{1e}(\zeta)} ,$$

3. средние значения операторов Стокса:

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_{0,1}(\zeta) \rangle &= \langle \hat{a}_{1o}^+(\zeta) \hat{a}_{1o}(\zeta) \pm \hat{a}_{1e}^+(\zeta) \hat{a}_{1e}(\zeta) \rangle, \\ \langle \hat{S}_2(\zeta) \rangle &= \langle \hat{a}_{1o}^+(\zeta) \hat{a}_{1e}(\zeta) + \hat{a}_{1e}^+(\zeta) \hat{a}_{1o}(\zeta) \rangle, \\ \langle \hat{S}_3(\zeta) \rangle &= i \langle \hat{a}_{1e}^+(\zeta) \hat{a}_{1o}(\zeta) - \hat{a}_{1o}^+(\zeta) \hat{a}_{1e}(\zeta) \rangle, \end{aligned}$$

4. дисперсию операторов Стокса  $\langle \Delta \hat{S}_{1,2,3}^2(\zeta) \rangle = \langle \hat{S}_{1,2,3}^2(\zeta) \rangle - \langle \hat{S}_{1,2,3}(\zeta) \rangle^2$ ,
5. степень поляризации взаимодействующих мод с помощью формулы:

$$PoD(\zeta) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^3 \langle \hat{S}_k(\zeta) \rangle^2}{\sum_{k=1}^3 \langle \hat{S}_k^2(\zeta) \rangle}} .$$

Расчеты проводились для следующих случаев:

1. когда  $\xi = 0,6$  и при этом на входе ( $\zeta = 0$ ) РДС-кристалла моды  $2e$  и  $3e$  полагались в вакуумном состоянии  $|0\rangle$ , а накачка  $1o$ ,  $1e$  – в когерентном состоянии со средним числом фотонов  $|\alpha_{1o}|^2 = 3$  и  $|\alpha_{1e}|^2 = 3$  и фазой  $\varphi_{1o,1e} = \pi/3$ , т.е.,  $|3\rangle|3\rangle|0\rangle|0\rangle$ ,
2. когда  $\xi = 0,6$  и при этом на входе ( $\zeta = 0$ ) РДС-кристалла моды  $2e$  и  $3e$  полагались в вакуумном состоянии  $|0\rangle$ , а накачка  $1o$ ,  $1e$  – в когерентном состоянии со средним числом фотонов  $|\alpha_{1o}|^2 = 2$  и  $|\alpha_{1e}|^2 = 3$  и фазой  $\varphi_{1o,1e} = \pi/3$ , т.е.,  $|2\rangle|3\rangle|0\rangle|0\rangle$ .

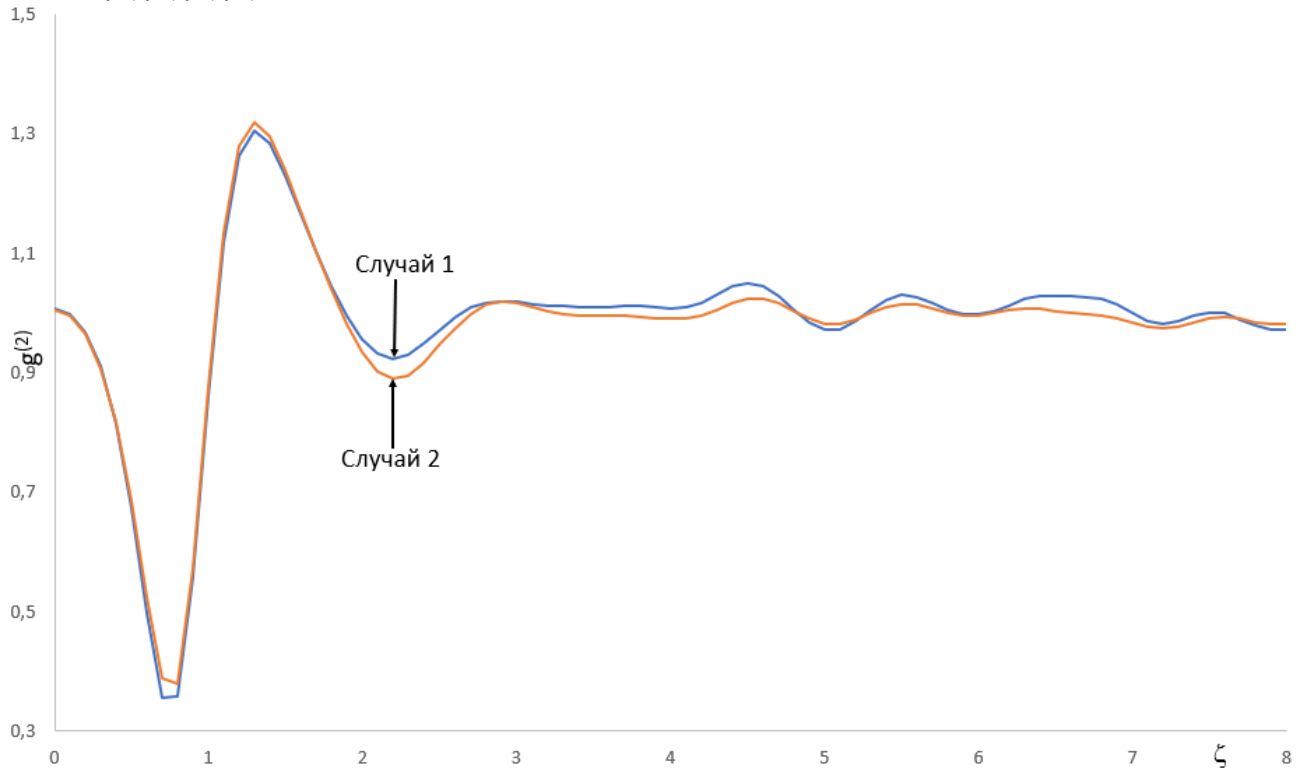


Рис. 1. Коэффициент корреляции 2-го порядка мод  $1o$ ,  $1e$  для случаев 1 и 2.

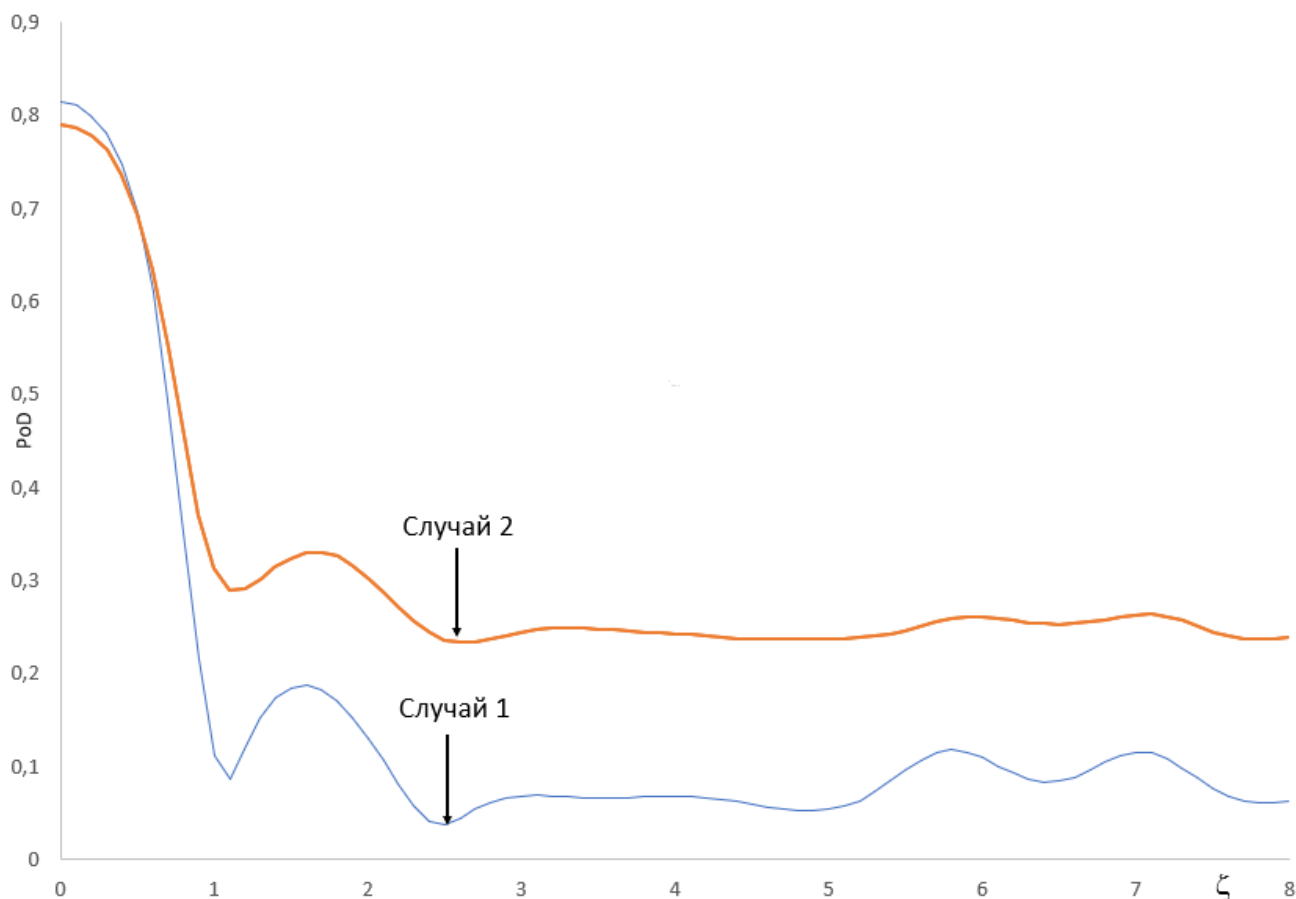


Рис. 2. Динамика степени поляризации мод  $1o$ ,  $1e$  для случаев 1 и 2.

## Результаты и обсуждения

Рис.1 иллюстрирует динамику значений коэффициентов корреляции или, другими словами, фактора  $g^{(2)}$ , внутри РДС-кристалла мод  $1o$ ,  $1e$ . Видно, что кривые  $g^{(2)}$  осциллируют по мере возрастания длины взаимодействия и стремятся к значению 1. Для качественной обработки фантомных изображений можно использовать дополнительные поляризационные степени свободы света помимо регистрации фототоков в коррелированных модах  $1o$ ,  $1e$ , как это предложено в [10]. Правда при этом они должны генерироваться из вакуума, а не быть накачкой.

На рис. 2 видно, что степень поляризации почти стремится к нулю по мере возрастания приведенной длины взаимодействия. Ухудшение степени поляризации между модами  $1o$  и  $1e$  возникает за счёт неопределенности разности фаз между модами в процессе распространения внутри нелинейной среды.

Из сопоставления случаев 1 и 2 на рис. 2 ясно, что степенью поляризации мод можно управлять дисбалансом входных интенсивностей: уменьшения среднего количества фотонов в одной моде и увеличения в другой. Однако, возможности такого управления ограничены. В любом случае увеличение длины кристалла ведет к деградации квантовой запутанности по поляризациям. Поэтому, учитывая полученные нами результаты, необходимо работать с как можно более тонкими кристаллами.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №18-01-00598А).

ЛИТЕРАТУРА

1. V. G. Dmitriev, R. Singh. International Journal of Quantum Information, 2003, vol. 1, no. 3, p. 403-416.
2. А. В. Белинский, Р. Сингх. Одновременное нелинейное преобразование света в РДС-кристаллах // Квантовая электроника. 2018, т. 48, № 7, с. 611–614.
3. Д. А. Калашников, В. П. Карасев, С. П. Кулик, А. А. Соловьев, Г. О. Рытиков. Письма в ЖЭТФ, 2008, т. 87, вып. 1, с. 66-71.
4. А. С. Чиркин, А. А. Орлов, Д. Ю. Паращук. Квантовая электроника, 1993, т. 20, № 10, с. 999–1004.
5. А. В. Масалов, В. П. Карасев. Оптика и спектроскопия, 1993, т. 74, № 5, с. 928–936.
6. Квантовое изображение. / Под ред. М.И. Колобова (ориг.), под ред. А.С. Чиркина (перевод). М.: Физматлит. 2009. 328 с.
7. В. П. Карасев. Письма в ЖЭТФ, 2006, т. 84, вып. 12, с. 759-763.
8. А. С. Чиркин. Оптика и спектроскопия, 2015, т. 119, № 3, с. 397–402.
9. A. Luis, “Polarization in Quantum Optics”, Progress in Optics, v. 61, ed. Visser T., Elsevier Science BV, 2016, p. 283–331.
10. А. С. Чиркин. Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики, 2016, т. 103, № 4, с. 309-313.
11. Е. Ф. Ищенко, А. Л. Соколов. Поляризационная оптика. Изд. 3-е. Москва: Физматлит, 2019. 576 с.



## Аподизационные задачи выделения скрытых объектов

Е.Н. Терентьев, И.И. Фаршакова, И.Н. Приходько

С аподизацией мы будем связывать задачу выбора дискретной модели Аппаратной Функции (АФ)  $O$  с обратимой  $R=O^{-1}$  и малой нормой обратной  $Nor(R)=\|R\|$ . Аподизационные постановки задач сверхразрешения, выделения объектов возникают при анализе Характеристик Обстоятельств (ХО) моделей АФ  $O$ . Приводятся примеры с демонстрацией ХО АФ  $O$  с обычными обращениями и без использования априорной информации о виде решений.

### Введение

Если  $Nor(R)$  большие, то мы вынуждены уменьшать  $Nor(pR)$  путем увеличения обусловленности  $DIAP$  для получения приемлемых  $Nor(pR)$ . Заметим, что  $Nor(pR)$  – это реакции на шум (или коэффициент усиления  $\sigma$  белого шума,  $Nor(pR)*\sigma$ ), определяющие точность решения задачи обращения при наличии аддитивного белого шума.

### Основные понятия

Общая задача по обусловленному (по  $DIAP$ ) выбору АФ  $pO=pR^{-1}$  ставится как задача на минимум:

$$\min_{LO} \{ \|pR\| \mid Err(pO) \leq err \}, \quad LO = \{ pO \mid [Loc, dx, DIAP] \} \quad (1)$$

с построением Характеристикой Адекватности (ХА) дискретной модели АФ  $pO$  [2,3]

$$XA = \{ x=Nor(pR), y=Err(pO), z=\Pi(pR*O) \} \quad (2)$$

$Iz=10^{-13}$  – мантисная ошибка или инструментальный ноль. В связи с этим ограничением по ошибке рассмотрим вариант ХА АФ  $zO$  учитывая  $Iz$  обращение двумерной МПФ  $M(O)$  (в записи без индексов):

$$M(zR) = \begin{cases} 1/M(O), & \text{for all } |M(O)| > Iz \\ M(O) \end{cases} \quad (3)$$

$$XA = \{ x=Nor(zR), y=Err(zO), z=\Pi(zR*O) \} \quad (4)$$

Заметим, что если значение индикатора обратимости  $\Pi(zR*O)=1$ , то имеет место обращение  $zR=R=O^{-1}$ . Если  $\Pi(zR*O)<1$ , то имеем неполное  $Iz$  обращение АФ  $O$  в  $zR$ .

Конечно, аподизации АФ  $O$  предшествует построение Характеристики Обстоятельств (ХО) дискретных моделей АФ  $zO$  для фиксированной непрерывной АФ  $parO$ :

$$XO = \{ x=Dx, y=Nor(zR), z=Loc \} \quad (5)$$

В ХО (5) Loc – массив длин областей определения непрерывной АФ parO, а Dx – массив шагов dx оцифровки АФ parO. В примерах ХО АФ zO не полную обратимость отмечаем звездочкой \* внутри символа O, см. Рис. 1-2.

### Примеры ХО АФ O

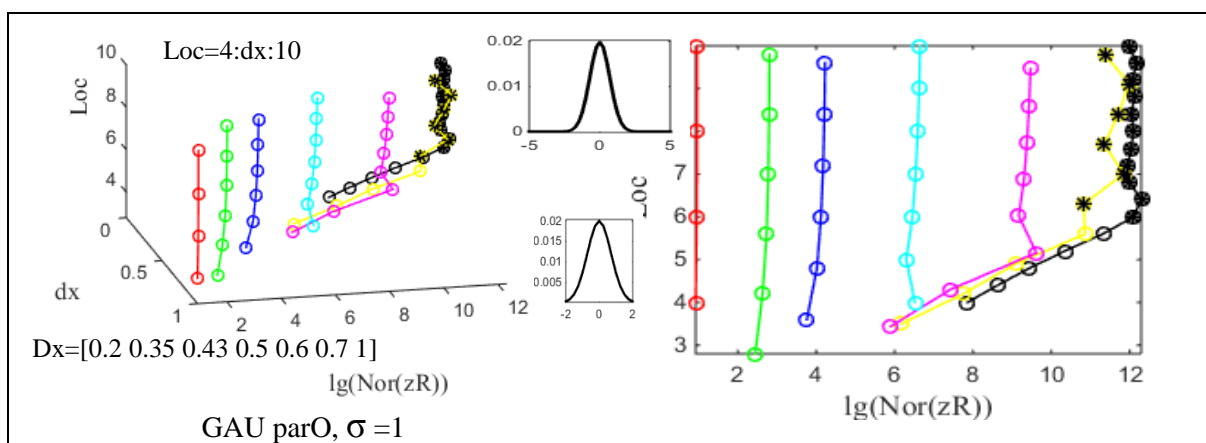


Рис. 1. ХО АФ parO – Гауссоида, звездочкой \* выделены необратимые варианты.

В грубых сетках оцифровки имеет место обращение АФ O с малыми нормами Nor(R). В сетках с dx=0.2 и 0.35 за Loc=6 теряем обратимость, см. звездочки \*.

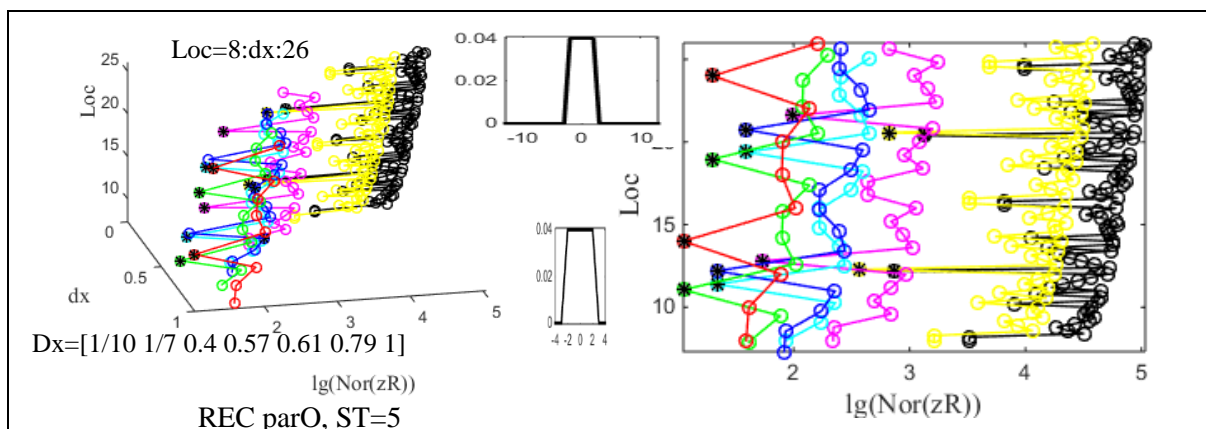


Рис. 2. ХО АФ parO Прямоугольник с ST=5.

При малых dx из Dx имеет место обратимость с большими Nor(R). С грубыми сетками оказалось, что имеют место сложные ситуации. Обратимые работающие варианты надо искать. Далее рассмотрим варианты сложных многолучевых систем, но с упрощенным вариантом ХО в сетке с dx=1 и Loc=[N] – размеры области определения изображения.

### Обратимый случай пяти лучевой АФ O=50 с минимальной Nor(R)

5-ти лучевая АФ O=50 обратима с малой нормой Nor(R)~24.2 при N=116. Если N другое, то можно настроить Nor(pR) по обусловленности DIAP (1,2) с ошибкой Err(pO).

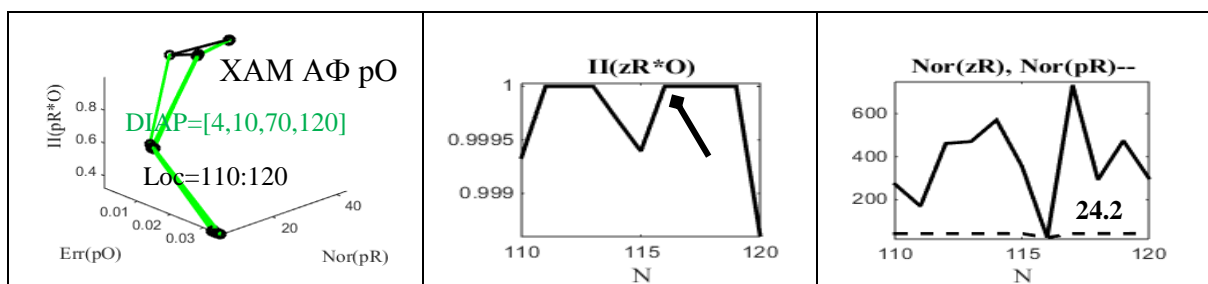
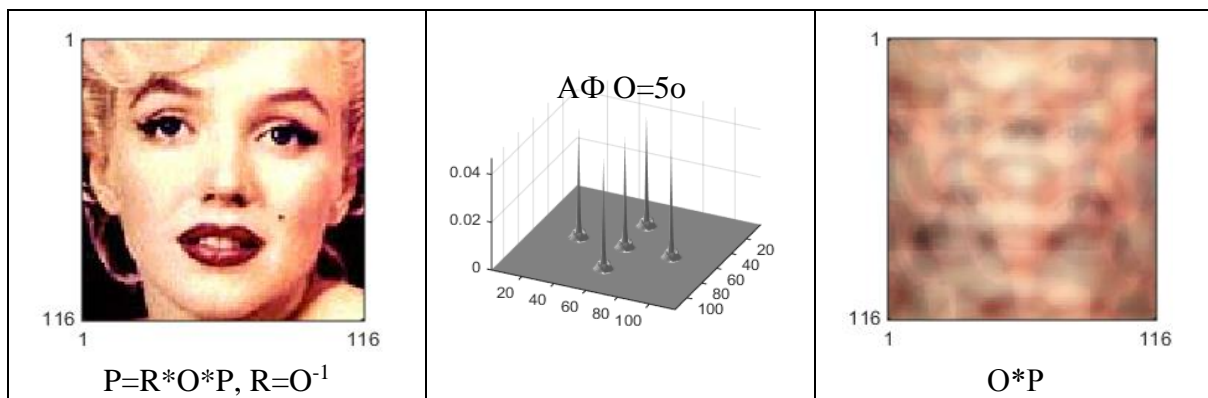


Рис. 3. ХАМ АФ O=5o

**Случай четырех лучевой АФ O=4o с необратимой O и минимальной Nor(zR)**

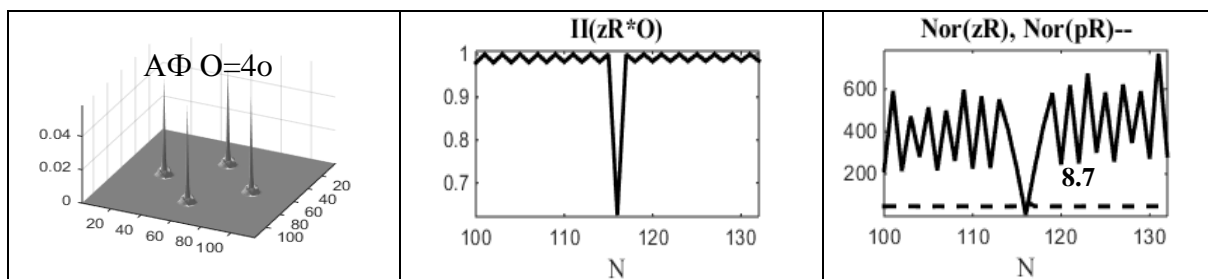
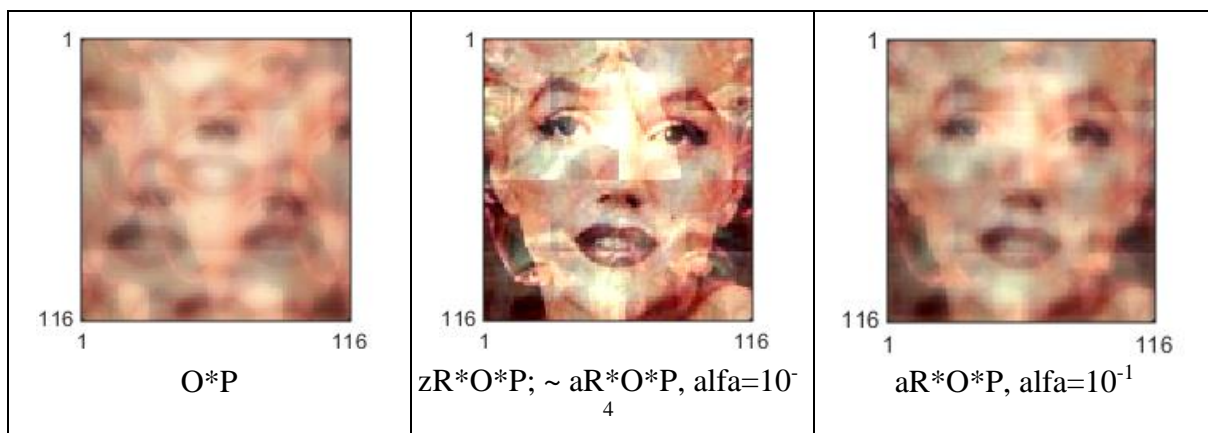


Рис. 4. ХАМ АФ O=4o

**Обсуждение.** ХО показывают, что в сложном АФ O=5o решение по компенсации искажений получается обычным обращением с малой  $Nor(R) \sim 24.2$ , априорная информация о виде решений [1] – не нужна. В необратимом случае АФ O=4o априорная информация – не нужна потому, что из-за нее увеличивается ошибка решения и падает

разрешение. Все получается аналогично, так же при  $N=116$  в еще более сложных случаях: для 9-ти (обратимость) и 8-ми (необратимость) лучевых систем.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А.Н. Тихонов, М.В. Уфимцев “Статистическая обработка результатов эксперимента” изд. Московского университета, 1988.
2. Е.Н. Терентьев, Н.Е. Терентьев//*ИЗВЕСТИЯ РАН, СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2015, том 79, № 12, с. 1633-1637.*
3. Terentiev, E.N. and Terentiev, N. E.//*ISSN 1062-8738, Bulletin of the Russian Academy of Science. Physics, 2015, Vol.79, No 12, pp.1427-1431, DOI 10.3103/S1062873815120229*
4. Е.Н. Терентьев, Н.Е. Терентьев, Ю.А. Пирогов, И.И. Фаршакова//*УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА, 9 с., №6, 1761005(2017)*

## Задачи анализа объектов в изображениях

Е.Н. Терентьев, А.Д. Дьяконова, И.Д. Кузнецов

Методы морфологического анализа и анализа форм градиентных полей используются в задачах анализа объектов в изображениях. Рассматриваются примеры задач по локализации меток корпусов Интегральных Схем (ИС) и задачи локализации Зрачков Глаз (ЗГ) в изображении лица человека.

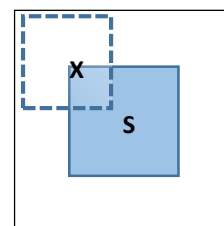
### Введение

Распознавание лиц по изображениям в настоящее время является актуальным. В методах распознавания лиц принято выделять “черты лица” с вычислением точного расстояния между ними в единице расстояния между ЗГ.

В процессе автоматизации производства Интегральных Схем необходимо в изображении корпусов ИС выделять метку на корпусе. В работе методы анализа формы градиентных полей изображений, применены к оцениванию положения ЗГ в изображении лица и методы морфологического анализа использованы в задаче локализации метки на корпусе ИС.

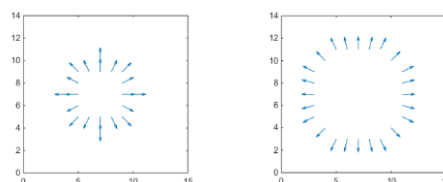
### Метод анализа формы градиентных полей, постановка задачи

- 1) Считываем входное изображение  $A$
- 2) Рассчитываем векторное градиентное поле  $f = \text{grad } A$
- 3) Проецируем найденное поле на направления нашего шаблона  $X$  с переменным радиусом; получаем сигнальную  $f_c$  и шумовую  $f_s = f - f_c$  компоненты



- 4) Рассчитываем отношение сигнал/шум  $SNR(f | X) = \|f_c\|^2 / \|f_s\|^2$  в каждой точке области
- 5) Находим координаты  $(x_0, y_0)$  искомого объекта и параметры  $(r_0, d_0)$  шаблона, решив задачу на максимум:  
 $(x_0, y_0, r_0, d_0) = \text{ArgMax} SNR(f | X)(x, y; r, d),$   
 $(x, y) \in S, (r, d) \in PX$

Переменный шаблон  $X(x, y; r, d)$



### Локализация и определение размера зрачка правого глаза

В данном примере изображения лица зрачки глаз разного размера, требуется оценить положение глаз и размеры ЗГ.

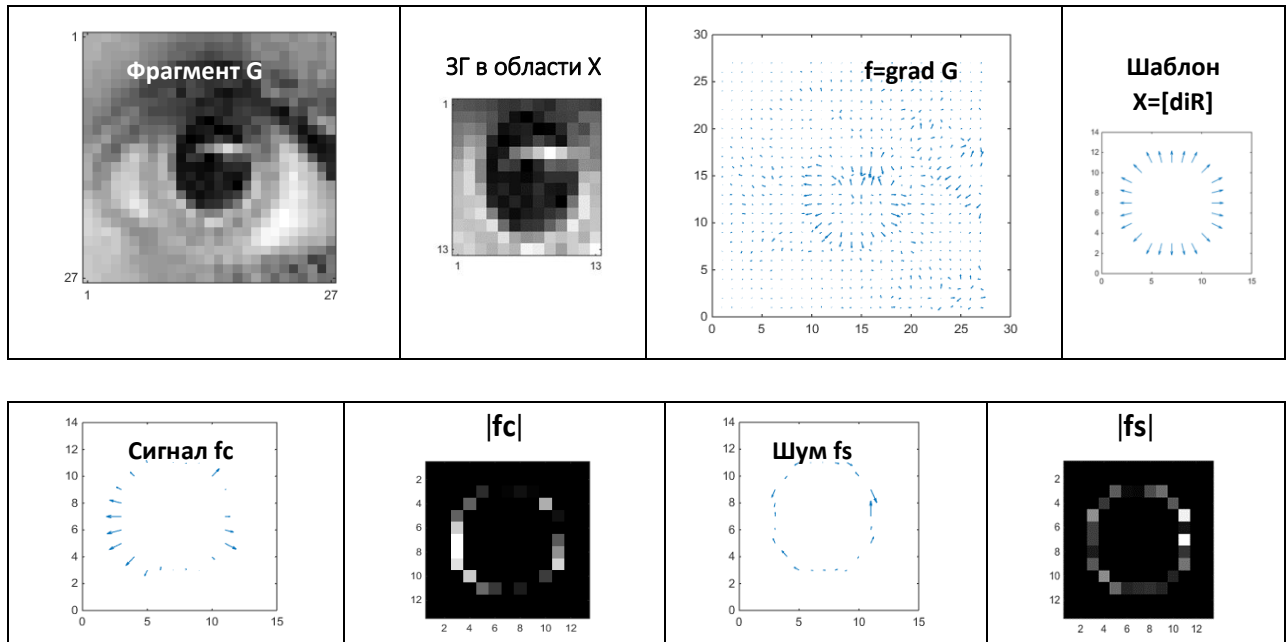


Рис. 1. Использование переменного шаблона для оценивания положения и размера ЗГ

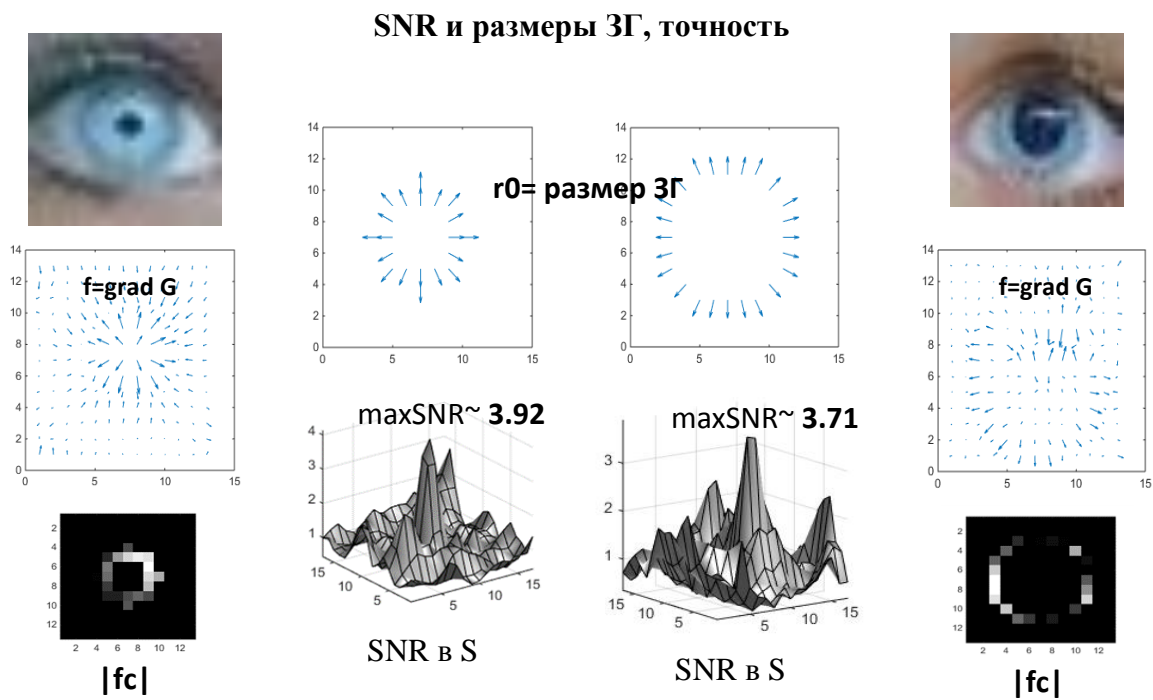


Рис. 2. Результаты оценивания размеров ЗГ, точность.

Точность оценивается размером пятна максимума функции SNR. Для размеров ЗГ в нашем случае получаем точность порядка 1-1.5 пиксела.

### Локализация метки на корпусе ИС

При контроле производства Интегральных Схем (ИС) в изображении ИС в одном из углов ИС требуется выделить метку на корпусе. Эта задача решалась методами

морфологического анализа изображений [5]. Положение метки в изображении ИС выбирается по максимальному значению функции:  $\max \text{SNR} = \max \|Pf\|^2 / \|f - Pf\|^2$ , [5,7]

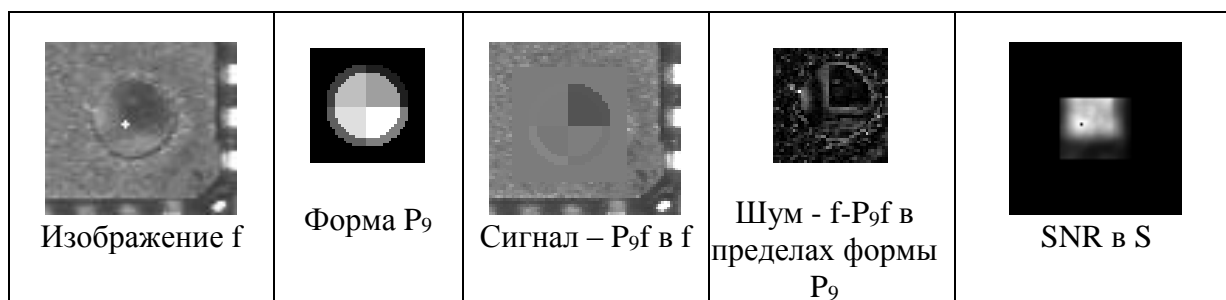


Рис. 3. Пример  $f$  входного углового изображения с меткой, формы метки  $P_9$ , изображения “сигнала”  $P_9f$  в пределах  $f$ , “шума” -  $f - P_9f$  в пределах формы  $P_9$  и значений SNR в области сканирования  $S$

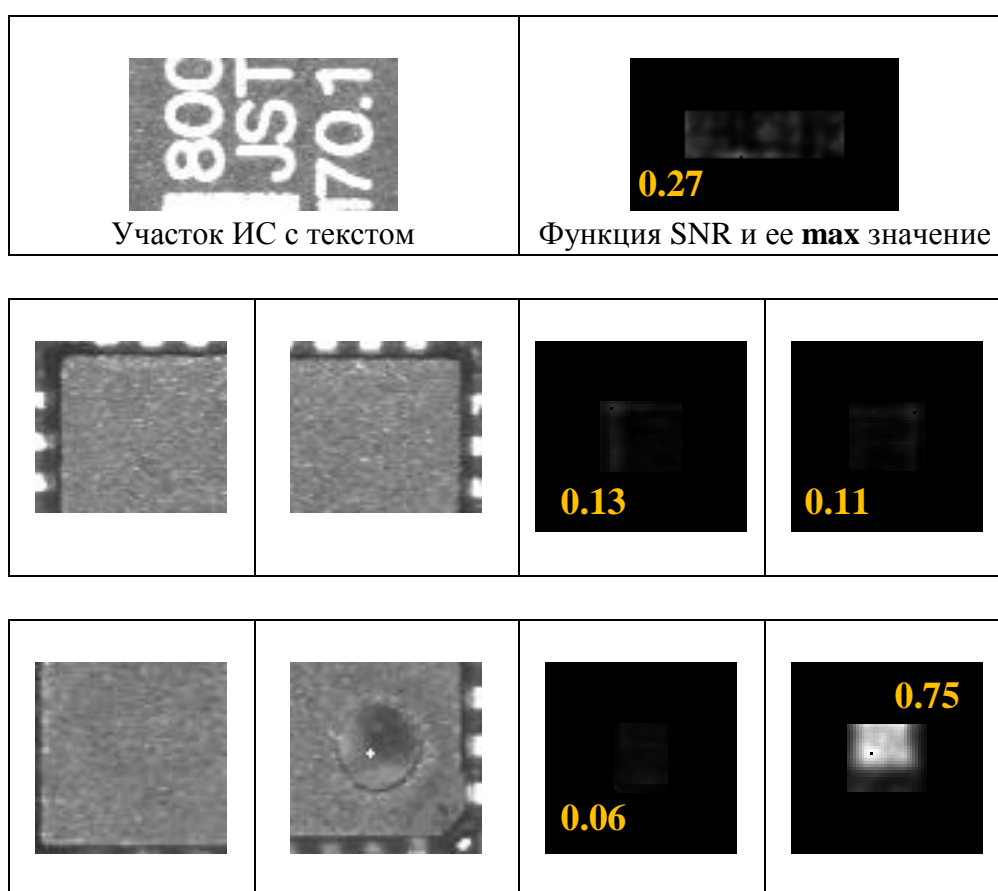


Рис. 4. Изображения частей корпуса ИС и функции SNR с  $\max \text{SNR}$  и выбор угла ИС с меткой.

**Выводы.** Использование метода градиентных полей, более предпочтительно, так как позволяет оценивать положения ЗГ с точностью до 1-1.5 пиксела. Требуется провести сравнительный анализ точности методов оценивания положения объектов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Терентьев Е.Н., Терентьев Н.Е.//ПРОЦЕССЫ В ГЕОСРЕДАХ, №4(9), с.355-362 (2016).

2. Е. Н. Терентьев, N. E. Shilin–Terentyev, И. Н. Приходько, И. И. Фаршакова //УЗФФ Московского Университета, (5):1850308–10, 2018.
3. E. N. Terentiev, I. García-Magariño, N. E. Shilin-Terentyev, I. N. Prikhodko, I. I. Farshakova//Information and Computer Security (2018), doi:10.24294/ics.v1i1.1025 ( <http://systems.enpress-publisher.com/index.php/ICS/article/view/1025>).
4. E. N. Terentiev, I. N. Prikhodko, I. I. Farshakova, I. D. Kuznetsov, N. E. Shilin-Terentiev//Springer Proceedings in Earth and Environmental Sciences. Springer, Cham, doi.org/10.1007/978-3-030-11533-3\_30.
5. Ю. П. Пытьев, А. И. Чуличков Методы морфологического анализа изображений: учеб. Пособие, ФИЗМАТЛИТ, 2010. 336 с
6. . Н.П. Гришенкова, Д.Н. Лавров Обзор методов идентификации человека по радужной оболочке глаза. Математические структуры и моделирование 2014. №1(29). С. 43–64
7. Пытьев Ю.П., Терентьев,Е.Н., Задорожный С.С., Морфологический анализ изображений интегральных схем, в журнале Вестник Московского университета. Серия 3. Физика, астрономия, издательство. Изд-во Моск. ун-та (М.1976), №6, 749-750



## О точной локализации объектов и вихрей в изображениях

Е.Н. Терентьев, И.Н. Приходько, И.И. Фаршакова

В основе метода лежит Конечномерная Теорема Отсчетов (КМТО), которая позволяет вычислять градиентное поле векторов  $G = \text{grad } P$  от изображения в градациях серого  $P$ . Методы анализа формы полей  $G$  позволяют в изображениях  $P$  точно локализовать, вихревые структуры известной формы, например, вихри в космических изображениях в ИК диапазоне, Дорожные Знаки (ДЗ) и т.п. Данный подход использует информацию в изображении о контуре и о форме искомого объекта, являясь при этом помехоустойчивым.

### Общая схема метода

В основе метода лежит КМТО [2], которая позволяет вычислить градиентное поле  $V = \text{grad } P$  от изображения  $P$  – светлое кольцо на темном фоне, см. Рис. 1 слева.

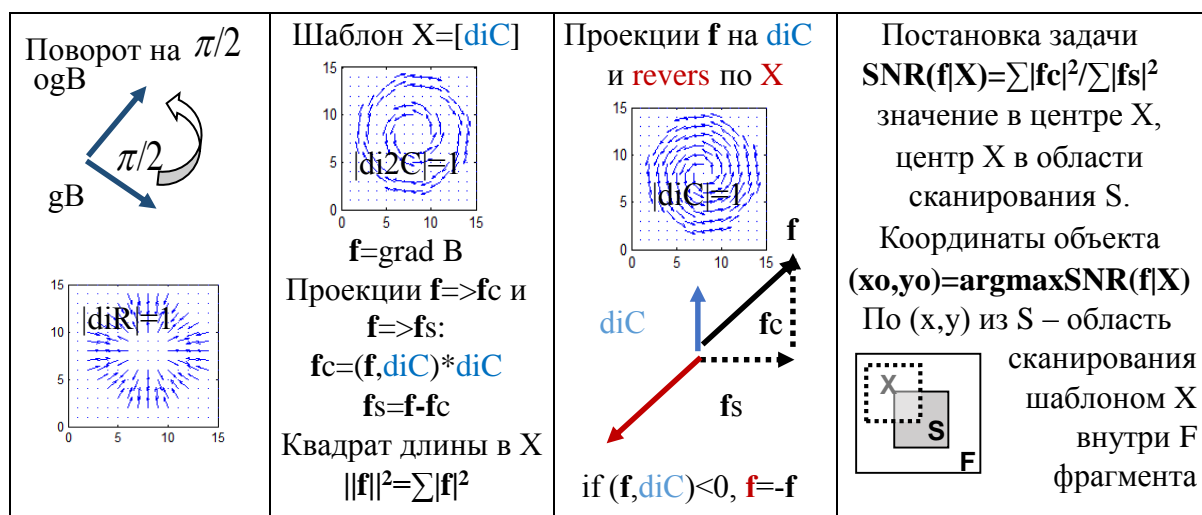


Рис. 1. Операции над векторными полями, шаблоны, проекции, функция SNR.

### Локализация вихрей в ИК диапазоне

Тут мы не используем поворота векторов на  $\pi/2$ , см. Рис. 1, слева, поэтому используем шаблон  $X=[diR]$ . Функция Сигнал/Шум - SNR, см. Рис. 1 справа.

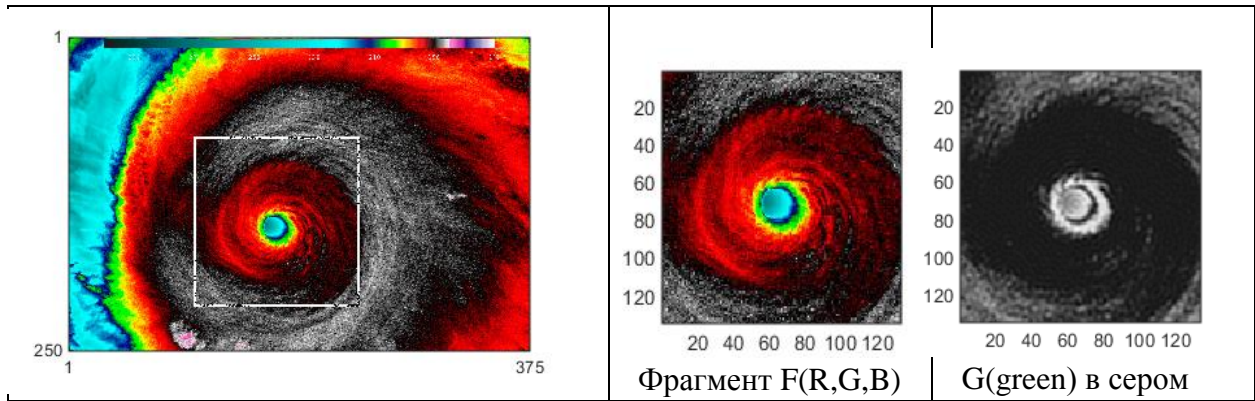


Рис.2. Вихрь в ИК диапазоне в трех поддиапазонах R,G,B и выделяем G из F.

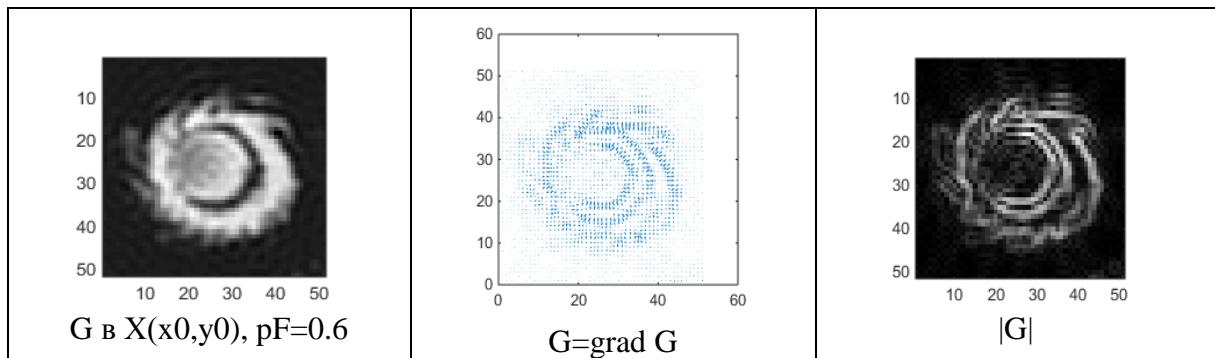
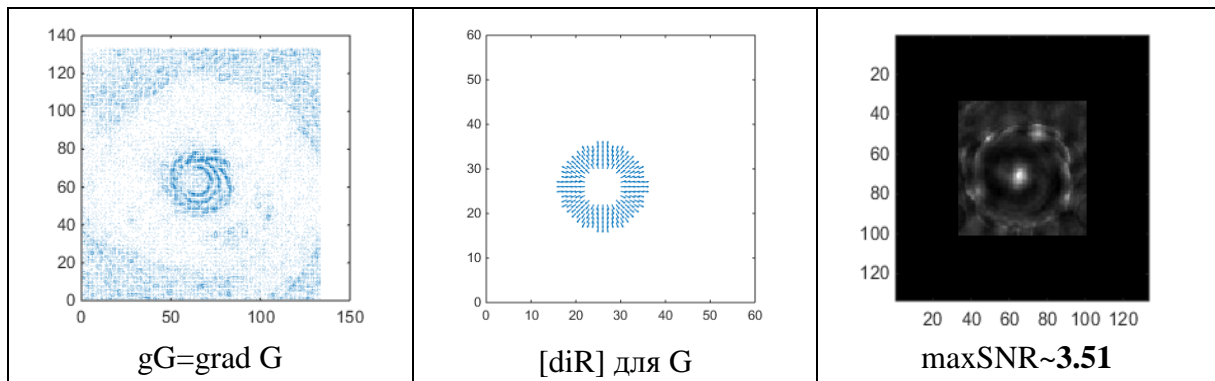


Рис. 3. Оценивание положение  $(x_0, y_0)$  Глаза Вихря в поддиапазоне G в F

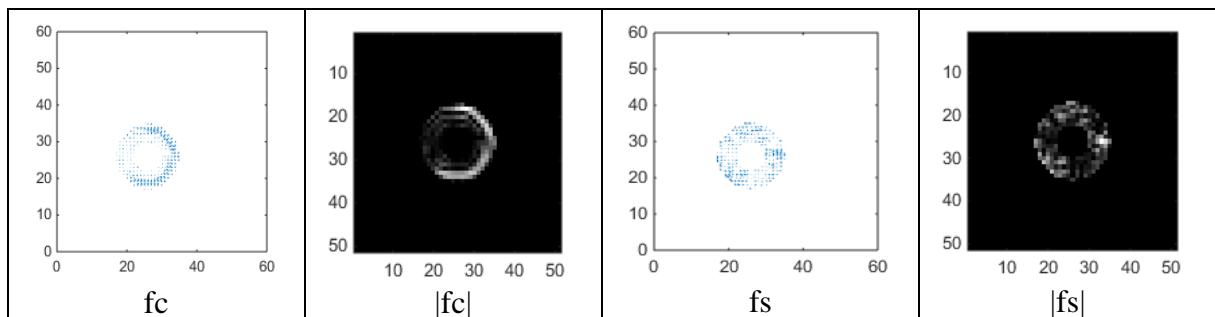


Рис. 4. Сигнальные  $fc$  и Шумовые  $fs$  проекции в пределах шаблона  $X(x_0, y_0)$

### Локализация ДЗ

При локализации ДЗ и вихрей в цветных изображениях максимально контрастными оказались изображения по синему (Blue) каналу, поэтому в выделенном фрагменте  $F$  выделяем синий  $B$  и представляем в сером.

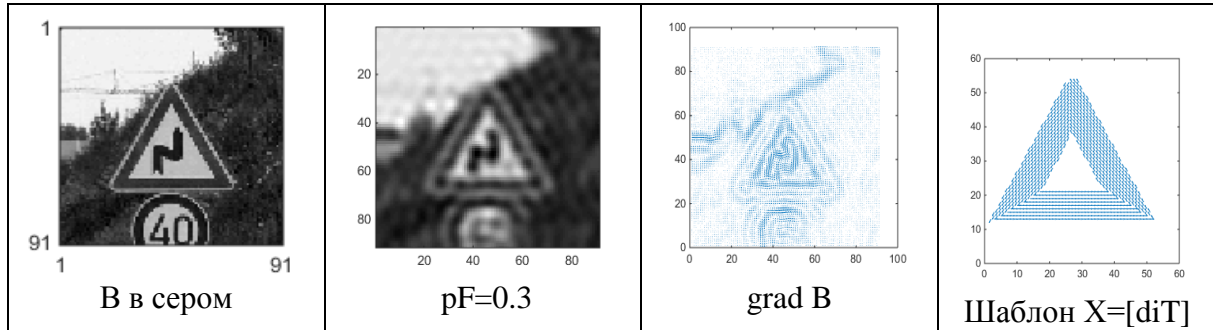


Рис. 5. Операция фильтрация, вычисление градиента и шаблон направлений по треугольнику  $X=[diT]$ .

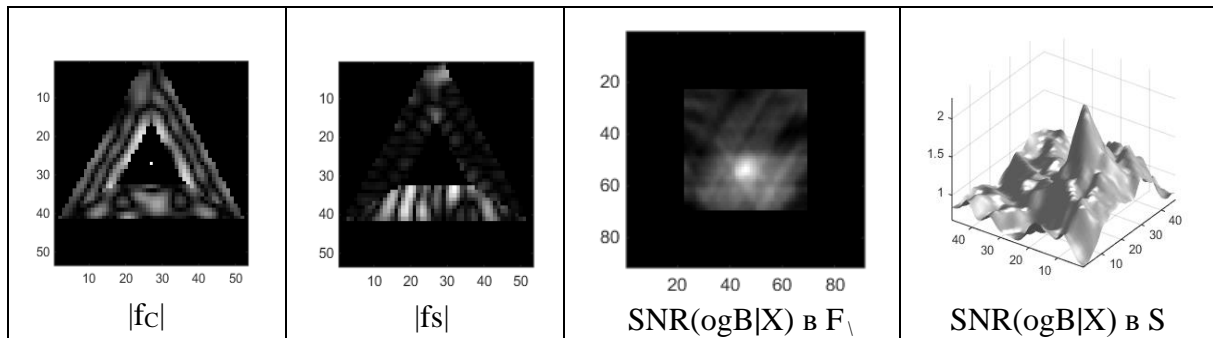


Рис. 6. Компоненты SNR и значения функции SNR с максимальным значением  $\sim 2$  в области сканирования  $S$ .

Чтобы исключить большие точечные градиенты, обнуляем Высокочастотную Часть (ВЧ) изображения на уровне  $pF=0.3$ .

Шаблон направлений  $X=[diT]$ , соответствует не реальному “вихрю по треугольнику”. Поэтому градиентное поле поворачивали на  $\pi/2$  под  $X$ . Операция  $revers$  по  $X$  позволяет нам фиксировать векторное поле по треугольнику без знака, т.е. направления обхода.

### Выводы.

Предложенный подход позволяет определять положение объектов с регулярной и нерегулярной структурой типа ДЗ и вихри [1]. Это говорит о применимости метода к широкому классу объектов. Возможность точного оценивания положения ДЗ позволяет говорить о семантическом анализе, чтении ДЗ роботом навигатором, “понимать смысл” нескольких ДЗ. Оценка точного расстояния между ЗГ дает возможность постановки новых семантических задач в оценивании параметров типа “черты лица” для реализации методов распознавания изображений лиц. В планах задачи оценивания параметров вихрей [1] для мониторинга космических изображений Земли.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Терентьев Е.Н., Терентьев Н.Е.//ПРОЦЕССЫ В ГЕОСРЕДАХ, №4(9), с.355-362 (2016).
2. Е. Н. Терентьев, N. E. Shilin–Terentyev, И. Н. Приходько, И. И. Фаршакова //УЗФФ Московского Университета, (5):1850308–10, 2018.
3. E. N. Terentiev, I. García-Magariño, N. E. Shilin-Terentyev, I. N. Prikhodko, I. I. Farshakova//Information and Computer Security (2018), doi:10.24294/ics.v1i1.1025 ( <http://systems.enpress-publisher.com/index.php/ICS/article/view/1025>).
4. E. N. Terentiev, I. N. Prikhodko, I. I. Farshakova, I. D. Kuznetsov, N. E. Shilin-Terentiev//Springer Proceedings in Earth and Environmental Sciences. Springer, Cham, doi.org/10.1007/978-3-030-11533-3\_30.
5. Ю. П. Пытьев, А. И. Чуличков Методы морфологического анализа изображений: учеб. Пособие, ФИЗМАТЛИТ, 2010. 336 с

## Отбор реакций для задач управляемого термоядерного синтеза

О.И. Топор<sup>1</sup>, И.А. Федоров<sup>1</sup>, А.А. Белов<sup>1</sup>, Н.Н. Калиткин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет

<sup>2</sup>Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН  
[igorfedorov0997@gmail.com](mailto:igorfedorov0997@gmail.com), [topor.oi15@physics.msu.ru](mailto:topor.oi15@physics.msu.ru)

**Введение.** Для расчета задач управляемого термоядерного синтеза (УТС) требуется знать зависимости скоростей термоядерных реакций  $K(T)$  от температуры. Важнейшими являются реакции  $D+D \rightarrow p+T$ ,  $D+D \rightarrow n+{}^3\text{He}$ ,  $D+T \rightarrow n+{}^4\text{He}$ ,  $D+{}^3\text{He} \rightarrow p+{}^4\text{He}$ , однако нередко учитывают значительное количество других реакций [1]. Скорости реакций получают из экспериментально измеренных зависимостей сечений реакций  $\sigma(E)$  от энергии. Существует много экспериментальных работ [2], но точность большинства из них невелика.

**Выбор реакций.** Мы рассматривали реакции, удовлетворяющие двум условиям. Первое – значимость по сравнению с реакциями  $D+D$  и  $D+T$  в диапазоне энергий, актуальном для проблем УТС ( $E < 100$  кэВ). Учитывались такие реакции, сечения которых составляют не менее 1% от сечения указанных эталонных реакций. Второе условие – наличие данных по сечениям при достаточно низких энергиях, начиная с которых возможна экстраполяция сечений вниз по энергии согласно формуле Гамова. При такой экстраполяции  $S$ -фактор, равный сечению, деленному на квазиклассическую проникаемость кулоновского барьера, продолжается на низкие энергии как константа.

Оказалось, что из более 50 реакций, указанных в [1], лишь реакции  $T+T \rightarrow n+{}^4\text{He}$ ,  $D+p \rightarrow \gamma+{}^3\text{He}$  и  $T+p \rightarrow \gamma+{}^4\text{He}$  удовлетворяет сформулированным условиям. Заметим, что в астрофизических задачах (например, взрывы сверхновых) достигаемые температуры значительно выше, чем в установках УТС. Поэтому отбор существенных реакций нужно проводить по более мягким критериям.

**Сечение.** Для выбранной реакции была построена аппроксимация  $S$ -фактора с помощью предложенного нами ранее регуляризованного метода двойного периода [3]. В этом методе строится аппроксимация непериодической функции в виде специфического переопределенного ряда Фурье. При этом вводится штраф за большие значения второй производной аппроксимирующей кривой, что позволяет бороться с нефизичными осцилляциями. Для этого метода разработана процедура, позволяющая находить доверительный интервал аппроксимирующей кривой. Для рассматриваемой реакции точность аппроксимации составила всего 2-4% в диапазоне 2 кэВ – 5 МэВ.

**Скорость реакции.** Домножая найденный  $S$ -фактор на множитель Гамова и свертывая его с максвелловским распределением скоростей, найдем скорость реакции  $K(T)$  численным интегрированием. Доверительный интервал полученной скорости реакции был равен ~3-4%.

**Результаты обработки.** Экспериментальные данные по реакции  $T+T$  в форме  $S$ -фактора приведены на рис. 1, для реакции  $D+p$  – на рис. 2, для реакции  $T+p$  – на рис. 3.

**1<sup>o</sup>.** Для реакции  $T+T$  на рис. 2 приведено в общей сложности ~130 точек. Из них ~50 точек получены в Los Alamos National Laboratory. Итоговые данные опубликованы в базе [2], однако первичные данные и детали методов обработки приведены в отчете, который отсутствует в открытом доступе. Известно лишь, что эти данные получены с помощью теории  $R$ -матриц. Поэтому мы оцениваем их точность в ~5% (по аналогии с

схожей работой). Косвенным подтверждением этой оценки служит малый разброс этих точек относительно мысленной гладкой усредненной линии. Остальные точки принадлежат нескольким работам, в каждой из которых измерено  $\sim 10-15$  точек. Их погрешности в основном составляют  $\sim 10-20\%$  и изредка доходят до  $50\%$ .

Наша обработка по описанной выше методике дала гладкую аппроксимацию, приведенную на рис. 1. Виртуальный эксперимент показал, что ширина ее коридора достоверности составляет  $2-5\%$ .

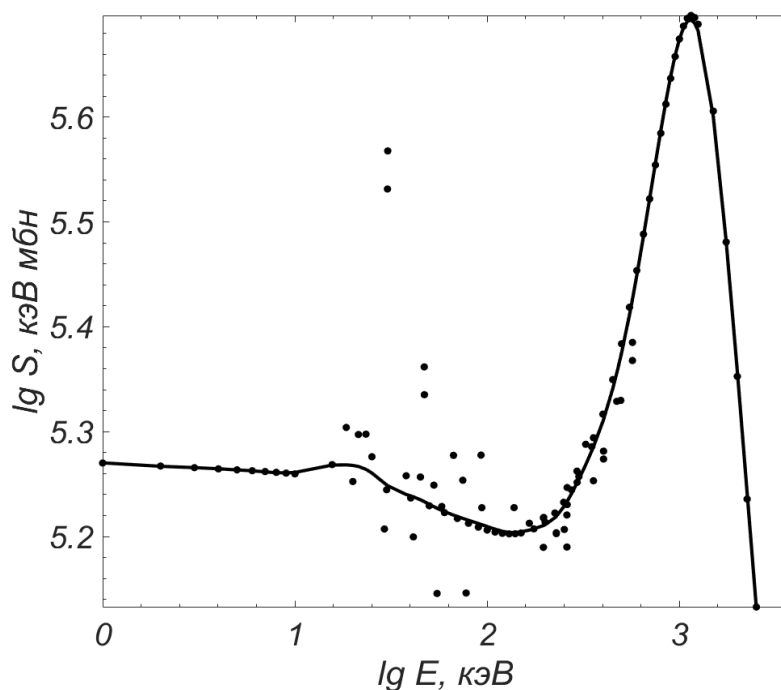


Рис.1. S-фактор реакции  $T+T \rightarrow 2n + {}^4\text{He}$ , маркеры – эксперименты, линия – данная аппроксимация.

Экспериментальные данные начинаются с энергии  $1$  кэВ. Визуально видно, что экспериментальные точки выходят на горизонтальную прямую. Поэтому экстраполяцию построенной построенной на  $E \rightarrow 0$  можно считать надежной. Получена зависимость  $K(T)$ , рассчитанная для максвелловского распределения скоростей. Для скорости реакции используется единица  $\text{см}^3 \text{с}^{-1}$ . Также рассчитана ширина доверительного коридора, который при низких температурах составляет  $2-4.5\%$ .

$2^0$ . Для реакции  $D+p$  имеется  $\sim 140$  точек, представленных на рис. 2. Из них  $\sim 110$  точек расположены в диапазоне низких энергий от  $2.5$  кэВ до  $30$  кэВ. Они получены в разных работах и разумно согласуются друг с другом в основном в пределах  $\sim 15\%$ . Эту величину можно принять за предварительную оценку точности на данном интервале энергий. В диапазоне высоких энергий  $1-5$  МэВ лежит  $20$  точек. Они ложатся на гладкую кривую малым с визуальным разбросом  $\sim 5\%$ . Это также можно считать предварительной оценкой точности. В достаточно широком промежуточном диапазоне энергий  $30$  кэВ –  $1$  МэВ имеется всего  $12$  точек. Визуально они посредственно согласуются с данными остальных диапазонов: заметно ошутимое систематическое уклонение. В соответствии с этим визуальным отклонением мы предварительно приписывали им погрешность  $\sim 30\%$ .

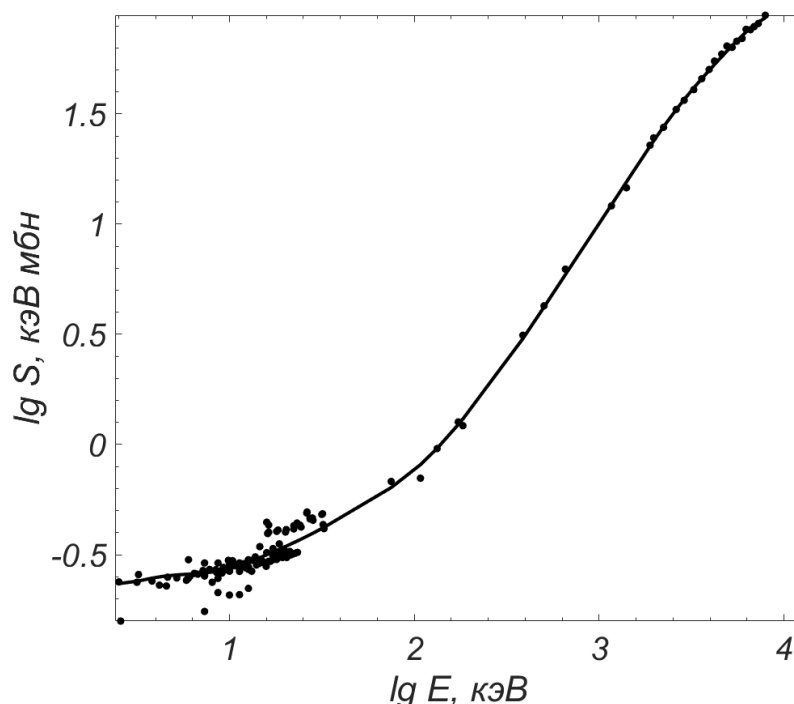


Рис. 2. S-фактор реакции  $D + p \rightarrow \gamma + {}^3\text{He}$ , обозначения соответствуют рис. 1.

Наша обработка описанных экспериментальных точек приведена на рис. 2. Оценка ее коридора достоверности по методу виртуального эксперимента составляет 2-4.5%. Экспериментальные данные начинаются с энергии 2.5 кэВ. Хорошо видно, что экспериментальные точки выходят на горизонтальную прямую. Поэтому экстраполяцию построенной построенной на  $E \rightarrow 0$  можно считать надежной. Также были получены значения  $K(T)$ . Их точность составляет ~4% во всем диапазоне температур 10 эВ – 2 МэВ.

3<sup>0</sup>. Для реакции  $T + p$  экспериментальных данных очень мало. Они разбиваются на 2 группы: 10 точек в диапазоне средних энергий 10 – 100 кэВ и 10 точек в диапазоне огромных энергий 10 – 30 МэВ. Как в промежуточной области, так и в области малых энергий экспериментальных измерений нет. Видно, что участки средних и сверхвысоких энергий можно разумно соединить монотонной гладкой кривой. Физическим обоснованием этого является то, что ядро  ${}^4\text{He}$  образуется в основном состоянии, ибо его низшее возбужденное состояние имеет очень большую энергию ~21 МэВ. Поэтому резонансных максимумов на кривой  $S(E)$  быть не должно.

Это позволяет совместно обработать оба участка экспериментальных данных описанным выше методом. Полученная кривая приведена на рис. 3. Оценка погрешности расчетного S-фактора методом виртуального эксперимента дает 2 – 3% в районе средних энергий и до 4% в промежуточной области (в которой данных нет).

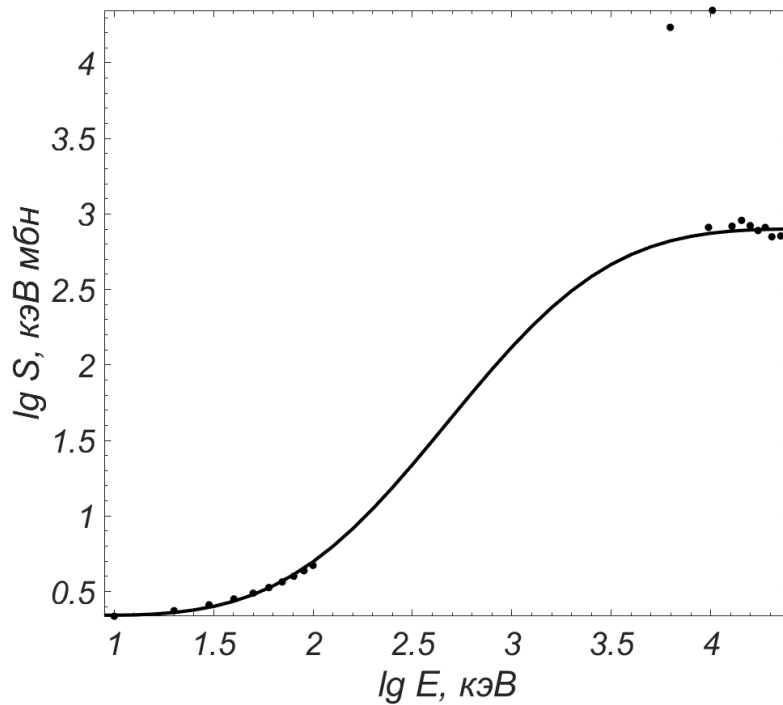


Рис. 4. S-фактор реакции  $T + p \rightarrow \gamma + {}^4\text{He}$ , обозначения соответствуют рис. 2.

Экспериментальные данные начинаются с энергии 10 кэВ. Для этой реакции имеется мало экспериментальных точек, и визуально выход экспериментальных значений  $S(E)$  на константу просматривается хуже. Тем не менее аппроксимирующая кривая хорошо выходит на горизонтальную прямую. Поэтому экстраполяцию на  $E \rightarrow 0$  можно считать достаточно надежной.

Были рассчитаны соответствующие значения  $K(T)$ . Их погрешность составляет 3 – 4% во всем рассматриваемом диапазоне температур.

Работа поддержана грантами РФФИ № 18-01-000175 и МК-1780.2019.1.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С.Н. Абрамович, Б.Я. Гужовский, В.А. Жеребцов, А.Г. Звенигородский «Ядерно-физические константы термоядерного синтеза» М.: 1989
2. NEA Data Bank – Nuclear Data Services. <http://www.oecd-nea.org/janisweb/search/exfor>
3. Белов А.А., Калиткин Н.Н. // ДАН. 470:3 (2016), 266-270.



## Обобщение метода Ричардсона для итерационных процессов высоких порядков

С.М. Трушин<sup>1</sup>, В.С. Хохлачев<sup>1</sup>, А.А. Белов<sup>1</sup>, Н.Н. Калиткин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет

<sup>2</sup>Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

[t.stepan1999@gmail.com](mailto:t.stepan1999@gmail.com) [valentin.mycroft@yandex.ru](mailto:valentin.mycroft@yandex.ru)

Многие задачи математического моделирования решаются с помощью итерационных процессов. Поскольку задача решается приближенно, каждый метод требует оценки погрешности. Одной из основных характеристик численного метода является скорость сходимости, которая определяет связь между погрешностями на двух последовательных итерациях. Она вводится следующим образом:  $d_{k+1} \approx const \cdot d_k^p$ , где  $d$  погрешность,  $p$  порядок скорости сходимости.

Для большинства численных методов характерна линейная сходимость [1]. В этом случае ошибка убывает пропорционально увеличению числа шагов сетки, то есть  $\Delta = O(N^{-q})$ , где  $q$  порядок точности. На сегодняшний день хорошо изучены способы оценки погрешности для методов с линейной скоростью сходимости. Для апостериорной оценки погрешности (т.е. не использующей информацию о точном значении искомой величины) существует метод Ричардсона.

В ряде случаев скорость сходимости значительно быстрее линейной, например, при использовании метода Ньютона в окрестности корня или при вычислении квадратур методом трапеций, с некоторыми дополнительными условиями на подынтегральную функцию [2]. Поведение погрешности в методе Ньютона в достаточно малой окрестности корня хорошо известно:  $d_{k+1} \approx ad_k^2$ . Такую сходимость назовём квадратичной. Аналогично можно определить кубическую сходимость. Данная работа посвящена способу оценки погрешности для численных методов со сверхлинейной сходимостью.

В работе получены апостериорные оценки погрешности для численных методов со сверхлинейной сходимостью, аналогичные оценке в методе Ричардсона. Например, для квадратичной сходимости апостериорная оценка достигнутой точности имеет вид

$$R_{2N} = U_{4N} - U_{2N} \quad (1)$$

Оценка «на сетку вперёд», то есть относящаяся к сетке с числом узлов  $4N$ , вычисляется по формуле

$$R_{4N} = \frac{(U_{4N} - U_{2N})^3}{(U_{2N} - U_N)^2} \quad (2)$$

Показано, что эти оценки асимптотически точны. Построен алгоритм автоматического поиска регулярного участка кривой сходимости.

Участок кривой сходимости считается регулярным, если на нескольких сгущениях подряд выполняются два условия: монотонность стремления тангенса угла наклона прямой (проведённой по регулярному участку) к теоретическому и отсутствие «перескоков» на графике сходимости, то есть все точки должны лежать по одну сторону относительно данной прямой. Такая автоматизация принципиально важна для массовых расчетов [3].

В качестве представительных тестовых задач взяты две квадратуры, на примере которых рассмотрены случаи линейной и сверхлинейной сходимости. Построены графики, отражающие согласованность оценок погрешности, аналогичных Ричардсоновским и оценок погрешности относительно аналитического ответа.

Приведём пример квадратуры, сходящейся линейно

$$U = \int_1^{10} \frac{\ln^2(x)}{x} dx \quad (3)$$

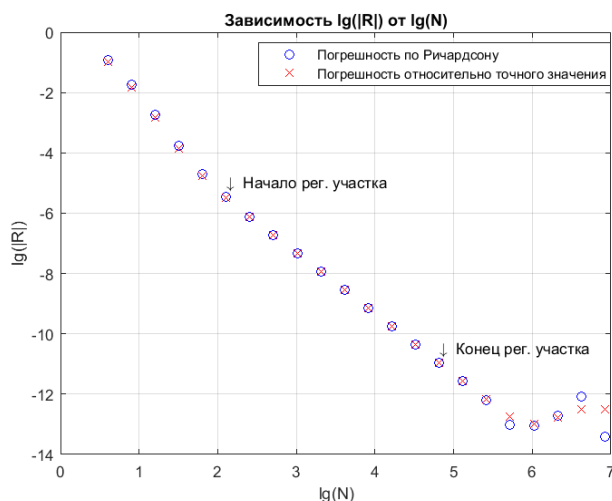


Рисунок 2 Погрешность интеграла (3)

На рис. 1 представлены графики зависимости погрешности интегральной суммы относительно аналитического ответа и по Ричардсону от числа шагов по сетке в двойном логарифмическом масштабе. Как видно, график делится на три области. Первая область ( $N$  ещё не велико) – нерегулярный участок, здесь оценки по Ричардсону не согласуются с оценкой по аналитическому ответу. Вторая область, на которой график близок к линейному, здесь Ричардсоновская оценка, согласуется с аналитическими. Если приблизительно вычислить тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс, то он будет близок к -2, это согласуется с теорией, так как у метода трапеций 2 порядок точности ( $R = O(h^2)$ ). Третья область – область ошибок округления, связанных с конечной разрядностью вычислительной машины. На графике отмечены точки начала и конца регулярного участка, поиск которых проходит в автоматическом режиме.

Приведём пример квадратуры, сходящейся сверхлинейно

$$U = \int_0^{\pi} \frac{(c^2 - 1)c^r \cos(rx)}{(c^2 - 2c \cos(x) + 1)^q} dx; \quad U(r=1, q=1, c=2,72) = \pi; \quad (4)$$

Данная квадратура вычисляется методом трапеций на равномерной сетке, но её погрешность не разлагается в степенной ряд, как в случае с линейной сходимостью, а представляется в следующем виде  $R_N \approx \exp(-AN)$ , где  $A$  – некоторая константа, а  $N$  – число интервалов в сетке. Таким образом, при сгущении сетки в 2 раза можно получить квадратичную сходимость, а при сгущении в 3 раза кубическую.

На рис. 2 представлены результаты расчётов с интегралом (4) на сгущающихся в два раза сетках. Построены графики зависимости погрешностей относительно аналитического ответа, по аналогу метода Ричардсона и погрешность интегральной

суммы, в которой учтён главный член погрешности на предыдущем шаге. Видно, что всюду на графике оценки по аналогу метода Ричардсона и аналитические согласуются, а погрешности модифицированной интегральной суммы лежат значительно ниже, как если бы мы рассматривали схему более высокого порядка.

На рис. 3 показан график зависимости погрешностей от числа шагов, по результатам расчётов с интегралом (4), но при сгущении сеток в три раза, а не в два. Имеют место схожие выводы по применимости аналога метода Ричардсона.



Рисунок 2. Погрешность интеграла (4) при сгущении сеток вдвое (квадратичная сходимость)

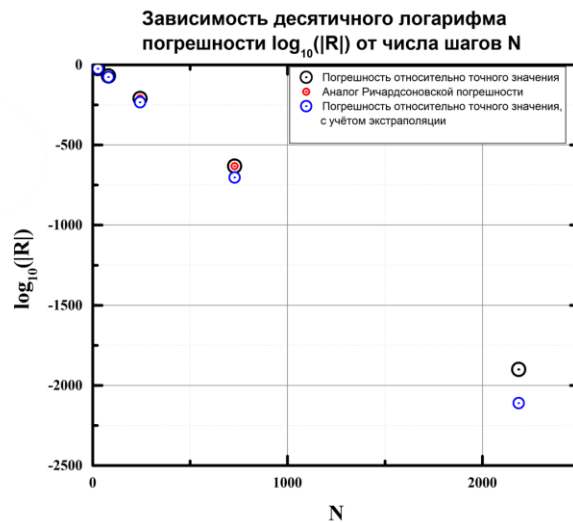


Рисунок 3. Погрешность интеграла (4) при сгущении сеток втрое (кубическая сходимость)

Работа поддержана грантами РФФИ № 18-01-000175 и МК-1780.2019.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Н. Калиткин, Е.А. Альшина «Численные методы. Том. 1. Численный анализ». М., Академия. 2013.
2. Н.Н. Калиткин, С.А. Колганов // Доклады академии наук, 2017, том 473, № 4, с. 401–403
3. Н. Н. Калиткин, Л. В. Кузьмина // Матем. моделирование, 2011, том 23, № 6, 33–58