МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В РАДИОФИЗИКЕ И ОПТИКЕ

Моделирование нелинейных оптических процессов в РДС-кристалле
А.В. Белинский, Р. Сингх 3

ТЕФИС – база данных по свойствам веществ при экстремальных условиях
А.А. Белов, Н.Н. Калиткин, И.А. Козлитин, П.В. Корякин 7

Безызлучательная модель плазмы в экономичном алгоритмическом представлении
А.А. Беляев, Л.В. Бородачев, Н.А. Боголюбов 9

Моделирование химической кинетики явными схемами с геометрически-адаптивным выбором шага
П.Е. Булатов, А.А. Белов 11

Метод гомотопии для расчета направляемой моды в периодической волноводно-лестничной структуре в цилиндрической геометрии
А.А. Быков 14

Полностью консервативный алгоритм частичной дискретизации для нестационарных волновых процессов в периодических волноводно-лестничных структурах
А.А. Быков 18

Решение жестких задач Коши с геометрически адаптивным выбором шага и заданной точностью
Е.К. Жолковский, А.А. Белов 20

Математические задачи теории дифракции на телах сложной формы
И.Е. Могилевский, А.Н. Боголюбов, В.В. Ровенко 22

Модели сцинтилляции сигналов при распространении по трансионосферным линиям связи
Л.Е. Назаров, В.В. Батанов 26

Анализ влияния ионосферы на вероятностные характеристики приема сигналов с фазовой манипуляцией в спутниковых системах передачи информации
Л.Е. Назаров, В.В. Батанов, З.Т. Назарова 28

Вейвлет-анализ аудиосигналов и синтез речи
С.А. Никоноров, А.Н. Боголюбов 30

Когерентность излучения в моделях мощных лазерных диодов
А.Г. Ржанов 34

Алгоритмы анализа характеристик дендритных структур
Д.Д. Ружицкая, Ю.В. Рыжикова, С.Б. Рыжиков 38

Моделирование периодических волноводов лестничного типа
М.И. Светкин, А.Н. Боголюбов, А.И. Ерохин, В.М. Пикунов *42*

Математические модели микроволновых приборов с распределенным взаимодействием на основе полностью консервативных алгоритмов
А.Г. Свешников, А.Н. Боголюбов, А.А. Быков *45*

Отображения класса Коэна в анализе временных рядов позиционных характеристик волнового пучка
Е.А. Бабанин, Р.Ф. Стрюнгис *49*

Классификаторы в проблеме сверхразрешения
Е.Н. Терентьев, Н.Е. Шилин -Терентьев *51*

О применении операций теории поля в изображениях
Е.Н. Терентьев, Н.Е. Шилин-Терентьев, И.Н. Приходько, И.И. Фаршакова *55*

Характеристики Адекватности Моделей сверхразрешения в радиовидении
Е.Н. Терентьев, Н.Е. Шилин-Терентьев, Ю.А. Пирогов, И.И. Фаршакова *58*

Моделирование нелинейнных оптических процессов в РДС-кристалле

А.В. Белинский[1], Р. Сингх[2]
[1]*Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 119991, ГСП-1, Москва*
Эл. почта: [1] belinsky@inbox.ru [2] ranjit.singh@mail.ru

Рассмотрен невырожденный параметрический процесс $\omega_3 \to \omega_1 + \omega_2$ и одновременная генерация суммарных частот $\omega_1 + \omega_3 \to \omega_4$ и $\omega_2 + \omega_3 \to \omega_5$ в кристаллах с регулярной доменной структурой (РДС) и проанализировано условие реализации квазисинхронизма данных процессов для невырожденного случая. С помощью численного метода изучены поведение среднего числа фотонов взаимодействующих мод и их взаимных корреляций. Найдены длины необыкновенных волн для реализации квазисинхронизма всех 3 коллинеарных процессов в РДС-кристалле LiNbO3. Обнаружен новый эффект инверсии взаимной корреляции мод генерируемого излучения при превышении определенной длины взаимодействия. Проанализированные квантовые статистические характеристики необходимы для решения прикладных задач квантовой информатики, в частности, корреляционные характеристики генерируемых световых пучков используются при формировании квантовых фантомных изображений, их мультиплицирования и компьютерной обработки с целью повышения соотношения сигнал/шум.

Невырожденные процессы и условия их квазисинхронизма. Пусть 5 плоских монохроматических мод, характеризуемых операторами уничтожения фотона $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$, $\hat{a}_3$, $\hat{a}_4$ и $\hat{a}_5$ на оптических частотах ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 и ω_5 коллинеарно распространяются внутри РДС-кристалла с квадратичной нелинейностью. Происходят 3 процесса: параметрическая генерация субгармоник и преобразование частоты вверх:

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2, \qquad \delta k_3 = k_3 - k_1 - k_2 + m_3 G_3 = \Delta k_3 + m_3 G_3 \tag{1a}$$

$$\omega_1 + \omega_3 = \omega_4, \qquad \delta k_4 = k_4 - k_1 - k_3 + m_4 G_4 = \Delta k_4 + m_4 G_4, \tag{1b}$$

$$\omega_2 + \omega_4 = \omega_5. \qquad \delta k_5 = k_5 - k_2 - k_3 + m_5 G_5 = \Delta k_5 + m_5 G_5. \tag{1c}$$

Здесь k_j – абсолютные значения волновых векторов соответствующих мод с частотами ω_j; j=1,2,3,4,5; Δk_q – волновые расстройки соответствующего процесса для однородного кристалла; $q = 3,4,5$; $m_q = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$ – порядки квазисинхронизма; $G_q = 2\pi/\Lambda_q$ – волновое число (модуль «псевдовектора» решетки доменной структуры с периодом Λ_q). Выполнение условия квазисинхронизма для процессов (1a–1c) соответствует $\delta k_q = 0$. Найдены значения порядков квазисинхронизма $m_{3,4} = 1$ (для процесса 1a, 1b), $m_5 = 3$ (для процесса 1c) или при разных длинах когерентности $L_{3,4} \approx 128{,}5$мкм, $L_5 \approx 42{,}8$мкм и соответствующих длин необыкновенных (e) волн $\lambda_1 = 4{,}55$мкм, $\lambda_2 = 4{,}041$мкм, $\lambda_3 = 2{,}166$мкм, $\lambda_4 = 1{,}476$мкм, $\lambda_5 = 1{,}373$мкм в РДС-кристалле LiNbO3.

Гамильтониан взаимодействия представляется в следующем виде [1]:

$$\hat{H}_I = h(\beta \hat{a}_{11}\hat{a}_{12}\hat{a}_2^+ + \gamma_1 \hat{a}_{11}\hat{a}_2\hat{a}_3^+ + \gamma_2 \hat{a}_{12}\hat{a}_2\hat{a}_{32}^+) + H.c., \tag{2}$$

где h – постоянная Планка, β и $\gamma_{1,2}$ – коэффициенты нелинейного взаимодействия, *Н.с.* – эрмитово сопряжение.

Диагонализируем гамильтониан взаимодействия (2) и найдем его собственные векторы и собственные значения. Оператор эволюции в матричном представлении вычисляется как

$$\hat{U}(\zeta) = \sum_{m=0}^{M} e^{-i\lambda_m \zeta} |m\rangle\langle m|,$$

где $M = (n_1+1)*(n_2+1)*(n_3+1)*(n_4+1)*(n_5+1)$, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 – число фотонов в модах, $|m\rangle$ – собственный вектор с числом фотонов m при собственном значении λ_m гамильтониана взаимодействия.

Матрица плотности вычисляется как $\hat{\rho}_Q(\zeta) = \hat{U}(\zeta)\hat{\rho}(0)\hat{U}^+(\zeta)$. Здесь $\hat{\rho}(0) = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ – матрица плотности начального состояния для всех пяти мод на входе РДС-кристалла.

Квантовые статистические характеристики. Вычислялись средние значения чисел фотонов и корреляционные функции Глаубера 2-го порядка в модах по формулам

$$N_j(\zeta) = \langle \hat{a}_j^+(\zeta)\hat{a}_j(\zeta)\rangle, \qquad g_{jk}^{(2)}(\zeta) = \frac{\langle \hat{a}_j^+(\zeta)\hat{a}_j(\zeta)\hat{a}_k^+(\zeta)\hat{a}_k(\zeta)\rangle}{N_j(\zeta)N_k(\zeta)}.$$

Нами расчеты проводились для случая $\xi_1 = 0{,}6$, $\xi_2 = 0{,}4$, и когда моды находились в состоянии $|\psi_0\rangle = |n_{10}\rangle|n_{20}\rangle|\alpha_{30}\rangle|n_{40}\rangle|n_{50}\rangle$ на входе $\zeta = 0$ РДС-кристалла, причем моды 1,2,4,5 полагались в вакуумном состоянии $|0\rangle$, а накачка – в когерентном состоянии со средним числом фотонов $|\alpha_{30}|^2 = 3$ и фазой $\varphi_{30} = \pi/3$.

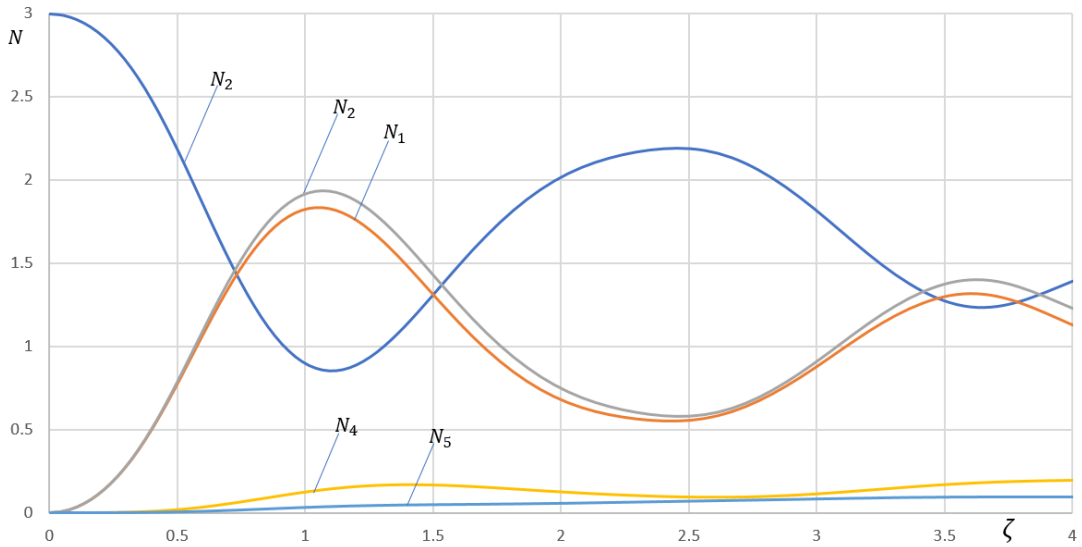


Рис.1. Эволюция среднего числа фотонов в модах.

Результаты и выводы. На рис.1 кривые N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 демонстрирует почти периодические осцилляции среднего числа фотонов. На начальном этапе взаимодействия идет невырожденный параметрический процесс $\omega_3 \to \omega_1 + \omega_2$ распада фотона моды 2 на два фотона мод 1 и 2 и затем генерации суммарной частоты с $\omega_1 + \omega_2 \to \omega_4$, $\omega_2 + \omega_3 \to \omega_5$.

В дальнейшем идет обратный процесс, причем они конкурируют между собой, что хорошо видно из осциллирующего характера кривых N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 на больших длинах взаимодействия ζ. На рис. 2 корреляционные кривые ведут себя почти как периодические функции. При значениях $g^{(2)} > 1$ преобладают парные коррелированные в двух модах фотоны, а при $g^{(2)} < 1$ – одиночные

некоррелированные, аналогично тому, как в одиночной моде $g^{(2)} > 1$ соответствует группировке и суперпуассоновской статистике фотонов, а $g^{(2)} < 1$ – антигруппировке и субпуассоновской статистике.

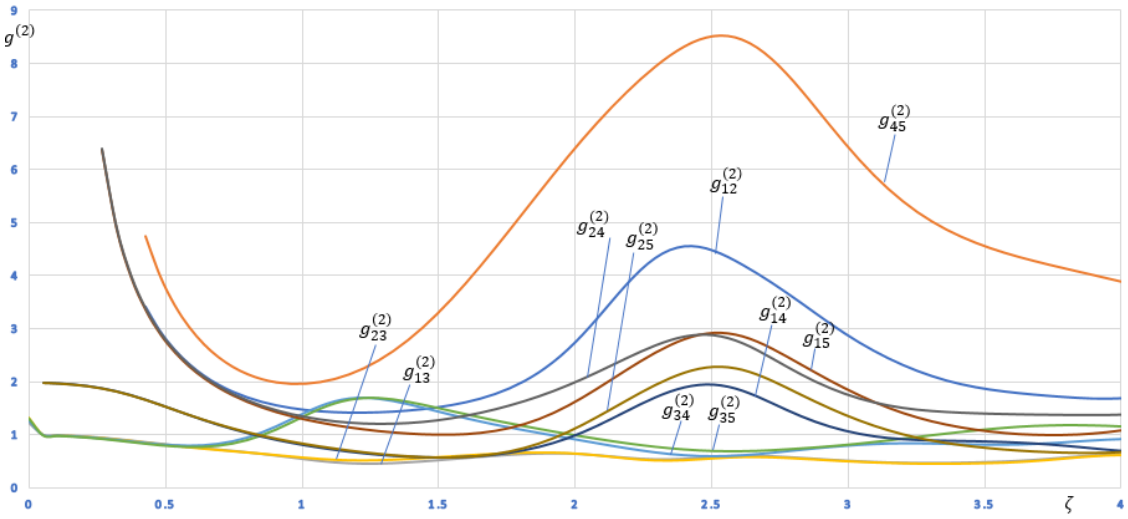


Рис.2. Корреляционные функции Глаубера 2-го порядка.

На рис. 2 также видно, что сначала реализуется процесс (1a), затем (1b) и (1c). На больших длинах взаимодействия все 3 процесса начинают конкурировать между собой, что следует из почти периодического характера этих кривых. Аналогичную ситуацию описывают другие кривые. С другой стороны, парные моды 1 и 2, 1 и 4, 1 и 5, 2 и 4, 2 и 5, 4 и 5, 3 и 4, 3 и 5 заметно коррелированы и могут стать хорошими кандидатами для восстановления изображений методами компьютерной обработки информации по алгоритмам, предложенным в [3]. При этом очень важно отметить, что между модами 3 и 4, 3 и 5 может быть, как взаимная корреляция фотонов, так и антикорреляция, что выражается в значениях $g_{34}^{(2)}$ и $g_{35}^{(2)}$ меньше 1. Для реализации того или иного режима нужно выбирать соответствующую длину взаимодействия. Этот новый существенный эффект впервые нами выявлен на основании точного квантового расчета взаимодействия всех 5 мод.

Приведенные результаты важны не только с точки зрения корректного описания квантовых процессов, происходящих в ходе нелинейной эволюции светового поля в РДС-кристаллах, но и для синтеза оптимальных алгоритмов формирования и компьютерной обработки квантовых фантомных изображений. Исследование последних является актуальной задачей современной квантовой криптографии, поскольку обеспечивает не только повышенную конфиденциальность коммуникации двумерных массивов информации, но и позволяет повысить помехозащищенность, см, напр., [2] и цитируемую там литературу. Следует также отметить, что аналогичные задачи с учетом истощения накачки была решена в [1] в классическом приближении. Наши результаты отличаются от классических что, видно из рис. 3. Таким образом для корректного решения задачи требуется полностью квантовое описание.

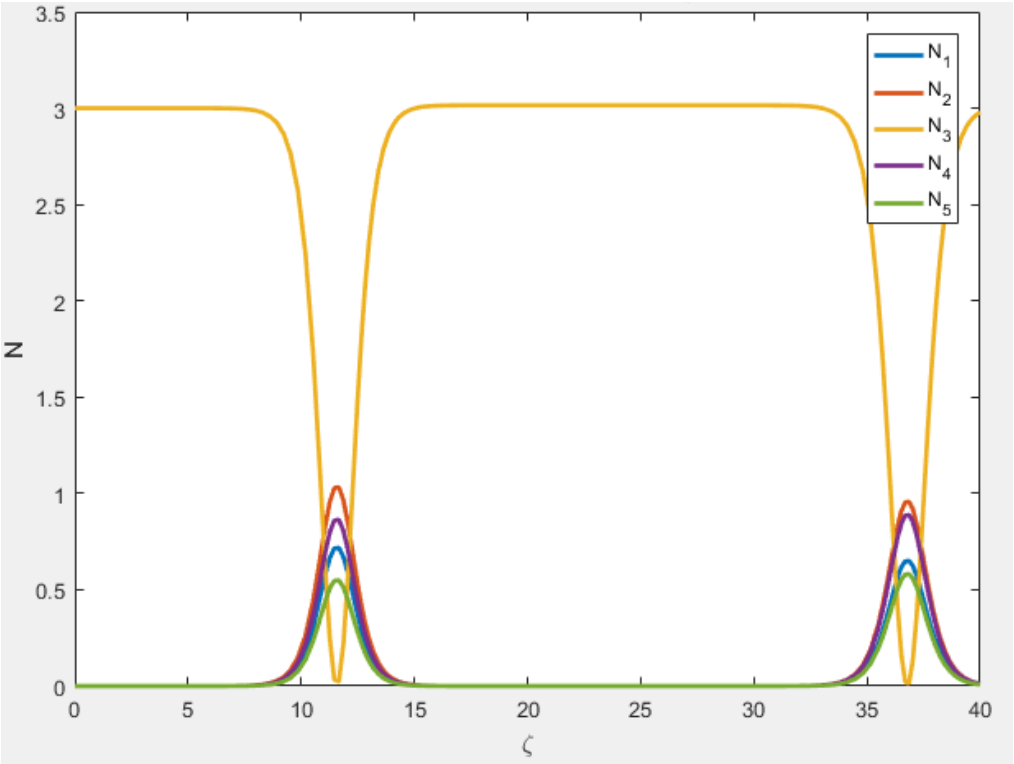


Рис.3. Эволюция средней интенсивности взаимодействующих мод в классическом описании.

Работа поддержана грантом РФФИ №18-01-00598А.

ЛИТЕРАТУРА

1. A.S. Chirkin, Saigin M.Yu., I.V. Shutov // Journal of Russian Laser Research. 2008, v. 29, P. 336.
2. Д.А. Балакин, А.В. Белинский, А.С. Чиркин // ЖЭТФ. 2017, 152, С. 252.

ТЕФИС – база данных по свойствам веществ при экстремальных условиях

А.А. Белов[1], Н.Н. Калиткин[2], И.А. Козлитин[2], П.В. Корякин[2]
[1]*МГУ им. М.В. Ломоносова, Физический факультет*
[2]*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН*
aa.belov@physics.msu.ru, kalitkin@imamod.ru

Проблема. Существует много актуальных физических задач, в которых достигаются очень высокие температуры и давления. Такие условия принято называть экстремальными. Это падение мощных лазерных пучков на мишени, задачи управляемого термоядерного синтеза, сильные взрывы и ударные волны, мегаамперные электрические разряды, соударение небесных тел, внутренняя структура планет и звезд и др. Для математического моделирования подобных задач надо знать термодинамические свойства веществ в экстремальных условиях. В нескольких ведущих научных центрах мира (Ливермор, Лос-Аламос, Саров и др.) созданы и пополняются базы данных по термодинамическим свойствам веществ в экстремальных условиях. В данной работе представляется база ТЕФИС, разрабатываемая в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН.

Содержание базы. Первая очередь базы размещена на сайте Института по адресу tefis.keldysh.ru (а также tefis.ru). Она содержит таблицы трех термодинамических величин давления P, внутренней энергии E и энтропии S как функций от температуры T и плотности ρ. В базе приведены термодинамические функции всех элементов периодической системы с зарядом $Z \le 103$.

Диапазон таблиц следующий. Плотность меняется от 10^{-6} г/см^3 (что соответствует плотности воздуха на высоте 45 км) до 10^6 г/см^3 (что достигается в астрофизических объектах). Температура меняется от 1 эВ до 40 кэВ. Это позволяет описать взрывы сверхновых звезд. Сетки по T и ρ выбираются равномерными в логарифмическом масштабе. Первая очередь базы является демонстрационной и представлена на редкой сетке: $\Delta \lg T = 0.5$, $\Delta \lg \rho = 1$. На рис. 1 представлены изолинии давления для Cu. Около каждой изолинии указана величина $\lg P$.

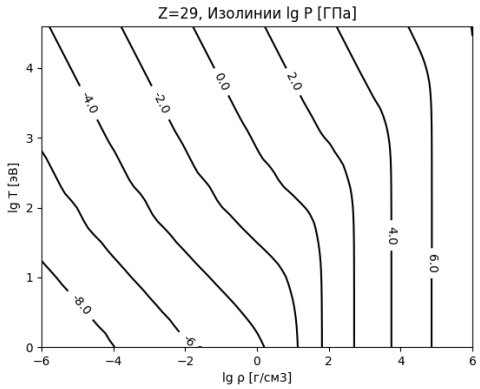


Рис. 1. Изолинии давления для Cu.

Модели. В мировых базах данных для такого широкого диапазона T и ρ таблицы обычно строят методом «лоскутного одеяла». Подбирают несколько физических моделей, каждая из которых удовлетворительно описывает некоторую область таблицы. На границах этих областей соседние модели несколько различаются.

Их искусственно «сшивают», добиваясь непрерывности термодинамических величин. Такой метод имеет ряд недостатков.

Во-первых, число используемых моделей обычно довольно велико: 5-10. Во-вторых, сшивание моделей обычно не удается сделать гладким. В-третьих, на «швах» нарушаются известные термодинамические соотношения между производными различных величин.

В базе ТЕФИС удалось устранить эти недостатки. В ней используется только две модели. Одна – обобщенная модель Саха с учетом вырождения электронов и объема ионных остовов. Она хорошо описывает плазму с газовыми плотностями, а также сверхплотную очень горячую плазму. Другая – статистическая модель атома Томаса-Ферми с квантовой и обменной поправками. Она не учитывает оболочечную структуру атома, но, несмотря на это, удовлетворительно описывает область конденсированного вещества выше кривой плавления вплоть до перехода в газовую плазму.

Во-вторых, вместо «сшивания» применено «склеивание» моделей. Оно основано на том, что каждая из моделей дает разумные результаты во всем диапазоне таблиц даже за пределами границ своей применимости. Это позволяет провести интерполяцию в каждом узле таблицы, что обеспечивает не только непрерывность, но и гладкость получаемых величин.

В-третьих, такая интерполяция применяется к термодинамическому потенциалу – свободной энергии F. Величины P, E, S получаются дифференцированием F по T и ρ. Это обеспечивает термодинамическую согласованность интерполяции.

Экспериментальное подтверждение. Применимость модели Саха в газовой области общеизвестна и не требует подтверждения. Нуждается в проверке в основном область конденсированного вещества. В ней основными экспериментами являются измерения в сильных ударных волнах. Непосредственно измеряются скорость ударной волны D и массовая скорость за фронтом ударной волны U. На рис. 2 для Cu показано сравнение расчетной и экспериментальной ударных адиабат в специально выбранных скоростных переменных. Видно, что при $D \geq 10$ км/с (что соответствует $P \geq 4$ Мбар) теория отлично согласуется с экспериментом.

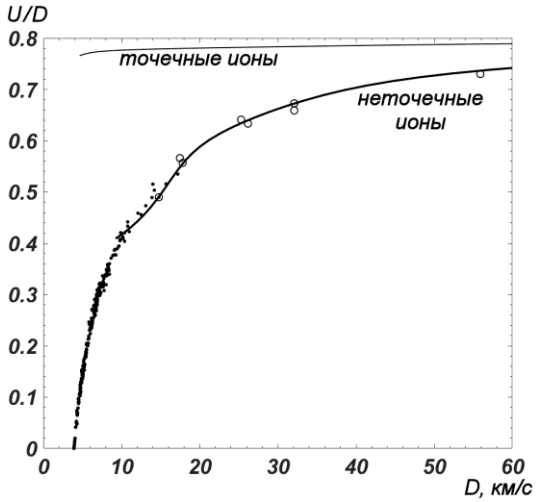


Рис. 2. Ударная адиабата Cu, ● – эксперименты на взрывчатках, ○ – в подземных ядерных взрывах.

Работа поддержана грантом РНФ 16-11-10001.

Безызлучательная модель плазмы в экономичном алгоритмическом представлении

А.А. Беляев, Л.В. Бородачев, Н.А. Боголюбов
Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
borodach2000@mail.ru

Ретроспектива основных периодических изданий, посвященных кинетическому моделированию плазмы, позволяет уверено говорить, что на протяжении последних десятилетий наблюдается устойчивый интерес к физическим приложениям безызлучательного (дарвинского) моделирования по методу макрочастиц [1] в области низкочастотных электромагнитных явлений плазмофизики. Эта ситуация легко объясняет тем, что множество эффектов, обусловленных коллективными взаимодействиями частиц в плазме, носят нерелятивистский и безызлучательный характер [2]. Примерами подобных задач могут служить хорошо известные исследования бесстолкновительных ударных волн, ионно-циклотронных колебаний, кинетических неустойчивостей разреженной магнитоактивной плазмы, взаимодействия поля с веществом и т.п.

Основная идея дарвинского приближения [3] состоит в получении как можно более точной функции Лагранжа для системы частиц и полей с мгновенным дальнодействием. Как оказалось, в случае, слабого релятивизма такую систему удается описать лагранжианом взаимодействия, полученным через незапаздывающие потенциалы как с лоренцевой, так и с кулоновской калибровками. Любопытно, что он оказывается точным до величин второго порядка по (v/c) и содержит электромагнитные эффекты, связанные с законом Фарадея, часто называемые индукционными (что объясняет одно из названий приближения) [4]. При этом, относительно длинноволновый характер присутствующих в системе электромагнитных полей, не содержащих коротких мод излучения, обосновывает корректность сравнительно крупномасштабной дискретизации пространственно-временного континуума в процессе построения численного алгоритма, иными словами, допускает использование достаточно грубых пространственных сеток и относительно крупных шагов временной эволюции согласованной системы полей и частиц, что очевидно существенно снижает вычислительную стоимость расчетов в рамках дарвинского моделирования [5]. Формально полевая дарвинская система отличается от полной (максвелловской) лишь опущенной поперечной компонентой тока смещения (при сохранении уравнения непрерывности заряда за счет остающейся продольной компоненты). Вместе с тем, в отличие от максвелловского, безызлучательному представлению присуща достаточно сложная численная интерпретация, обусловленная необходимостью эллиптической переформулировки дарвинских полевых уравнений, исходно имеющих гиперболический тип, что противоречит аналитическому описанию систем с мгновенным дальнодействием [6].

Положение усугубляется традиционно большими объемами вычислений в компьютерных экспериментах по методу макрочастиц, связанными с необходимостью сохранения возможно большего значения дебаевской плотности частиц ($n_D >> 1$), определяющей требуемые свойства идеальности и бесстокновительности модельной системы, т.е. в конечном итоге обуславливающей степень физической достоверности полученных численных результатов [1].

Таким образом, становится понятной сложившаяся ситуация, при которой практически все реально работающие безызлучательные коды адаптированы к

большим программно-вычислительным платформам кластерного типа [7], имеющим, как правило, весьма ограниченный круг пользователей.

В этой связи актуализируется цель данной работы: формулировка дискретной (по методу макрочастиц) дарвинской модели, достаточно эффективной при алгоритмической разработке, предполагающей использование компьютеров массового применения, уровня рабочих станций или мощных PC.

В этой связи остановимся на следующих основных моментах построения предлагаемой численной модели плазмы.

Выбор представления. Прежде всего отметим, что, как оказалось, в гамильтоновом представлении самосогласованного дарвинского формализма, где динамическую часть составляют уравнения движения частиц в терминах пространственных координат и обобщенных импульсов, а полевая часть имеет вид краевых задач для скалярного и векторного потенциалов с кулоновской калибровкой, требуемую (см. выше) эллиптическую редакцию модели выполнить существенно проще, нежели в традиционном (лагранжевом). При этом в силу компактности гамильтоново представление численно экономичнее лагранжева, особенно для замкнутых систем, где дополнительную минимизацию вычислений дает сохранение канонического импульса частиц.

Выбор фазовой геометрии. Здесь редукция конфигурационного пространства, т.е. использование дробномерной (X, Vx, Vy, Vz) фазовой геометрии, позволяет принципиально уменьшить число используемых в расчете макрочастиц при сохранении требуемой условиями математического эксперимента линейной дебаевской плотности (n_D) или, что то же, физической адекватности полученных численных результатов.

Выбор дискретных параметров. Применение наиболее экономичных разностных схем 2-ого порядка (Leap-frog), наряду с использованием модельных частиц простейшей формы (в виде прямоугольника, предполагающего однородное распределение заряда в самой макрочастице) и линейным размером, равным шагу пространственной сетки, позволяет существенно сократить необходимый объем вычислений в конкретном компьютерном эксперименте.

Удовлетворение рассмотренных выше положений позволило решить поставленную выше задачу: построить экономичную безызлучательную модель разреженной плазмы и разработать соответствующий численный алгоритм для ее реализации на компьютерах средней производительности.

ЛИТЕРАТУРА

1. R.W. Hockney, J.W. Eastwood “Computer Simulation Using Particles” N.-Y.: McGraw-Hill, 1981.
2. Б.Б. Кадомцев “Коллективные явления в плазме” М.: Наука, 1976.
3. C.G. Darwin // Phil. Magazine. 1920. V. 39. P. 537.
4. Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц “Теория поля” М.: Наука, 1973.
5. Л.В. Бородачев // Мат. Моделирование. 2005. Т. 17. No 9. С. 53.
6. Л.В Бородачев, И.В. Мингалев, О.В. Мингалев // Мат. Моделирование. 2006. Т. 18. No 11. С. 117.
7. Л.В. Бородачев, Д.О Коломиец // Комп. Исследования и Моделирование. 2015. Т. 7. No 1. С. 61.

Моделирование химической кинетики явными схемами с геометрически-адаптивным выбором шага

П.Е. Булатов, А.А. Белов
МГУ им. М.В. Ломоносова
bulatov.pawel1996@yandex.ru

Кинетика химических реакций описывается сверхжёсткими задачами Коши для ОДУ. Для этой задачи построен явный метод с автоматическим выбором шага по наклону и кривизне интегральной кривой. Проведено моделирование изотермического горения водород-кислородной смеси.

Проблема. Моделирование химических реакций в газах имеет огромную область практических приложений. Это горение метана в ТЭЦ, работа бензиновых и дизельных моторов, газофазные химические реакторы, переход горения рудничного газа во взрыв и многое другое. Жизнь предъявляет жёсткие требования к точности такого моделирования. Например, ошибка в 1.7% при расчёте тяги реактивного двигателя в 2 раза уменьшает вес полезного груза, выводимого на околоземную орбиту. Другой пример – рудничный газ, который может загореться от искры в электрическом оборудовании или при ударе металла по камню. Горение может затухнуть или перейти в детонацию. Здесь ошибка в расчёте грозит разрушениями и человеческими жертвами.

Задача химической кинетики представляет собой задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{du_j}{dt} = \sum_{i,l,q=1}^{J} \left(\pm K_{jil}(T) u_i u_l \pm K_{jilq}(T) u_i u_l u_q \right) \equiv f_j(\mathbf{u}, T)$$
$$u_j(t_0) = u_j^0; \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_J \end{pmatrix}^T; j,i,l,q = \overline{1,J} \tag{1}$$

Здесь J – число различных типов частиц (компонент), участвующих в реакции; u(t) – их концентрации, которые и надо найти; t – время; K(T) – константы скоростей элементарных реакций; T – температура. В дальнейшем рассмотрены изотермические реакции, поэтому T – это известный и постоянный параметр. Его будем опускать.

Сложность численного решения задачи химической кинетики заключается в большом количестве компонент J и в огромной разномасштабности скоростей химических реакций. Последнее означает, что задача является жёсткой. При повышении температуры жёсткость увеличивается.

Численный метод. В данной работе используется специализированная явная одношаговая схема, приведённая в [1]:

$$\hat{u}_j^{s+1} = \frac{u_j + \tau\psi_j(\bar{\mathbf{u}}^s)\left(1 + \tau\varphi_j(\bar{\mathbf{u}}^s)/2\right)}{1 + \tau\varphi_j(\bar{\mathbf{u}}^s) + \left(\tau\varphi_j(\bar{\mathbf{u}}^s)\right)^2/2}, \quad \bar{\mathbf{u}}^s = \left(\mathbf{u} + \hat{\mathbf{u}}^s\right)/2, \hat{\mathbf{u}}^0 = \mathbf{u}. \tag{2}$$

Здесь ψ_j и φ_j – знакопостоянные функции, определяющие, соответственно, наработку и расход j-й концентрации. Правые части задачи химической кинетики имеют вид:

$$f_j(\mathbf{u}) = \psi_j(\mathbf{u}) - u_j\varphi_j(\mathbf{u}). \tag{3}$$

Схема (2) имеет второй порядок точности и хорошую надёжность. Численное решение всегда неотрицательно. Схема (2) имеет один недостаток: она не

консервативна, то есть в численном решении баланс концентраций не выполнен точно. Однако дисбаланс уменьшается при сгущении сетки как h^2 и может служить дополнительным средством контроля точности.

Шаг интегрирования выбирается адаптивно по наклону и кривизне интегральной кривой [2]. Для этого в качестве аргумента выбирается длина дуги интегральной кривой. Это позволяет разрешить участки крутого наклона. Время и концентрации имеют различные размерности, поэтому в элементе длины дуги они берутся с весовыми множителями, равными характерным масштабам соответствующих компонент:

$$dl^2 = v_0^{-2} dt^2 + v^{-2} \sum_{j=1}^{J} du_j^2. \tag{4}$$

Шаг по длине дуги выбирается по кривизне интегральной кривой по формуле:

$$h = \frac{h_*}{1 + \left(L^2 \left(\vec{\kappa}, \vec{\kappa} \right) \right)^{0.25}} \tag{5}$$

Здесь h_* – шаг на прямолинейном участке, к – вектор кривизны в текущем узле, L – полная длина дуги. Это позволяет разрешить участки большой кривизны.

В работе [2] построена процедура сгущения сеток, которая позволяет применять метод сгущения сеток и одновременно с решением находить асимптотически точную оценку погрешности по методу Ричардсона. Заметим, что другие алгоритмы автоматического выбора шага не позволяют сделать такой оценки. Для них значение погрешности порой значительно отличается от заданной пользователем точности.

Обычно кривизна вычисляется с помощью матрицы Якоби от правых частей. В данной работе для кривизны построена экономичная формула. Вектор кривизны равен второй производной радиус-вектора по длине дуги, то есть первой производной от вектора правых частей. Её достаточно вычислить с первым порядком точности:

$$\vec{\kappa} = \frac{d^2 \mathbf{U}}{dl^2} \equiv \frac{d\mathbf{F}}{dl} \approx \frac{\mathbf{F}_n - \mathbf{F}_{n-1}}{h_{n-1}} \tag{6}$$

Расчёты. В данной работе проведено моделирование процесса горения водорода в кислороде. Учитывались 25 элементарных реакций с участием 9 видов частиц O, H, O_2, H_2, OH, HO_2, H_2O, O_3, H_2O_2. Температура варьировалась от 2000 К до 6000 К. Характерное поведение концентраций при T = 2000 К приведено на рис. 1.

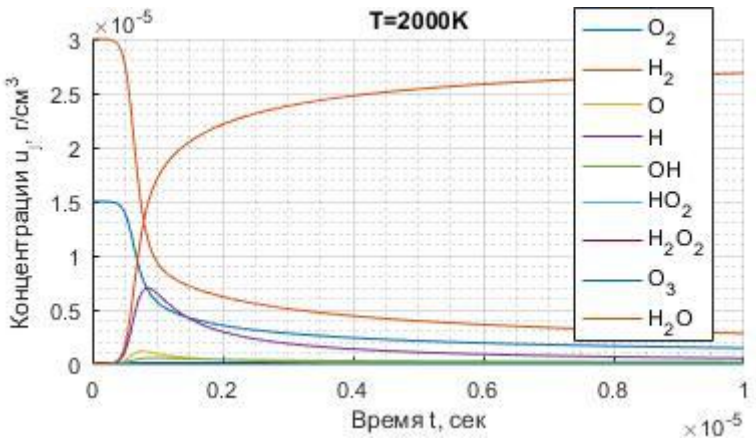


Рис. 1. Концентрации различных видов частиц в зависимости от времени.

Видно, что концентрации водорода и кислорода уменьшаются со временем. Концентрация воды со временем нарастает. Концентрации остальных частиц, равные нулю в начальный момент времени, сначала увеличиваются, а потом быстро начинают стремиться к нулю. Так как водород и кислород в начальный момент времени взяты в молярном соотношении 2:1, то при $t \to +\infty$ они выгорают полностью. Итак, при умеренных температурах водород горит в кислороде и нарабатывается вода.

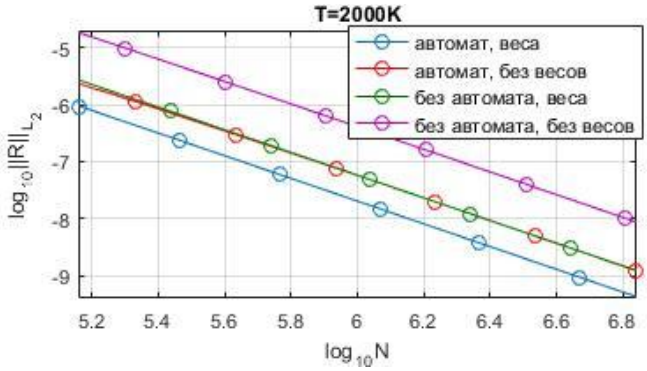


Рис. 2. Нормы относительных погрешностей в зависимости от числа шагов.

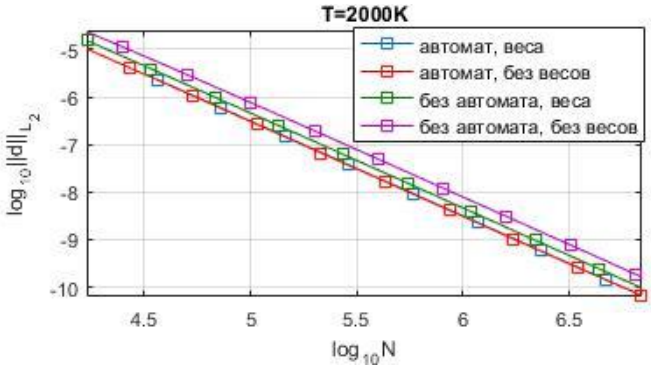


Рис. 3. Нормы относительных дисбалансов в зависимости от числа шагов.

На рис. 2 представлены графики погрешности в зависимости от числа узлов в двойном логарифмическом масштабе. Видно, что использование автоматического выбора шага значительно повышает точность. Видно также, что линии погрешностей имеют вид прямых с коэффициентом наклона -2, равным по модулю теоретическому порядку точности схемы. Это говорит о том, что оценка по Ричардсону применима и даёт достоверное значение погрешности.

На рис. 3 приведены относительные дисбалансы схемы (2) в зависимости от числа узлов в двойном логарифмическом масштабе. Видно, что эти линии также представляют собой прямые с наклоном -2, то есть при сгущении сетки дисбаланс убывает с той же скоростью, что и погрешность.

Авторы выражают искреннюю благодарность Н.Н. Калиткину за внимание к работе, ценные замечания и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.А. Белов, Н.Н. Калиткин, Л.В. Кузьмина // Математическое моделирование. 2016. Т. 28. № 8. С. 46-64.

2. А.А. Белов, Н.Н. Калиткин // Математическое моделирование. 2016 Т. 28. № 11. С. 97-112.

Метод гомотопии для расчета направляемой моды в периодической волноводно-лестничной структуре в цилиндрической геометрии

А.А. Быков

МГУ имени М.В.Ломоносова, физический факультет, кафедра математики.
abkov@yandex.ru

Аннотация. Метод расчета эффективного волнового числа и профиля поля направляемой моды периодической волноводно лестничной системы , каждая ячейка которой состоит из нескольких коаксиальных цилиндрических полостей, соединенных фланцами, основан на представлении поля внутри ПВЛС в виде линейной комбикации функций базисной системы. Задача расчета ПВЛС сначала с помощью метода проекционного сшивания полей приводится к нелинейной задаче на собственные значения для системы алгебраических уравнений для коэффициентов разложения по системе базисных функций. Затем мы погружает задачу в семейство краевых задач, зависящих от параметра гомотопии. Для вычисления волнового числа и профиля электромагнитного поля получается задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Одно уравнение описывает зависимость волнового числа от геометрических параметров ПВЛС, остальные уравнения описывают эволюцию поля собственной моды. В данной работе мы расширяем метод гомотопии на задачи в цилиндрической геометрии.

1. Введение. Мы используем для построения точной модели метод проекционного сшивания полей, основанный на использовании метода Галеркина [1], [2]. Этот метод основан на разложении электрического и магнитного полей в ряды по собственным функциям поперечного сечения, и проекционном сшивании полей, гарантирующем точное соблюдение закона сохранения энергии для приближеннного решения. Мы рассматриваем периодическую структуру, каждый период которой состоит из нескольких секций, соединенных фланцами.

2. Поле в продольно-однородных областях. Пусть внутри одной ячейки Ω периодической структуры $z \in [z_0, z_2]$. Мы рассматриваем монохроматические поля вида $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{i\gamma z}$, $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) e^{i\gamma z}$, комплексные амплитуды $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ должны удовлетворять уравнениям Максвелла $\operatorname{rot}\mathbf{H} = -i\kappa\mathbf{E}$, $\operatorname{rot}\mathbf{E} = i\kappa\mathbf{H}$, условиям на стенках и условию квазипериодичности $\mathbf{E}(\mathbf{r}, z_0) = e^{i\gamma h}\mathbf{E}(\mathbf{r}, z_2)$, $\mathbf{H}(\mathbf{r}, z_0) = e^{i\gamma h}\mathbf{H}(\mathbf{r}, z_2)$, где γ есть параметр Флоке, который требуется найти. Для представления поля используем метод Галеркина. Следуя [1], использем термин «координатная система».

3. Координатная система. Исследуемая структура может быть представлена в виде последовательности продольно-однородных секций, соединенных фланцами. Поэтому сначала найдем структуру поля, зависящего по экспоненциальному закону от продольной координаты z: $\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{e}(x, y) e^{i\gamma z}$, $\mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{h}(x, y) e^{i\gamma z}$. Для компонент поля получим уравнения $\nabla_\perp^2 \mathbf{e} + \chi^2 \mathbf{e} = \mathbf{0}$, $\nabla_\perp^2 \mathbf{h} + \chi^2 \mathbf{h} = \mathbf{0}$, где $\chi^2 = \kappa^2 - \gamma^2$, $\nabla_\perp = (\partial_x, \partial_y, 0)$. Выразим поперечные компоненты полей:

$$\mathbf{e}_\perp = \frac{i\gamma}{\chi^2}\nabla_\perp \mathbf{e}_z + \frac{i\kappa Z_0}{\chi^2}[\mathbf{n} \times \nabla_\perp \mathbf{h}_z], \quad \mathbf{h}_\perp = \frac{i\gamma}{\chi^2}\nabla_\perp \mathbf{h}_z - \frac{i\kappa}{Z_0\chi^2}[\mathbf{n} \times \nabla_\perp \mathbf{e}_z]$$

где $[\mathbf{n}\times\mathbf{V}]=(\mathbf{n}\times\mathbf{V}_\perp,\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{V}_\perp)$. Используем поля ТМ и ТЕ типов: $\mathbf{e}_{n,z}^{TM}=\varphi_n$, $\mathbf{e}_{n,\perp}^{TM}=-\frac{i\gamma}{\alpha_n^2}\nabla_\perp\varphi_n$, $\mathbf{h}_{n,z}^{TM}=0$, $\mathbf{h}_{n,\perp}^{TM}=\frac{i\omega\varepsilon}{\alpha_n^2}[\mathbf{n}\times\nabla_\perp\varphi_n]$, $\mathbf{e}_{n,z}^{TE}=0$, $\mathbf{e}_{n,\perp}^{TE}=\frac{i\omega\mu}{\beta_n^2}[\mathbf{n}\times\nabla_\perp\phi_n]$, $\mathbf{h}_{n,z}^{TE}=\phi_n$, $\mathbf{h}_{n,\perp}^{TE}=-\frac{i\gamma}{\beta_n^2}\nabla_\perp\phi_n$,

$$\begin{aligned}&\mathbf{e}_{n,\perp}^{\Rightarrow}(r,\varphi)=\mathbf{e}_{n,\perp}^{\Rightarrow}(r,\varphi)\,e^{i\gamma_n(\zeta_j-z)},\\&\mathbf{h}_{n,\perp}^{\Rightarrow}(r,\varphi)=\mathbf{h}_{n,\perp}^{\Rightarrow}(r,\varphi)\,e^{i\gamma_n(\zeta_j-z)},\end{aligned}\tag{1}$$

для всех возможных индексов. В соответствии с методикой применения метода Галеркина в электродинамике, разработанной в [2] , координатные функции должны удовлетворять условию ограниченности поля на оси и граничным условиям на внешней цилиндрической поверхности.

4. Поле в продольно однородных областях. Внутри коаксиального цилиндра $D_j^{(s)}$ поле определяется в виде разложения по бегущим влево и вправо собственным волнам:

$$\begin{aligned}&\mathbf{g}_{j,\perp}^{(s)}(r,\varphi,z)=\sum_{n=1}^{N_j^{(s)}}\left(A_n^{(j,s)}\mathbf{g}_{n,\perp}^{\Rightarrow}(r,\varphi)\,e^{i\gamma_n(z-\zeta_{j,s})}+B_n^{(j,s)}\mathbf{g}_{n,\perp}^{\Leftarrow}(r,\varphi)\,e^{i\gamma_n(\zeta_{j,s}-z)}\right),\\&s=0,\dots,S_j,\ z\in[z_{j,s},\zeta_{j,s}],\ r\in[r_{j,s},\eta_{j,s}],\ n=1,\dots,N_j^{(s)},\ \gamma_n=\sqrt{k^2-(\mu_n/\rho)^2}.\end{aligned}\tag{2}$$

Коэффициенты $A_n^{(j,s)}$ определяют амплитуды парциальных волн, бегущих в области $D_j^{(s)}$ слева направо, $B_n^{(j,s)}$ бегущих справа налево, $\overset{\Rightarrow}{\mathbf{g}}=(\overset{\Rightarrow}{\mathbf{e}},\overset{\Rightarrow}{\mathbf{h}})$, $\overset{\Leftarrow}{\mathbf{g}}=(\overset{\Leftarrow}{\mathbf{e}},\overset{\Leftarrow}{\mathbf{h}})$, стрелка показывает направление распространения волны. Обозначим также $\mathbf{V}_n^{(s)}=A_n^{(j,s)}e^{i\gamma_n(\zeta_j-z)}$, $\mathbf{W}_n^{(s)}=B_n^{(j,s)}e^{i\gamma_n(z-\zeta_j)}$.

5. Проекционное сшивание полей на границах секций. Запишем проекционные условия сшивания полей на границе сложной секции $D_0^{(0,1)}$ (слева) и простой секции D_1 (справа), следуя методике, разработанной в [2]. Сначала для тангенциальной компоненты электрического поля $\mathbf{E}_\perp$ в сечении $z=\zeta_0=z_1$. Учтем, что на фланцах $z=\zeta_j$, $j=0$, $\rho_0^{(s)}<r<r_j^{(s)}$ электрическое поле $\mathbf{E}_\perp(r,\zeta_j)=0$, внутри блоков $D_j^{(s)}$, $s\in\{0;1\}$, выражение поперечной компоненты электрического и магнитного поля в сечении $z=\zeta_j$ имеет вид:

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}_{j,\perp}^{(s)}(r,\varphi,\zeta_j)=\sum_{n=1}^{N_j^{(s)}}\left(\mathbf{V}_n^{(s)}+\mathbf{W}_n^{(s)}\right)\mathbf{e}_{n,\perp}^{\Rightarrow}(r,\varphi),\ r_j^{(s)}<r<\rho_j^{(s)},\\&\mathbf{H}_{j,\perp}^{(s)}(r,\varphi,\zeta_j)=\sum_{n=1}^{N_j^{(s)}}\left(\mathbf{V}_n^{(s)}-\mathbf{W}_n^{(s)}\right)\mathbf{h}_{n,\perp}^{\Rightarrow}(r,\varphi),\ r_j^{(s)}<r<\rho_j^{(s)},\end{aligned}$$

в секции D_1 выражение поперечной компоненты в сечении $z=z_1$ имеет вид

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}_{1,\perp}(r,\varphi,z_1)=\sum_{n=1}^{N_1}\mathbf{V}_n\mathbf{e}_{n,\perp}^{\Rightarrow}(r,\varphi),\\&\mathbf{H}_{1,\perp}(r,\varphi,z_1)=\sum_{n=1}^{N_1}\mathbf{V}_n\mathbf{h}_{n,\perp}^{\Rightarrow}(r,\varphi),\end{aligned}$$

где $j = 0$. В качестве системы проекционных функций [1] используем $\mathbf{e}_{\perp m}^{(j+1)}(r)$:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{\perp m}^{(j+1)}(r) = \mathbf{e}_{\perp m}^{(j)}(r), \\ \mathbf{e}_{\perp m}^{(j+1)}(r) = \mathbf{e}_{\perp m}^{(j)}(r) \end{cases} \tag{3}$$

где $m = m_1 = 1,\ldots,N_1$, $j = 0$. То же проделаем для сшивания поперечной компоненты магнитного поля. Для правой границы каждого из блоков $D_1^{(s)}$, $s = 0;1$, в качестве системы проекционных функций используем координатные функции $\mathbf{h}_{\perp m}^{(j,s)}(r)$:

$$\begin{cases} \mathbf{h}_{\perp m}^{(j,s)}(r) = \mathbf{h}_{\perp m}^{(j)}(r), \\ \mathbf{h}_{\perp m}^{(j,s)}(r) = \mathbf{h}_{\perp m}^{(j)}(r) \end{cases} \tag{4}$$

где $s = 0;1$, $m_{sj} = 1,\ldots,N_j^{(s)}$, $j = 0$. Теперь пусть однородный блок слева прилегает к неоднородному блоку справа в сечении $\zeta_1 = z_2$. Аналогично получим

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{\perp m}^{(j+1)}(r) = \mathbf{e}_{\perp m}^{(j)}(r), \\ \mathbf{e}_{\perp m}^{(j+1)}(r) = \mathbf{e}_{\perp m}^{(j)}(r) \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \mathbf{h}_{\perp m}^{(j,s)}(r) = \mathbf{h}_{\perp m}^{(j)}(r), \\ \mathbf{h}_{\perp m}^{(j,s)}(r) = \mathbf{h}_{\perp m}^{(j)}(r) \end{cases} \tag{6}$$

для $m = 1,\ldots,N_{j+1}$, $j = 2$, $s = 0;1$, $m_{js} = 1,\ldots,N_j^{(s)}$. Составим матрицы $P^{(j,s)}$ размера $[N_j, N^{(s,j)}]$, $Q^{(j,s)}$ размера $[N^{(s,j)}, N_j]$, элементы которых равны

$$P_{mn}^{(j,s)} = \int_{D_j^{(s)}} \mathbf{e}_{\perp m}^{(j+1)}(r)\,\mathbf{e}_{\perp n}^{(j)}(r)\,dv, \quad m = 1,\ldots,N_{j+1},\ n = 1,\ldots,N_j^{(s)},$$

$$Q_{mn}^{(j,s)} = \int_{D_j^{(s)}} \mathbf{h}_{\perp m}^{(j)}(r)\,\mathbf{h}_{\perp n}^{(j,s)}(r)\,dv, \quad m = 1,\ldots,N_j^{(s)},\ n = 1,\ldots,N_{j+1}.$$

Запишем , в векторно-матричной форме:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{\perp}^{(j+1)} = P^{(j,0)}\mathbf{E}_{\perp}^{(j)}, \\ \mathbf{E}_{\perp}^{(j+1)} = P^{(j,1)}\mathbf{E}_{\perp}^{(j)} \end{cases} \tag{7}$$

здесь записано N_j условий в первой строке и $N_j^{(0)} + \ldots + N_j^{(S_j)}$ условий во второй строке. Из (5), (6) в векторно-матричной форме получим

$$[illegible] \tag{8}$$

Пусть $\zeta_j - z_j = d_j$ для $j = 1;2$, $z_{j+1} - \zeta_j = g_j$ для $j = 0;1;2$. Тогда

$$[illegible] \tag{9}$$

Условия Флоке дают такие уравнения для коэффициентных векторов на концах одной ячейки периодической структуры: $[illegible]$. Граничные условия на концах перекладины буквы Т имеют вид $[illegible]$, $[illegible]$. Собирая (8-9), получим однородную линейную систему с квадратной матрицей, зависящей от параметров κ и γ, а также от всех геометрических размеров системы. Требуется найти все (или некоторые) значения γ, при которых задача имеет нетривиальные решения. Запишем эту задачу в виде $L(\gamma)u = 0$. Здесь γ есть неизвестное волновое число, L есть оператор краевой задачи на собственные значения, включающий граничные условия и условия Флоке, u вектор неизвестных.

6. Метод гомотопии. Для решения мы предлагаем метод, основанный на использовании гомотопии [3], т.е. погружения задачи о собственных колебаниях в семейство задач, зависящих от параметра, который мы будем называть параметром гомотопии и обозначать τ. Рассмотрим вместе с $L(\gamma)u = 0$ семейство краевых задач $M(\gamma,\tau)u(\tau) = 0$. Предполагаем, что $M(\gamma,1) = L(\gamma)$ и оператор $M(\gamma,0)$ таков, что задача $M(\gamma,0)u = 0$ имеет известное решение u_0 (выражающееся аналитически через элеменарные функции) и соответствующее значение спектрального параметра γ_0. Для построения решения продифференцируем по τ:

$$[illegible]$$

Заметим, что однородное уравнение $M(du/d\tau) = 0$ имеет нетривиальное решение $u(\tau)$. Поэтому неоднородное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда имееет место условии ортогональности правой части каждому из решениеи однородного уравнения. Отсюда получим задачу Коши для дифференциального уравнения: $[illegible]$. Метод гомотопии и метод проекционного сшивания позволяют строить эффективные алгоритмы численного и аналитического расчета собственных волн периодических лестничных структур. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (проект 16-01-00690-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. М.К. Гавурин “Численные методы”. М.: Наука, 1971.
2. А.Г.. Свешников // Ж. вычисл. матем. и матем. физ.,1963. Т.3. С.314-326.
3. Дж. Касти, Р. Калаба “Методы погружения в прикладной математике”. М.: Мир, 1976.

Полностью консервативный алгоритм частичной дискретизации для нестационарных волновых процессов в периодических волноводно-лестничных структурах

А.А. Быков[1]
[1]*МГУ имени М.В.Ломоносова, физический факультет, кафедра математики.*
abkov@yandex.ru

Аннотация Представлен алгоритм расчета электромагнитного поля и электронного пучка, основанный на полностью консервативной гибридной дифференциальной -конечно -разностной модели. По пространственным координатам используется оператор дифференцирования на сетке, по временной координате система обыкновенных дифференциальных уравнений.

Метод крупных частиц с частичной дискретизацией. Гибридная модель основана на модели полной дискретизации по пространственным и временным координатам [1], [2]. Постановка задачи описана в [3]. Схема с частичной дискретизацией имеет вид $\frac{dp_n}{dt} = M_n \mathbf{g}(\mathbf{r}_n)$, $M_n \mathbf{v}_n = \mathbf{p}_n$, $M_n \frac{d\mathbf{r}_n}{dt} = \mathbf{p}_n$, причем $2M_n E_n^{(j)} = (\mathbf{p}_n^{(j)})^2$. Найдем плотность частиц и плотность потока на сетке: $\rho_k = \sum_{n=1}^{N} \frac{M_n}{|D_k|} h_k(\mathbf{r}_n)$, $\mathbf{J}_k = \sum_{n=1}^{N} \frac{M_n \mathbf{v}_n}{|D_k|} h_k(\mathbf{r}_n)$, h_k есть функция разбиения области, $|D_k|$ есть мера элемента разбиения, соответствующая ячейке k. Найдем $\frac{dE_n}{dt} = (\mathbf{p}_n^2/2M_n, \mathbf{g}(\mathbf{r}_n))$. Просуммировав по всем частицам, получим дискретный закон сохранения энергии частиц: $\sum_{n=1}^{N} \frac{dE_n}{dt} = \sum_{k=1}^{K} \left(\mathbf{J}(\mathbf{r}_k), \mathbf{g}(\mathbf{r}_n)\right) |D_k|$.

Нестационарное представление поля в подсоединенных волноводах. Общее решение уравнений Максвелла можно представить в виде суперпозиции волн TE и TM типа, бегущих в каждом из волноводов: $\mathbf{H}_\perp^{(j)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{h}_{k,j,\perp}^{TE}(x_j, y_j) A_{k,j}^{TE}(z_j, t) + \mathbf{h}_{k,j,\perp}^{TM}(x_j, y_j) A_{k,j}^{TM}(z_j, t)$. Аналогично выражаются компоненты $\mathbf{E}_\perp^{(j)}$. Из уравнений Максвелла следует, что коэффициенты разложения поля по полной системе нормальных волн удовлетворяют уравнению Клейна-Гордона $(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z_j^{\,2}} + (\gamma_j^{TE,TM})^2) A_{k,j}^{TE,TM} = 0$. Общее решение уравнений в продольно однородных участках $z_j > L_j$ имеет вид

$$A_{k,j}(z_j, t) = -c \int_{t_0}^{t - (z_j - L)/c} \frac{\partial A_{k,j}}{\partial z_j}(L_j, t) J_0(\gamma_j \sqrt{c^2(t-\tau)^2 - (z_j - L_j)^2}) d\tau .$$

Поэтому, положив $z_j = L_j$, получим $A_{k,j}(L, t) = -c \int_{t_0}^{t} \frac{\partial A_{k,j}}{\partial z_j}(L_j, t) J_0(\gamma_j c(t-\tau)) d\tau$.

Консервативная разностная схема. В отличие от работы [4] мы не вводим сетку по временной координате. Опишем поэтому только различие алгоритма [4]. Условия излучения примут вид $(H_\theta)_k(L, t) = -c \int_{t_0}^{t} \frac{\partial (H_\theta)_k}{\partial z}(L, \tau) J_0(\gamma_k c(t-\tau)) d\tau$, где

$(H_\theta)_k(z,t) = \left(H_\theta, h_k(r)\right)_r$, причем $\left(f,g\right)_r = 2\pi\int_a^b rf(r)g(r)dr$, и собственные функции $\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}rh_k = -\gamma_k^2 h_k$, $\left.\frac{drh_k}{dr}\right|_{r=a} = 0$, $\left.\frac{drh_k}{dr}\right|_{r=b} = 0$. Введем целые и полуцелые ($\star$) сетки $\Omega_R = \{r_p\}$, $r_p = r_0 + ph_r$, $\Omega_Z = \{z_q\}$, $z_q = z_0 + qh_z$, $\Omega_{RZ} = \Omega_R \times \Omega_Z$, $\Omega_{\star R} = \{\star r_p\}$, $\star r_p = r_0 + (p+1/2)h_r$, $\Omega_{\star Z} = \{\star z_q\}$, $\star z_q = z_0 + (q+1/2)h_z$, $\Omega_{\star RZ} = \Omega_{\star R} \times \Omega_Z$, $\Omega_{R\star Z} = \Omega_R \times \Omega_{\star Z}$, $\Omega_{\star R\star Z} = \Omega_{\star R} \times \Omega_{\star Z}$. Аппроксимация операторов дифференцирования по пространственным переменным: $\frac{\Delta}{\Delta r} : F(\Omega_{RZ}) \to \Omega_{\star RZ}$, $\left.\frac{\Delta f}{\Delta r}\right|_{r_{p+1/2}, z_q} = \frac{f(r_{p+1}, z_q) - f(r_p, z_q)}{h_r}$, и аналогично для $\Delta/\Delta z$. Обозначим гибридные двумерные пространственные сетки, получающиеся как декартово произведение соответствующей пары одномерных пространственных сеток. Введем сеточные функции E_R, E_Z, H_Θ, J_R, J_Z, J_Θ, и т.д. Гибридные дискретные уравнения Максвелла:

$$\frac{dE_R}{dt} = -c\frac{\Delta H_{\star\Theta}}{\Delta z} - 4\pi J_R,\ \frac{dE_Z}{dt} = \frac{c}{r}\left(\frac{\Delta(rH_\Theta)}{\Delta r}\right)^\star - 4\pi J_Z,\ \frac{dH_\Theta}{dt} = -c\left(\frac{\Delta E_R}{\Delta z} - \frac{\Delta E_Z}{\Delta r}\right)^\star - 4\pi J_\Theta,$$

дискретные граничные условия $E_Z(a, z_q, t) = 0, \quad E_Z(b, z_q, t) = 0,$ начальные условия ставятся очевидным образом. Энергия дискретной системы вычисляется так:

$$\varepsilon(E_R, E_Z, H_\Theta) = \frac{1}{4}h_r h_z\left(\sum_{\Omega R} rE_R^2 + \sum_{\Omega Z} rE_Z^2 + \sum_{\Omega\Theta} rH_\Theta^2\right).$$

Теорема 1. Для гибридной модели, включающей полудискретную модель метода крупных частиц и полудискретную модель полей, имеет место гибридный дискретный аналог закона сохранения энергии электромагнитного поля:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -2\pi h_r h_z\left(\sum_{\Omega Z} rE_{\star Z}J_Z + \sum_{\Omega R} rE_{\star R}J_R + \sum_{\Omega\Theta} rH_{\star\Theta}J_\Theta\right) + \frac{c}{4\pi} < H_\Theta\big|_{z=L}, E_R\big|_{z=L-h_z/2} >_r .$$

Таким образом, гибридная модель с частичной дискретизацией включает (1) нелинейную систему уравнений метода крупных частиц с электрическим и магнитным полем, (2) операторы вычисления плотности заряда и тока на пространственной сетке, (3) уравнение Пуассона для расчета электрического потенциала, (4) обыкновенные дифференциальные уравнения, аппроксимирующие уравнения Максвелла на сетке. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (проект 16-01-00690-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. М.В. Кузелев и др. // Матем. моделирование, 1:11 (1989), 34–40.

2. А.Р. Майков, А.Г. Свешников, С.А. Якунин // ЖВМиМФ, 30:12 (1990), 1785–1796.

3. А.А.Быков, А.Г. Свешников, А.Н. Боголюбов. “Математические модели микроволновых приборов с распределенным взаимодействием на основе полностью консервативных алгоритмов”. Волны-2018.

Решение жестких задач Коши с геометрически адаптивным выбором шага и заданной точностью

Е.К. Жолковский, А.А. Белов
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
физический факультет, Москва, Россия
zhozheka@gmail.com, aa.belov@physics.msu.ru

Большое количество задач физики и техники приводит к жестким системам ОДУ $du/dt = f$. Задача называется жесткой, если в ней есть процессы с сильно различающимися масштабами. Решение таких задач содержит следующие характерные участки: 1) пограничные слои с резким изменением решения, 2) плавные регулярные участки, 3) переходные зоны с большой кривизной решения, расположенные между пограничными слоями и регулярными участками.

В [1] был предложен метод автоматического выбора шага по геометрическим характеристикам интегральной кривой – ее кривизне и наклону. Новый шаг выбирается по формуле (1), где κ – кривизна интегральной кривой

$$h_n = h_s \,/\, \left(1 + \left(\kappa\,,\kappa\right)^{1/4}\right) \tag{1}$$

В данной работе предлагается экономичный способ вычисления кривизны, как второй производной решения по длине дуги (2). Этот способ экономичен и не требует вычисления матрицы Якоби.

$$\kappa_{\,n} = (f_n\text{-}f_{n-1}) \,/\, h_{n-1} \tag{2}$$

В качестве тестовой задачи с известным точным решением используется (3). На рис. 1 представлен вид решения в аргументе длины дуги L и времени T. Видно, что в аргументе L участок, имеющий большой наклон в аргументе T, имеет единичный наклон и маленькую кривизну.

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\lambda\cos(t)\,(u^2\text{-}a^2)^2}{u^2 + a^2}, \qquad a, \lambda = \text{const.} \tag{3}$$

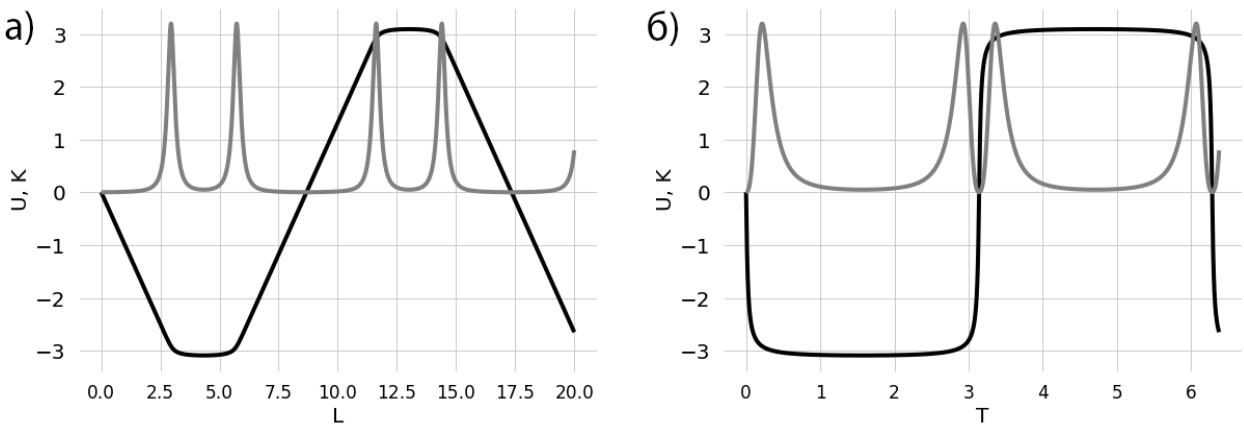


Рис. 1. Расчет задачи (3). а) Вид решения и кривизны в аргументе длины дуги кривой а) и времени б)

Расчет проводится в два этапа. Первый – расчет с адаптивным выбором шага, на каждом сгущении начальный шаг h_s уменьшается в два раза. Сетка сгущается до тех пор, пока узлы следующей сетки не станут достаточно близки к четным узлам предыдущей. Это означает, что решение близко к истинному. Второй этап заключается в квазиравномерном сгущении сетки, полученной на первом этапе. Четные узлы следующей сетки совпадают с узлами предыдущей.

Были проведены расчеты тестовой задачи (3) с помощью двух схем. Первая – обратная схема Рунге-Кутты с точным вычислением матрицы Якоби. Вторая – явная схема Рунге-Кутты четвертого порядка точности с вычислением кривизны предложенным способом по формуле (2).

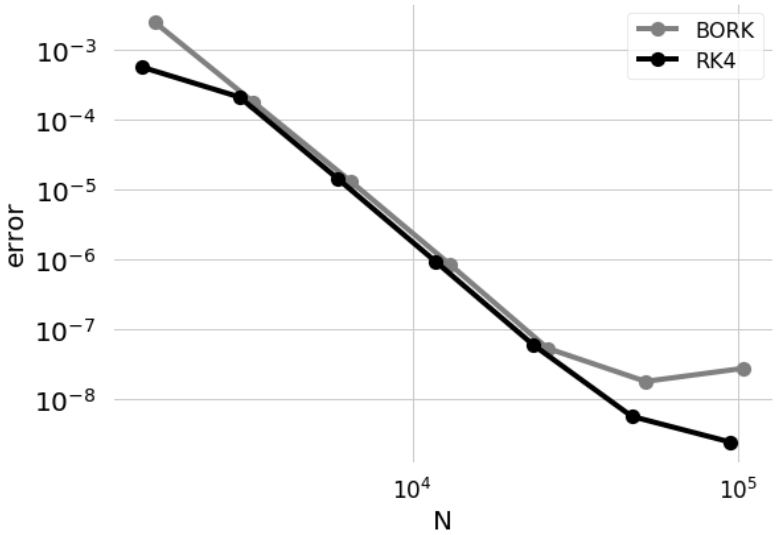


Рис. 2. Расчет задачи (3).

На рис. 2 показаны оценки точности по методу Ричардсона. Для обеих схем наблюдается теоретическая сходимость. Видно, что явная схема не уступает по точности неявной. Таким образом, применение автоматического выбора шага позволяет использовать явные схемы даже для задач с высокой жесткостью.

Авторы выражают искреннюю благодарность Н.Н. Калиткину за внимание к работе, ценные замечания и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.А. Белов, Н.Н. Калиткин // Математическое моделирование. 2016. Т. 28. № 11. С. 97-112.

2. А.А. Белов, Н.Н. Калиткин // Математическое моделирование. 28:10 (2016), 97–109.

3. А.А. Белов, Н.Н. Калиткин «Численные методы решения задач Коши с контрастными структурами» // Моделирование и анализ информационных систем. 23:5 (2016), 528–537.

Математические задачи теории дифракции на телах сложной формы

И.Е. Могилевский, А.Н. Боголюбов, В.В. Ровенко
МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет
mogilev@phys.msu.ru

В настоящее время весьма актуальными являются задачи дифракции электромагнитного поля на сложных диэлектрических структурах при наличии ребер на их границах. Волноводы сложного сечения (ВСС) находят широкое применение при конструировании различных СВЧ-устройств, таких как антенны, фильтры, поляризаторы, мультиплексоры и др. [1-5]. Применение ВСС позволяет создавать устройства, превосходящие по своим параметрам их аналоги на прямоугольных и круглых волноводах. Включение продольных металлических выступов в волновод позволило улучшить ряд его характеристик, в частности, существенно расширить полосу частот одномодового режима работы [2-5].

В последние два десятилетия наблюдается бурное развитие специализированных программных пакетов компьютерного моделирования различных высокочастотных радиотехнических задач прямыми численными методами, что позволяет на сегодняшний момент решить в строгой постановке практически любую задачу анализа многих волноводных элементов и устройств, в том числе и на волноводах со сложным поперечным сечением. Однако, как показывают многочисленные исследования [1-4], решение задач синтеза, особенно в случае наличия большого числа свободных параметров геометрии, оказывается практически невыполнимо в отсутствии хорошего начального приближения, поскольку либо требует огромного времени счета, либо вообще не приводит к конечному результату. Поэтому развитие базы численно-аналитических методов и поиск новых прототипов, позволяющих с достаточно высокой скоростью и точностью решать широкий круг задач, связанных с электродинамическим анализом и синтезом ряда ключевых радиотехнических устройств на волноводах сложного сечения является важной и востребованной задачей для разработчиков аппаратуры сантиметрового и миллиметрового диапазонов [1].

Известно, что наличие ребер на границах и поверхностях разрывов диэлектрической проницаемости приводит к появлению особенностей у электромагнитного поля в окрестности особой точки границы или неоднородности заполнения [5-6,9]. Одним из способов преодоления этих проблем является выделение особенности решения в явном виде, то есть построение асимптотики по гладкости электромагнитного поля в окрестности ребра в волноводе [9]. При этом существенно используются результаты по асимптотике решения эллиптических краевых задач, представленные в работе В.А. Кондратьева [8], а также С.А. Назарова и Б.А. Пламеневского [7]. Здесь и далее под словом «асимптотическое представление» имеется в виду запись решения в виде суммы сингулярной и гладкой частей.

Рассмотрен ряд задач, посвященных выделению сингулярной части электромагнитного поля в окрестности ребер границы, поверхностей разрыва диэлектрической проницаемости, в окрестности ребра металло-диэлектрического клина, в окрестности конической точки. Хотя физические и математические постановки этих задач значительно различаются, каждая из них приводит к эллиптическому дифференциальному уравнению с различными дополнительными условиями, и в основе построения сингулярной части электромагнитного поля лежит общий метод выделения сингулярной части решения эллиптических краевых задач, впервые предложенный В.А. Кондратьевым [8].

В качестве иллюстрации приведем выделение сингулярной части электромагнитного поля в задаче дифракции электромагнитной волны на диэлектрической клиновидной структуре (зависимость от координаты *z* отсутствует). Предполагается, что электромагнитное поле имеет гармоническую зависимость от времени вида $e^{-i\omega t}$. Магнитная проницаемость среды $\mu \equiv 1$. Диэлектрическая проницаемость ε — кусочно непрерывная скалярная вещественная функция.

Полное поле удовлетворяет системе уравнений Максвелла

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\ \mathbf{E} = ik\mathbf{H}, \\ \mathrm{rot}\ \mathbf{H} = -ik\varepsilon\mathbf{E}, \end{cases} \tag{1}$$

где $k = \dfrac{\omega}{c}$ — волновой вектор, и условиям сопряжения на границе раздела диэлектриков

$$\begin{gathered} \mathbf{H}\cdot\mathbf{n}\Big|_C = 0, \Big[\ \mathbf{H}\times\mathbf{n}\ \Big]\Big|_C = 0, \\ \Big[\ \varepsilon\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\ \Big]\Big|_C = 0, \Big[\ \mathbf{E}\times\mathbf{n}\ \Big]\Big|_C = 0, \end{gathered} \tag{2}$$

где *C* — плоскость разрыва диэлектрической проницаемости, $\mathbf{n}$ — вектор нормали.

Полное поле ищется в виде суммы падающего и дифрагированного полей

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \tilde{\mathbf{E}}, \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \tilde{\mathbf{H}}.$$

Для компонент дифрагированного поля ставятся условия излучения Зоммерфельда на бесконечности.

Вводится цилиндрическая система координат, ось Oz которой направлена вдоль ребра клина. Для компонент электрического поля из (1) можно получить следующую задачу:

$$\begin{gathered} \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\ rE_\varphi\ \right\} = -k^2\varepsilon E_r, \\ \frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\ rE_\varphi\ - \frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial r}\right\} = -k^2\varepsilon E_\varphi, \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial\varphi^2} = -k^2\varepsilon E_z, \end{gathered}$$

с условиями сопряжения $\left[\varepsilon E_\varphi\right]\Big|_C = 0, \left[E_r\right]\Big|_C = 0, \left[E_z\right]\Big|_C = 0$ и дополнительным условием

$$\mathrm{div}\ \varepsilon\mathbf{E}\ = 0, \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\ r\varepsilon E_r\ + \frac{1}{r}\frac{\partial\ \varepsilon E_\varphi}{\partial\varphi} = 0. \tag{3}$$

Чтобы провести исследование поведения электромагнитного поля в окрестности ребра диэлектрического клина, сначала данная задача рассматривается на всей плоскости с бесконечным клином. В дальнейшем использование срезающей функции позволяет свести задачу дифракции на конечном объекте к задаче на всей плоскости с бесконечным клином. После преобразований получим:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_r}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}\right)=-\frac{2\alpha}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}(r,0)\delta(\varphi)+\frac{2\alpha}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}(r,0)\delta(\varphi-\omega_0)-$$
$$-\frac{2\alpha}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\ r\varepsilon E_\varphi(r,0)\ \delta(\varphi)+\frac{2\alpha}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\ r\varepsilon E_\varphi(r,\omega_0)\ \delta(\varphi-\omega_0)+f_r(r,\varphi), \quad (4)$$

где $\alpha=\dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}$, $f_r(r,\varphi)=-k^2\varepsilon E_r$. Дополнительное условие (3) принимает вид:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}-\frac{2\alpha}{r}\ \varepsilon E_\varphi(r,0)\ \delta(\varphi)+\frac{2\alpha}{r}\ \varepsilon E_\varphi(r,\omega_0)\ \delta(\varphi-\omega_0)=0.$$

С помощью метода выделения особенности электромагнитного поля в окрестности ребра удается получить следующее представление радиальной компоненты электрического поля в окрестности ребра диэлектрического клина:

$$E_r(r,\varphi)=\chi\sum_{-\delta<\nu_k^{(1)}<1} r^{\nu_k^{(1)}-1}\ C_k^{(1)}\cos\left[\ \pi-\varphi\ \nu_k^{(1)}\right]+D_k^{(1)}\cos\left[\ \pi-|\ \omega_0-\varphi\ |\ \nu_k^{(1)}\right]\ +$$
$$+\chi\sum_{-\delta<\nu_k^{(2)}<1} r^{\nu_k^{(2)}-1}\ C_k^{(2)}\cos\left[\ \pi-\varphi\ \nu_k^{(2)}\right]+D_k^{(2)}\cos\left[\ \pi-|\ \omega_0-\varphi\ |\ \nu_k^{(2)}\right]\ +\Re(r,\varphi).$$

где $\nu_k^{(1)}$ и $\nu_k^{(2)}$ — решения уравнений

$$\sin\pi\nu_k^{(1)}-\alpha\sin\ \pi\nu_k^{(1)}-\nu_k^{(1)}\omega_0\ =0,$$
$$\sin\pi\nu_k^{(2)}+\alpha\sin\ \pi\nu_k^{(2)}-\nu_k^{(2)}\omega_0\ =0,$$

(кроме $\nu_k=0$), $\chi(r)=\begin{cases}1, & r\le d/2,\\ 0, & r>d,\end{cases}$ $\chi(r)\in C^\infty$ — срезающая функция, $\Re(r,\varphi)$ — гладкая часть решения, для которой получена оценка в соответствующей норме.

Исследование показало, что главную особенность имеет именно электрическое поле. Сама продольная компонента электрического поля ограничена в окрестности угловой точки, а ее производная имеет степенную особенность. Похожая ситуация имеет место и в других рассмотренных задачах.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.В. Земляков, Г.Ф. Заргано // Известия ЮФУ. Технические науки. 2016. №5 (178). С. 126-134.

2. Г.Ф. Заргано, В.В. Земляков, В.В. Кривопустенко // Физика волновых процессов и радиотехнические системы 2012. Т.15. №1.

3. Заргано, Г.Ф., Земляков, В.В. // Антенны, 2011. Вып. 7 (170). – С. 64-73.

4. А.А. Гадзиева, В.В. Земляков, С.В. Крутиев // Инженерный вестник Дона. 2013. Т.24. №1. С.24-29.

5. Г.Ф. Заргано, В.В. Земляков, В.В. Кривопустенко // Радиотехника и электроника. 2011. Т.56. № 3. С. 285-294.

6. А.Н. Боголюбов, И.Е. Могилевский, А.Г. Свешников // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т.55. № 3. С.446.

7. С.А. Назаров, Б.А. Пламеневский «Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей». М.: Наука — 1991.

8. В.А. Кондратьев // Труды Московского Математического Общества. Т. 16. 1967. С. 227.

9. А.Н. Боголюбов, А.Л. Делицын, И.Е. Могилевский, А.Г. Свешников // Радиотехника и электроника. 2003. Т.48. №7. С.787.

10. А.Л. Делицын // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т.39. № 2.С.315-322.

11. А.Н. Боголюбов, И.Е. Могилевский // Труды российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи им. А.С. Попова, серия Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации. Т. 9. С. 33-35.

12. А.Н. Боголюбов, А.И. Ерохин, И.Е. Могилевский, М.И. Светкин // Вестник МГУ. Серия 3. Физика. Астрономия. 2017. № 1. С. 17.

Модели сцинтилляции сигналов при распространении по трансионосферным линиям связи

Л.Е. Назаров, В.В. Батанов
Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН, г. Фрязино
nazarov@ire.rssi.ru, bvitaly@inbox.ru

Сцинтилляции (замирания) сигналов при распространении по спутниковым трансионосферным линиям передачи вызываются возмущениями ионосферы, которые проявляются в случайном образовании неоднородностей электронной концентрации [1]. Эти неоднородности определяют рассеяние радиоволн и их многолучевое распространение, что обусловливает фазовые и амплитудные вариации сигналов. В докладе приведены описания соответствующих математических моделей [1-4].

Плотность распределения амплитуды $p(A)$ сигналов при распространении по трансионосферной линии передачи описывается законом m-распределения Накагами $p(A)=\frac{2}{\Gamma(m)}\left(\frac{m}{P_{r,фл}}\right)^m A^{2m-1}exp\left(-\frac{mA^2}{P_{r,фл}}\right)$. Здесь $P_{r,фл}$ - флуктуационная составляющая мощности сигналов; $m\geq 1/2$ - параметр замираний, $m=\frac{\Omega^2}{<(A^2-\Omega)^2>}$, $\Omega=<A^2>$ [1,2]. При описании ионосферы вводится индекс мерцаний $S_4=\frac{<A^4>-<A^2>^2}{<A^2>^2}$, $\frac{\sqrt{m^2-m}}{m-\sqrt{m^2-m}}\approx\frac{4}{S_4}$ [1-3].

Модель ионосферы, поясняющая многолучевое распространение сигналов, представляется в виде а) однородного слоя F; б) тонкого неоднородного слоя, расположенного на нижней границе слоя F ионосферы и описываемого статистическими характеристиками электронной концентрации слоя F ионосферы [3].

Известно выражение для средней мощности сигналов на выходе линии $P_r=\frac{1}{2}|<\dot{u}_r(t)>|^2=P_{r,\text{р}}+P_{r,\text{фл}}$. Здесь $P_{r,\text{р}}$ - регулярная составляющая. Для оценивания $P_{r,\text{р}}$ и $P_{r,\text{фл}}$ используют теорию дифракции на ионосферных неоднородностях. В этом случае известно выражение $P_r=|U_0|^2\exp(-\sigma_\varphi^2)+|U_0|^2(1-\exp(-\sigma_\varphi^2))$. Здесь $\dot{U}_0$ - комплексная огибающая поля на входе; σ_φ^2 - дисперсия флуктуаций фазового фронта на выходе неоднородного ионосферного слоя.

Оценки дисперсии σ_φ^2 для известных экспериментальных данных нормальной ионосферы средних широт достигают значений $\sigma_\varphi^2\in 0.0275...0.350$ рад^2, индекс мерцаний равен $S_4\approx 0.28$ и $m=3.57$. В таблице 1 приведены вероятности замираний сигналов $\Pr(A<\alpha A_0)$ для $\alpha=0.5$ (замирания 6 дБ), $\alpha=0.64$(замирания 4 дБ), $\alpha=0.71$ (замирания 3.0 дБ), вычисленные с использованием закона m-распределения Накагами.

На рис.1 в качестве примера приведена зависимость сигнал/помеха от времени, полученная ФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН в результате обработки тестовых радиосигналов спутниковой информационной системы, функционирующей в Р-частотном диапазоне (406 МГц). По оси абсцисс отложены значения времени (сек), по

оси ординат отложены значения отношения сигнал/помеха P_c / N_0 (дБ), здесь P_c - мощность сигналов, N_0 - эффективная спектральная плотность шумов в частотной полосе сигналов (100 кГц). Видны вариации значений сигнал/помеха ± 3 дБ относительно среднего значения, определяемые, в основном, сцинтилляцией сигналов за счет влияния трансионосферной линии передачи.

В докладе приведены результаты обработки сигналов при их распространении по ионосферной линии Р- частотного диапазона с целью исследования характеристик ее временной стационарности.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №16-07-00746).

Таблица 1. Вероятности замираний сигналов $\Pr(A < \alpha A_0)$.

α	0.5(замирания 6 дБ)	0.64(замирания 4 дБ)	0.71(замирания 3 дБ)
$\Pr(A < \alpha A_0)$	0.019	0.063	0.104

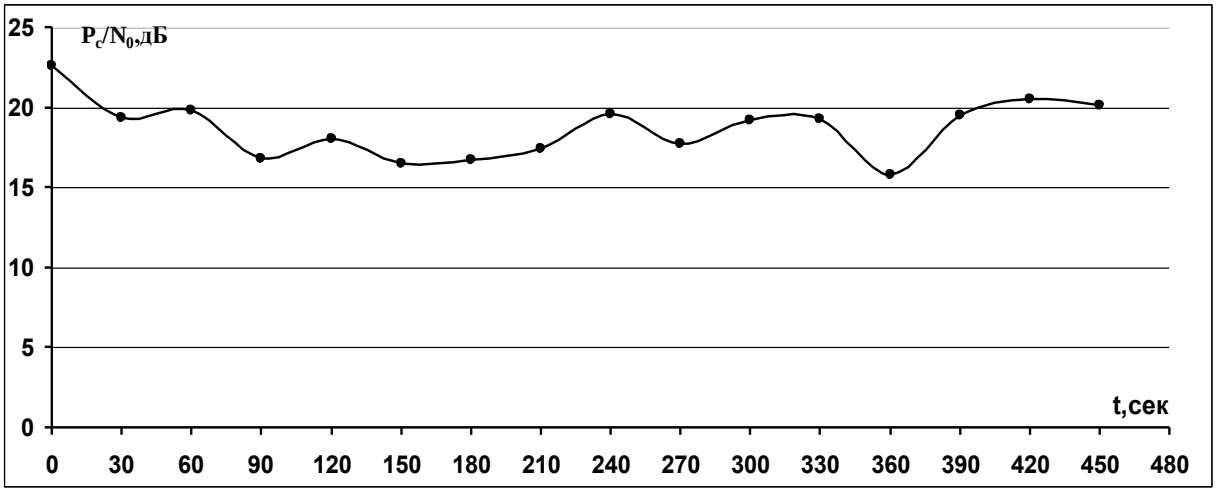


Рис.1. Зависимость сигнал/помеха от времени (получена ФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН в результате обработки тестовых радиосигналов спутниковой информационной системы в Р- частотном диапазоне).

ЛИТЕРАТУРА

1. R.K. Crane Ionospheric Scintillation. // Proceeding of IEEE. 1977. N2. P.180-199.
2. Р.К. Крейн //ТИИЭР. 1977. Т.65. №2. С. 5-29.
3. V. Beniquel et. al.// Annals of Geophysics. 2004. Supplement to Vol. 47. N2/3. P.1179-1199.
4. Л.Е. Назаров, В.В. Батанов // Электромагнитные волны и электронные системы. 2016. Т.21. №5. Стр. 37-45.

Анализ влияния ионосферы на вероятностные характеристики приема сигналов с фазовой манипуляцией в спутниковых системах передачи информации

Л.Е. Назаров, В.В. Батанов, З.Т. Назарова
Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН, г. Фрязино
nazarov@ire.rssi.ru, bvitaly@inbox.ru

При распространении по спутниковым трансионосферным линиям передачи сигналы испытывают искажения за счет влияния ионосферы как дисперсионной среды [1-3]. Эти искажения приводят к энергетическим потерям при корреляционной обработке в системах синхронизации и демодуляции сигналов по отношению к распространению в свободном пространстве. Суть искажений - изменение огибающей сигналов и возникновение межсимвольных (МСИ) и межканальных (МКИ) интерференционных помех в дополнение к тепловым аддитивным шумам.

Актуальной является проблема оценивания этих энергетических потерь. В докладе при решении этой проблемы рассматриваются сигналы с фазовой и амплитудно-фазовой манипуляцией (ФМ4, ФМ8, APSK), используемые в приложениях.

Основу анализа распространения сигналов по ионосферным линиям представляет решение волнового уравнения $\frac{d^2E(z,f)}{dz^2}+\frac{(2\pi)^2 f^2}{c^2}\varepsilon(z,f)E(z,f)=0$ относительно плоской волны $E(z,f)$ с частотой f, нормально падающей на слой неоднородной среды с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(z,f)$ и распространяющейся по оси z [3]. Здесь c - скорость света.

Известно решение уравнения (1) в виде приближения геометрической оптики для неоднородной ионосферы $E(z,t)=E(0,t)\exp\left(-\frac{j2\pi f}{c}\int_0^z\sqrt{\varepsilon(z,f)}dz\right)$ [3].

При распространении сигналов с цифровой манипуляцией $s(t)$ с частотной полосой ΔF задача их описания усложняется - каждая спектральная компонента в составе спектра сигналов ΔF при распространении приобретает частное фазовое смещение $\Delta\varphi(z,f)$ за счет дисперсионных свойств неоднородной ионосферы [4,5].

Коэффициент диэлектрической проницаемости ионосферы $\varepsilon(z,f)$ в виде неоднородной сферически-симметричной среды задается соотношением $\varepsilon(z,f)=1-f_p^2(z)/f^2$ [1]. Здесь $f_p(z)=\sqrt{80.8N_э(z)}$ - собственная частота ионосферы (кГц); $N_э(z)$ - электронная плотность ионосферы (эл/см^3) на высоте z.

Известные методы описания сигналов при их распространении основаны на представлении действия ионосферных линий в виде линейной стационарной фильтрации [2-4]. Сигнал $\hat{s}(t)$ на выходе линии имеет вид $\hat{s}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\dot{S}(f)\dot{H}(z,f)\exp(j2\pi f)df$. Здесь $\dot{S}(f)$ - спектр сигнала $s(t)$; $\dot{H}(f,z)=\exp(j2\pi f\tau(z,f))=\exp\left(j2\pi f\int_0^z\frac{dx}{c_ф}\right)$ - коэффициент передачи; $c_ф=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon(f,z)}}$ - фазовая скорость.

Искажения сигналов при корреляционной обработке обусловливают энергетические потери ΔE по отношению к распространению в свободном пространстве. Оценивание энергетических потерь ΔE производится на основе сравнительного анализа вероятностей $P_б$ информационных битов для сигналов без искажений $s(t)$ и с искажениями $\hat{s}(t)$.

В докладе приведены результаты оценивания энергетических потерь ΔE. Параметры моделируемой ионосферной линии - модель дневной ионосферы, высота линии передачи $z = 400$ км, центральная частота $f_0 = 400$ МГц. Варьируемые параметры - длительность сигналов T ($\Delta F = \frac{2}{T}$), отношение сигнал/помеха $\frac{E_S}{N_0}$; угол направления линии прямой видимости $\theta_A = 0^0 ... 80^0$.

На рис.1 приведены вероятности ошибки $P_б$ для сигналов длительностью $T = 40$ нс от значений $\frac{E_S}{N_0}$. Кривая 1 соответствует распространению в свободном пространстве, кривые 2, 3 и 4 соответствуют распространению по ионосферной линии с углами $\theta_A = 0^0$, 60^0 и 80^0. Для $P_б = 10^{-5}$ и $\theta_A = 0^0$ значения ΔE достигают 4 дБ по отношению к распространению в свободном пространстве. Для $\theta_A = 60^0$, 80^0 и $\frac{E_S}{N_0} > 23$ дБ вероятности ошибочного приема практически постоянны - $P_б = 0.000085$ ($\theta_A = 60^0$) и $P_б = 0.0005$ ($\theta_A = 80^0$), что объясняется влиянием помех МСИ и МКИ.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №16-07-00746).

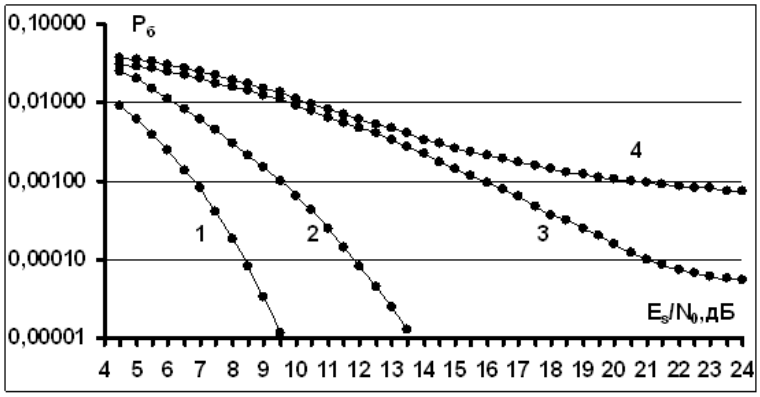


Рис.1. Вероятности ошибочного приема сигналов ФМ4 (длительность сигналов Т = 40 нс): 1 – распространение в свободном пространстве; 2, 3, 4 – распространение по ионосферной линии с углами $\theta_A = 0°$, $\theta_A = 60°$, $\theta_A = 80°$

ЛИТЕРАТУРА

1. М.П. Долуханов «Распространение радиоволн». М.: Гос. Издательство по вопросам связи и радио. 1960.

2. В.Л. Гинзбург «Распространение электромагнитных волн в плазме». М.: Наука. 1967.

3. Л.Е. Назаров, В.В. Батанов // Электромагнитные волны и электронные системы. 2016. Т.21. №5. Стр. 37-45.

4. Л.Е. Назаров, В.В. Батанов // Радиотехника и электроника. 2017. Т.62. №9. Стр.866-874.

Вейвлет-анализ аудиосигналов и синтез речи

С.А. Никоноров, А.Н. Боголюбов
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, физический факультет
nics1543@gmail.com

Необходимость анализа и синтеза сигналов разного рода возникла достаточно давно и актуальна до сих пор [1]. Для этого применяется большое количество различных методов, среди которых нельзя не выделить Фурье-анализ как один из наиболее общих методов анализа и обработки сигналов. Однако для изучения процессов с меняющимися во времени характеристиками более подходящим инструментом является вейвлет-анализ [2, 3], который лежит в основе идеи алгоритма анализа и синтеза аудиосигналов, представленного в данной работе. Слово “wavelet” (с фр. “ondelette”) означает небольшие волны, следующие друг за другом. Можно без преувеличения сказать, что вейвлеты произвели революцию в области теории и практики обработки нестационарных сигналов. Вейвлет-преобразование — относительно новая эффективная технология, позволяющая проводить обработку сигналов различного типа. Существует множество исследований по использованию данного преобразования для сжатия звука, в ходе которых было показано, что данный вид функций позволяет выделять различные характеристики аудиосигналов. Это свойство обусловливает возможность применения вейвлет-преобразования для анализа звуковых данных с последующим использованиям полученных сведений не только для их компрессии, но и для решения ряда других задач [4].

Задача синтеза речи была поставлена достаточно давно, однако она актуальна и на сегодняшний день: установлено, что речь является для человека наиболее удобным и естественным способом обмена информацией. Это означает, что при таком способе человек допускает меньше ошибок, меньше устаёт, быстрее реагирует, а скорость обмена информацией выше, чем при других способах – визуальном, тактильном, тонально-звуковом [5]. Поэтому, когда возникает необходимость в обмене информацией между человеком и, например, ЭВМ, на настоящий момент используются не только визуальные и/или тактильные средства (монитор, клавиатура, мышь), но и голосовые (системы распознавания и синтеза речи).

В наше время разработано несколько подходов к решению задачи синтеза речи. Подход, основанный на “склеивании” заранее записанных слов и фраз даёт высокое качество речи и в наши дни весьма распространён (объявления на вокзалах, аэропортах, метро и т.д.). Однако системы, реализующие данный метод синтеза, способны воспроизводить весьма ограниченный набор фраз. Для решения задачи “озвучивания” произвольного текста наиболее распространены метод конкатенации и метод полного синтеза речи по правилам, который в свою очередь может быть реализован несколькими способами. Метод конкатенации представляется достаточно очевидным и “естественным” – он заключается в “склеивании” полуслогов (полуслог – это сочетание целого согласного и половины гласного звука). Каждый полуслог записывается в виде аудиофайла и сохраняется в базу. При синтезе по введённому тексту каждому слогу сопоставляется соответствующий аудиофайл из базы, а на границе стыка фонем выполняется “сшивка” функций, представляющих собой зависимость амплитуды аудиосигнала от времени. Конкатенационный метод синтеза речи даёт хорошие результаты при аккуратной обработке и сшивке фонем. В частности, этот метод применяется в таких синтезаторах речи, как UTAU и Vocaloid (японские синтезаторы поющего голоса).

Тем не менее, нельзя не принимать во внимание некоторые существенные недостатки данного подхода к синтезу речи:

1) в моменты состыковки фонем возникают “артефакты” (на слух воспринимаемые как резкое изменение амплитуды и/или частоты звука), связанные с недостаточными требованиями на гладкость сшивки;

2) для изменения высоты тона и/или длительности фонемы, как правило, применяется преобразование Фурье (в составе алгоритма ресемплинга), которое тоже вносит свой вклад в образование звуковых дефектов.

Заметим, что данные дефекты генерируемого звукового сигнала возникают в основном из-за того, что мы работаем с временным его представлением. Их можно избежать, если работать с частотным представлением сигнала – проблема точного преобразования для изменения высоты тона или тембра звука при этом отпадает сама собой. В частности, в синусоидальном способе синтеза речи используется как раз частотное представление фонем. Основная идея данного подхода заключается в том, что речепроизводящий аппарат человека рассматривается как резонатор, в котором могут генерироваться колебания только некоторого ограниченного набора частот [6]. Однако, в отличие от артикуляторного метода синтеза, при формантном методе моделируются не физиологические процессы образования речи, но результат этих процессов – акустические характеристики речевой волны [7 – 9].

В данной работе представлен алгоритм синусоидально-конкатенативного синтеза речи, который можно разбить на:

1) спектрально-временной анализ речевого аудиосигнала;

2) оптимизацию результатов анализа:

- отсечение несущественных гармоник;
- аппроксимация временных зависимостей оставшихся компонент сигнала;

3) конструктивный синтез речевого аудиосигнала.

Синтез сигнала в данном случае выполняется посредством генерации синусоидальных волн, зависимость частоты и амплитуды от времени которых определяется в результате вейвлет-анализа исходного речевого сигнала. По сути, для исходного сигнала строится аппроксимацию особого вида. Поставим задачу формально. Требуется построить аппроксимировать исходного сигнала функцией следующего вида:

$$S(t) = \sum_{g=0}^{G} s_g(t) = \sum_{g=0}^{G} A_g(t) \cdot \sin\left(\omega_{g_0} \cdot \left(t - k_{g_0}\right) + O_g(t)\right)$$

где

$$A_g(t) = a_{g_0} + \sum_{p=1}^{N_{A_g}} a_{g_p} \cdot \sin\left(\gamma_{g_p} \cdot \left(t - \varphi_{g_p}\right)\right)$$

$$O_g(t) = \sum_{p=1}^{N_{O_g}} c_{g_p} \cdot \sin\left(\omega_{g_p} \cdot \left(t - k_{g_p}\right)\right)$$

Назовём $s_g(t)$ g-й компонентой сигнала. Таким образом, задача алгоритма синусоидально-конкатенативного синтеза – определение оптимальных характеристик компонент исходного сигнала:

$\left\{a_{g_p}, \gamma_{g_p}, \varphi_{g_p}\right\}$ – амплитуды, частоты и фазы амплитуды g-й компоненты;

$\left\{c_{g_p}, \omega_{g_p}, k_{g_p}\right\}$ – амплитуды, частоты и фазы функции её частоты.

Как уже было указано, для анализа исходного речевого сигнала был реализован алгоритм непрерывного вейвлет-преобразования. Стоит отметить, что функция, полученная в ходе данного преобразования, избыточна – для определения параметров сигнала необходимо знать лишь расположение её локальных экстремумов (так называемый скелетон). Поэтому для её исследования был разработан алгоритм трассировки скелетона, который представляет собой двумерную задачу поиска серии экстремумов этой функции. Для её решения был применён модифицированный метод градиентного спуска (в связи со спецификой исследуемой функции в алгоритм поиска были введены эвристики, ускоряющие расчёт).

В данной работе были исследованы аудиофайлы голосовой базы Zuiga Mizuki, некоторые из них (файлы гласных звуков) были аппроксимированы при помощи предложенного алгоритма синтеза. На рисунке ниже представлены спектрограммы исходного и синтезированного сигналов для фонемы ‘И’ (по горизонтальной шкале – частота в Герцах, по вертикальной – Децибелы):

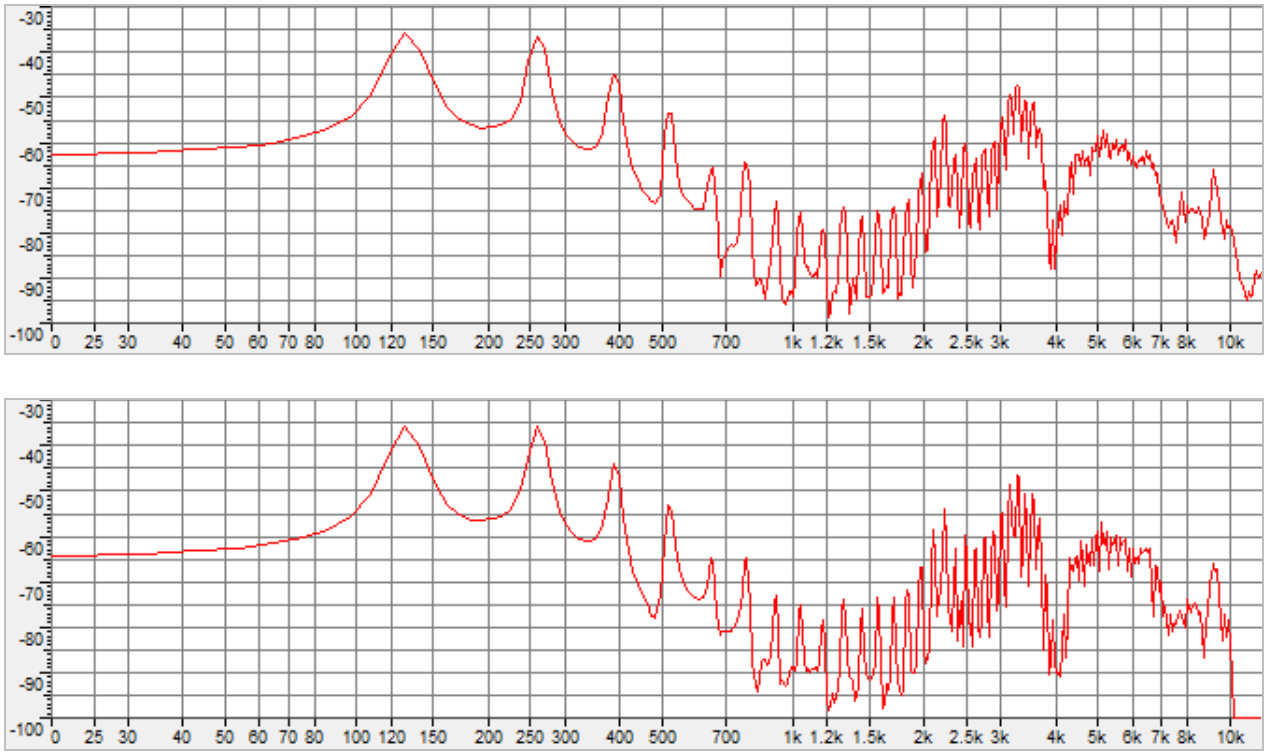


Рис. 1. Спектры исходного (сверху) и синтезированного (снизу) сигналов (фонема “и”).

Из графиков видно хорошее их согласование, хотя в высокочастотной области заметно их расхождение. Отметим также, что размер данных, потребовавшихся для восстановления сигнала, составил 29 Кбайт, что более чем в 3 раза меньше исходного объёма информации (102 Кбайт).

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Tzanetakis, G. Essl, P. Cook Audio analysis using the discrete wavelet transform.
2. K. Charles Chui. An Introduction to Wavelets. Department of Mathematics, Texas A&M University, College Station, Texas.
3. А.Н. Павлов. Методы анализа сложных сигналов: Учебное пособие для студентов физического факультета.
4. Е.В. Пиуновский, А.А. Тропченко. Анализ аудиоданных с помощью вейвлет-функций.
5. В.Н. Сорокин. Синтез речи. М: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992. 392 с.
6. Б.М. Лобанов, Л.И. Цирульник. Компьютерный синтез и клонирование речи. Минск, «Белорусская Наука», 2008. 316 с.
7. D.H. Klatt – Review of text-to-speech conversion for English. JASA. 1987.
8. Г. Фант Акустическая теория речеобразования. М.: Наука, 1964. 284 с.
9. J.M. Allen, Sharon Hunnicutt M., D.H. Klatt From text to speech – the MITalk system. Cambridge, MIT Press, 1987. 216 p.

Когерентность излучения в моделях мощных лазерных диодов

А.Г. Ржанов
Физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова
rjanov@mail.ru

Моделирование мощных лазерных диодов (ЛД) стало актуальным при появлении квантоворазмерных полупроводниковых структур, в которых спектральная линия оптического усиления на два порядка уже, чем в объёмных полупроводниках, а само оптическое усиление пропорционально выше [1]. В 80-х годах прошлого века появились работы по математическому моделированию динамических процессов в ЛД [2, 3], послужившие основой для создания современных моделей. Новые приборы с квантовыми ямами (КЯ) и широкой активной областью, выпускаемые в настоящее время, при конструировании требуют принципиально новых подходов к математическому моделированию динамики и статики их излучения.

Базовая модель, описывающая самосогласованное взаимодействие излучения, накачки и многослойной полупроводниковой структуры описана, например, в работах [4, 5]. В основе всех самосогласованных моделей ЛД лежат кинетические (скоростные) уравнения, которые описывают баланс неравновесных носителей и фотонов в активной области лазера. В распределённых моделях ЛД учитывается неоднородное по пространству взаимодействие между лазерным излучением и неравновесными носителями. От концентрации неравновесных носителей N зависит эффективная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\mathrm{N(y)})$ [6]. Основу самосогласованной модели ЛД составляет система дифференциальных кинетических уравнений в частных производных для концентраций носителей N и фотонов S, образующая кинетическую часть модели. Оптическую часть модели представляет волновое уравнение, преобразованное в уравнение Гельмгольца с учётом зависимости амплитуды поля от времени и аксиальной координаты z, в виде $E(\bar{r},t)=\psi(\mathrm{y})\cdot\exp(\mathrm{i}(\omega t-\beta z)$:

$$\frac{d^2\psi_j(\mathrm{y})}{dy^2}+\left(\frac{\omega_j^2}{c^2}\varepsilon(\mathrm{y})-\beta^2\right)\psi_j(\mathrm{y})=0, \qquad (1)$$

где ω_j - частота оптического излучения, β - продольная (по оси z) постоянная распространения, $\psi_j(\mathrm{y})$ - латеральные собственные функции (СФ). Зависимость от поперечной (трансверсальной) координаты x учитывается путём применения метода эффективного показателя преломления [6].

Собственными значениями (СЗ) уравнения (1) в случае лазерной задачи являются либо комплексные частоты мод ω_j, либо эффективные показатели преломления $n_{eff\,j}=c\beta/\omega_j$. В такой задаче продольная постоянная распространения β, как правило, выбирается для единственной продольной моды с номером M, и определяется длиной резонатора L и коэффициентами отражения зеркал R_1 и R_2. Решение задачи (1) даёт усиление поперечных мод $G_j(t)=-2\,\mathrm{Im}(\omega_j)$ и их профили $\psi_j(\mathrm{y})$.

Некоторые возможные подходы к решению самосогласованной модели ЛД изложены в работах [4, 5]. Такую схему можно считать базовой конфигурацией самосогласованной распределённой динамической модели ЛД, используя которую, можно решать различные задачи, адаптируя её к конкретным лазерным структурам.

Базовая модель предполагает принятие квазинепрерывного некогерентного приближения.

Квази-непрерывность относится к записи и решению кинетических уравнений и подразумевает, что итерационный расчёт в базовой модели проводится через шаги, превышающие время пробега оптической волны между зеркалами резонатора Фабри - Перо. Это время составляет несколько долей пикосекунды. В противном случае неправомерно будет решать кинетические уравнения для усреднённых по длине резонатора величин.

В некогерентном приближении мы полагаем, что фаза оптических колебаний прямой и обратной волн в планарном резонаторе ЛД успевает сбиться в течение нескольких проходов излучения по резонатору. Это позволяет нам воспользоваться уравнением (1) для вычисления формы поперечнного профиля поля излучения. С точки зрения электродинамики некогерентное приближение обосновывает переход к комплексной величине диэлектрической проницаемости и показателей преломления слоёв ЛД.

Кроме того, в базовой модели мы не рассматриваем эффекты теплового, поляризационного и спектрального характера, такие как: джоулев нагрев, нерезонансное поглощение излучения, спектральное "выжигание", внутризонная релаксация, поляризационная конкуренция. Практика расчётов показывает, что необходима разумная достаточность в учёте физических явлений, привлекаемых для создания базовой модели.

Пространственное разделение усиления и оптического ограничения в ЛД с использованием КЯ учитывается в базовой модели путём введения отдельных коэффициентов оптического заполнения для КЯ и для расширенного волновода [7]. Переход от объёмного материала активного слоя к квантоворазмерному толщиной 8-12 нм с выделением оптического волновода в отдельную структуру влечёт за собой изменения в расчёте эффективной диэлектрической проницаемости, коэффициентов оптического ограничения и модового усиления.

Важным обстоятельством, которое вызывает необходимость модернизации базовой модели, оказался переход к ЛД с широким контактом (ЛДШК), у которых ширина активной области составляет более 50 мкм [8]. Максимальная мощность излучения таких приборов может составлять более 20 Вт. Как отмечено в [9], "к мощным полупроводниковым лазерам можно отнести лазерные диоды, предназначенные для работы в непрерывном или квази-непрерывном режимах с выходной мощностью несколько десятков мВт с 1 мкм ширины полоска". Таким образом, ЛД с шириной активной области 100 мкм и мощностью излучения более 1 Вт можно называть мощным.

Базовая модель ЛД с некогерентным приближением хорошо работает в структурах с узким контактом (менее 50 мкм), но перестаёт работать в ЛДШК. Как показывает эксперимент, в мощных ЛДШК излучение распадается на нефазированные каналы генерации [10]. Причиной распада излучения на каналы являются следующие обстоятельства. Для того чтобы часть оптического излучения, находящаяся пространственно на краю активной области, могла быть связана по фазе с излучением на противоположном краю этой области, волновому фронту (лучу) необходимо не теряя когерентности сделать несколько пробегов от зеркала к зеркалу.

На рис. 1 схематично проиллюстрирована картина распределения параметров активного слоя по латеральной координате при развитой генерации в трёх каналах. Видно, что работает явление самофокусировки излучения в результате действия двух механизмов: пространственного "выжигания" неравновесных носителей вынужденным излучением в областях с максимальной интенсивностью оптического поля, и

нелинейной рефракции, обеспечивающей самофокусировку излучения в тех местах, где концентрация неравновесных носителей имеет локальные минимумы.

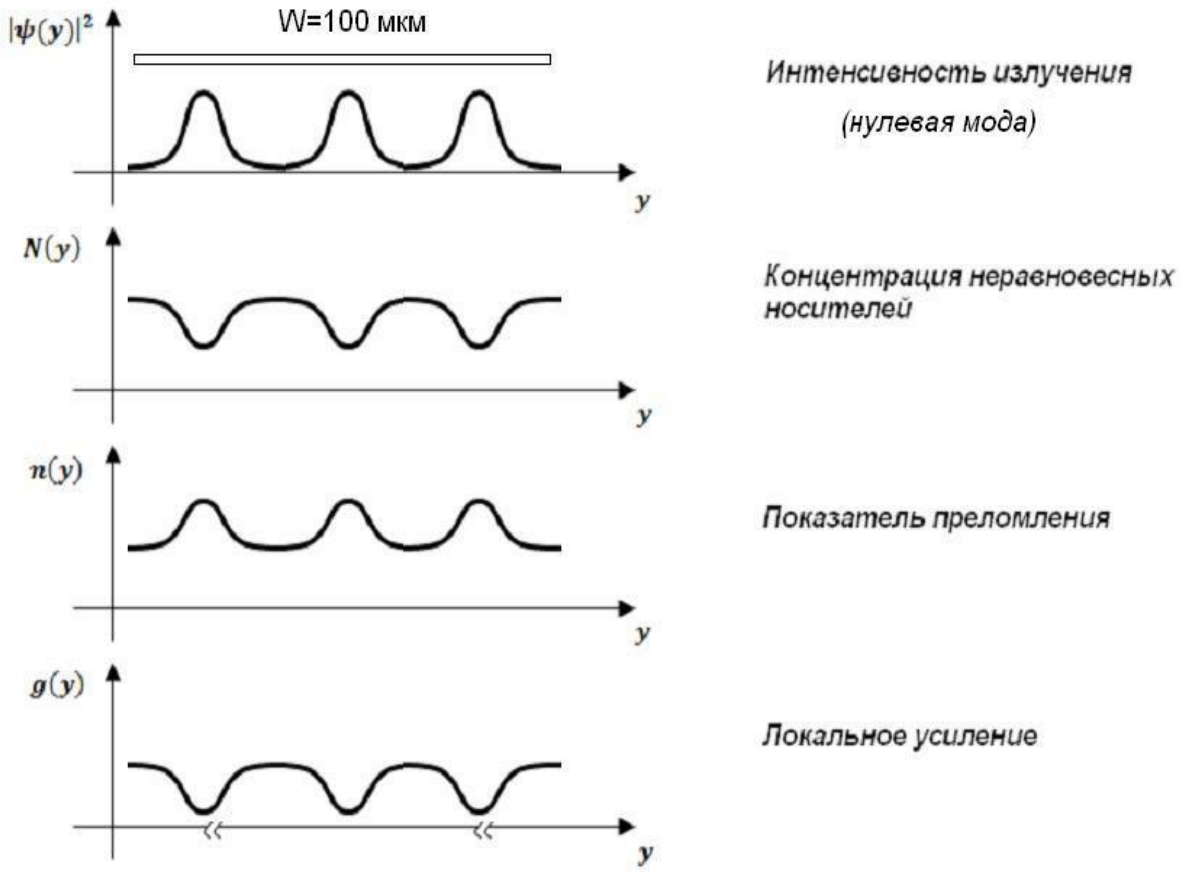


Рис. 1. Образование каналов генерации в ИЛ с широким контактом

В такой постановке задачи расчёт по теории дифракции с учётом кривизны волнового фронта даёт следующую оценку величины пробега, приведённую к вакууму:

$$L_{пр} = \frac{n^2 W^2}{\lambda}, \tag{2}$$

откуда следует, что число каналов генерации должно зависеть от длины когерентности лазерного излучения следующим образом:

$$N_{ch} \approx \frac{n^2 W^2}{\lambda L_{ког}}. \tag{3}$$

Измерения длины когерентности $L_{ког}$ многомодовых лазеров с использованием интерферометра Майкельсона показывают, что для ЛД она составляет примерно 5 см [11, 12]. При длине волны излучения в вакууме λ =0.9 мкм, ширине полоска W=100 мкм, эффективном показателе преломления n=3.6, длине когерентности $L_{ког}$ =5 см формула (3) даёт величину 2.88, то есть число каналов N_{ch} =3.Таким образом, следует ожидать появления в ЛДШК с указанными выше параметрами скорее всего трёх каналов генерации, что и наблюдалось в работах [10, 13].

Базовая самосогласованная распределённая модель при наличии нескольких каналов генерации перестаёт работать, так как нарушается возможность применения некогерентного приближения, являющегося основой модели.

Одним из путей выхода из возникших трудностей при составлении адекватной модели ЛДШК становится гибридная модель [13]. В рамках этой модели необходимо учитывать, что:

- в ЛДШК используются квантовые ямы, ширина основного контура усиления в которых составляет 4-6 нм по длине волны;
- ширина каналов генерации зависит от длины когерентности и от связанного с ней коэффициента нелинейной рефракции;
- количество каналов генерации, их пространственное и частотное расположение, невозможно рассчитать внутри базовой модели, поэтому это определяются вне её рамок из отдельных соображений и являются внешними параметрами;
- необходимо введение в модель коэффициента связи между длиной когерентности ЛД и параметром нелинейной рефракции $|dn/dN|$ активного слоя.

При таком подходе становится возможным делать оценки и моделировать динамику излучения ЛДШК, заранее оценивая число каналов генерации.

Таким образом, в работе показано, что при моделировании мощных ЛДШК необходим учёт длины когерентности излучения моделируемого прибора для того, чтобы появилась возможность учесть явление распада излучения на нефазированные каналы генерации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ж.И. Алферов // ФТП. 1998. Т. 32. № 3. С. 3.
2. J. Buus // IEEE J. Quant. Electron. 1982. V. QE-18. No. 7. P. 1083.
3. J. Buus // IEEE J. Quant. Electron. 1983. V. QE-19. No. 6. P. 953.
4. А.Г. Ржанов // Изв. РАН. Сер. физ. 2018. Т. 82. № 1. С. 6.
5. А.Г. Ржанов и др. // Вестн. РУДН. Сер. мат. инф. физ. 2009. Т. 3. № 65. С. 69.
6. “Волноводная оптоэлектроника”. п/ред. Т. Тамира. М.: Мир, 1991.
7. А.В. Мурашова и др. // ФТП. 2008. Т. 42. № 7. С. 882.
8. И.С. Тарасов // Квантовая электроника. 2010. Т. 40. №. 8. С. 661.
9. А.Е. Жуков. "Основы физики и технология полупроводниковых лазеров". СПб.: Изд-во Академ. ун-та. 2016. 364. С. Гл. 16. С. 291.
10. O.I. Koval et al. // Physics of Wave Phenomena. 2013. V. 21. No. 4. P. 287.
11. А.В. Лукин. // Оптический журнал. 2012. Т. 79. № 3. С. 91.
12. /holmich.htm#top (эл. журнал)
13. В.В. Близнюк и др. // Изв. РАН. Сер. физ. 2015. Т. 79. № 12. С. 1666.

Алгоритмы анализа характеристик дендритных структур

Д.Д. Ружицкая, Ю.В. Рыжикова, С.Б. Рыжиков
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет
ryzhikovaju@physics.msu.ru

Фрактальные объекты дендритной формы (дендритный тип пространственных распределений наночастиц, кристаллические дендриты, дендритные биосистемы и др.) получили широкое распространение в различных приложениях науки и техники [1-3]. Общетеоретические аспекты исследований самоорганизующихся нанокластерных систем дендритного типа имеют отношение к важной фундаментальной проблеме, направленной на установление общих закономерностей, определяющих связь между особенностями структуры фракталоподобных систем и их оптическими характеристиками. Всестороннее ее решение в свою очередь позволит усовершенствовать фрактальные методы оптической диагностики нанокластерных систем различной геометрии.

В данной работе указанная выше проблема рассмотрена на основе численного моделирования применительно к 2D дендритным структурам, сформированных под действием случайных факторов.

Несмотря на то, что алгоритмам построения дендритных объектов и изучению их самоподобных свойств посвящен ряд публикаций [см., например, 4-7], недостаточно изученным оказался вопрос о наличии количественной закономерности, определяющей взаимосвязь фрактальных свойств в пространственных спектрах (картины дифракции) с элементами самоподобия в просвечиваемых структурах. Кроме того, в литературе отсутствует однозначная научно обоснованная стандартизации методов фрактальной параметризации для определения основных параметров (фрактальная размерность, область и коэффициенты скейлинга) дендритных кластеров и их оптических характеристик. Различные алгоритмы формирования дендритов и оценок их фрактальных размерностей допускают расхождение их предельных значений, получаемых при увеличении числа образующих элементов структуры кластера [3, 6-8]. Рассмотрение указанных вопросов составляет цель данной работы, реализованную на основе модифицированного алгоритма построения 2D дендритов, и разработке многопараметрического способа идентификации дендритных структур, включающего определение их скейлинговых параметров.

Дендритные структуры формировались с учетом свойств ассоциации частиц в 2D пространстве с использованием агрегационных моделей частица-кластер. Реализованный алгоритм формирования дендритных кластеров представляет собой модификацию классической модели Т. Виттена и Л. Сандера «диффузия, ограниченная агрегацией (ДОА)» [4].

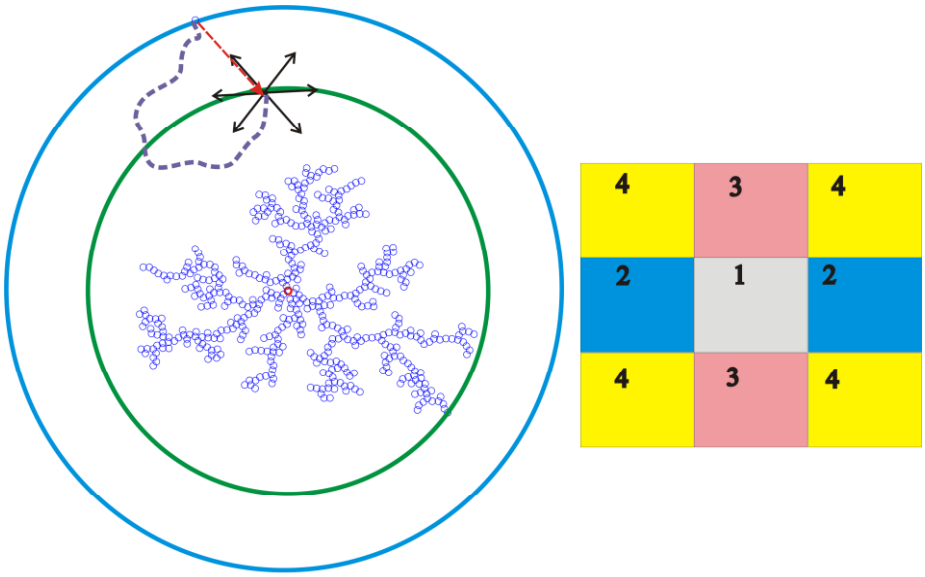
Компьютерное моделирование ДОА проводится по алгоритму, включающему следующие этапы:

1. предполагается, что ограниченное 2D пространство разделено на множество квадратных ячеек, где задается одна неподвижная затравочная частица;
2. каждая новая частица передвигается в соседнюю клетку случайным образом;
3. если частица подходит вплотную к неподвижной частице, то она прилипает к ней и больше не двигается;
4. если частица достигает границы пространства, то она отражается от нее и продолжает движение до тех пор, пока не окажется в соседстве с одной из частиц кластера, в момент встречи считается, что частицы жестко прикрепляются друг к

другу и больше не двигаются, а в пространство случайным образом запускается следующая частица;

5. процесс 2-4 для новых частиц повторяется многократно, в результате возникает последовательно растущий фрактальный кластер.

Нами предложена модификация ДОА, где частицы передвигаются скачками не по квадратной решетке, а в произвольном направлении, задаваемым генератором случайных чисел. С целью предотвратить «перекрытие» частиц за счет большой величины скачка, реализована модель с переменным шагом частиц. На начальном этапе, когда частица находится на значительном удалении от затравки (окружность генерации частиц, показана зеленым), частица движется дискретными шагами в произвольном направлении (рис. 1, *а*). При приближении к неподвижным частицам на расстояние $R_z \le 4R_{mol}$ (R_{mol} – радиус частицы) производится переключение на мелкий шаг частицы. В случае перехода движущейся частицей границы «уничтожения», отмеченной синей окружностью, она возвращается на окружность генерации частиц в исходное положение.



а *б*

Рис. 1. Схема модифицированного алгоритма роста дендрита. Красным отмечена затравочная частица. Зеленая окружность – радиус генерации частиц. Синяя – окружность возврата частиц (*а*). Возможные положения частиц, к которым может прилипнуть движущиеся частица, 1 – область с движущейся частицей (*б*).

Основное время счета уходит на определение расстояния от движущейся частицы до неподвижных частиц. Для оптимизации расчетного алгоритма область движения частиц разбивается на квадраты, составляется журнал, в каких квадратах находятся «прилипшие» частицы, и для каждой новой движущейся частицы проверяется ее соприкосновение с частицами в пределах девяти квадратов сетки, как показано на рис. 1, *б* (проверяемая частица находится в квадрате 1).

Полученные распределения амплитуды поля и интенсивности дифрагированных волн на дендритных структурах анализировались в приближении Релея-Зоммерфельда [9]. При этом пространственные распределения частиц представлялись в бинарном виде с функцией пропускания $F^o(x,y) = \{1,0\}$, что существенно упрощает расчет пространственных спектров просвечиваемых дендритов [6].

Количественная оценка самоподобных свойств полученных дендритных структур и их дифракционных картин основывается на комплексном определении «массовой» (кластерной) и клеточной фрактальных размерностей [8], а также коэффициентов и областей скейлинга. Корректность определения фрактальных размерностей массовым и клеточным методом проверялась на тестовых объектах. Тестовые объекты представляли собой круг и квадрат с равномерным распределением частиц, а также круг с неравномерным заполнением частицами. Неравномерность распределения частиц в круге задавалась детерминированным и случайным способами. При этом пространственные координаты частиц (X, Y), удовлетворяли следующей формуле:

$$\begin{cases} X(N_{cur}) = R\cos((j_1 - 1)\cdot \text{stepangle} + \text{rand}\cdot 2\pi) \\ Y(N_{cur}) = R\sin((j_1 - 1)\cdot \text{stepangle} + \text{rand}\cdot 2\pi) \end{cases}, \qquad (1)$$

где $j_1 \le N_{angle}$ и $N_{cur} < N_{\max}$, $N_{\max}$ – максимальное число частиц, N_{cur} – текущее число частиц, $\text{stepangle} = 2\pi/N_{angle}$, $N_{angle} = fix(R/2\cdot R_{mol})^{0,71k}$, R – радиус кластера, k – структурный множитель, fix – оператор округления до целого числа, rand – генератор случайных чисел от 0 до 0.999.

Результаты моделирования показали, что оценки кластерной фрактальной размерности для дендритных структур и их изображений оказываются более точными по сравнению с клеточным методом, при котором анализируемая область последовательно покрывается решетками с изменением размера ячейки δ от минимального до максимального. На рис. 2 представлена зависимость кластерной фрактальной размерности D структуры дендрита (модификация модели ДОА) и его дифракционных картин от числа частиц N.

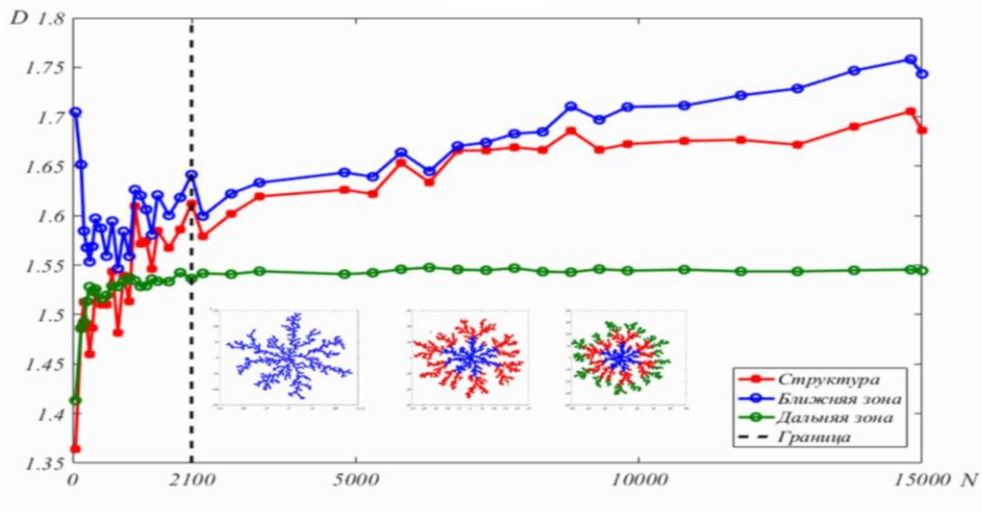


Рис. 2. Зависимость кластерных фрактальных размерностей *D* структуры дендрита и его дифракционных картин от числа частиц *N*.

Данные на рис. 2 усреднены по 10 реализациям кластеров в каждой точке. При числе частиц дендрита $N < 2100$ наблюдается неустойчивая область изменения значений кластерной фрактальной размерности D (отмечена пунктиром). Ее наличие указывает на значительное влияние случайных факторов при построении дендритных структур, а также на не выраженность самоподобных свойств в пределах выделенной области неустойчивости.

Скейлинговые параметры дендритов, сформированных в рамках модифицированного алгоритма ДОА и не сеточной модели «баллистическая агрегация – кластер» (БА), рассмотренной ранее [6], определялись на основе оценок коэффициентов и области скейлинга. Разбиение самоподобных областей проводилось с учетом определения границ области неустойчивости для закономерностей вида $D(N)$ (рис. 2). Структуры анализируемых дендритов показаны на рис. 3 с указанием выделенных областей для расчета их параметров скейлинга.

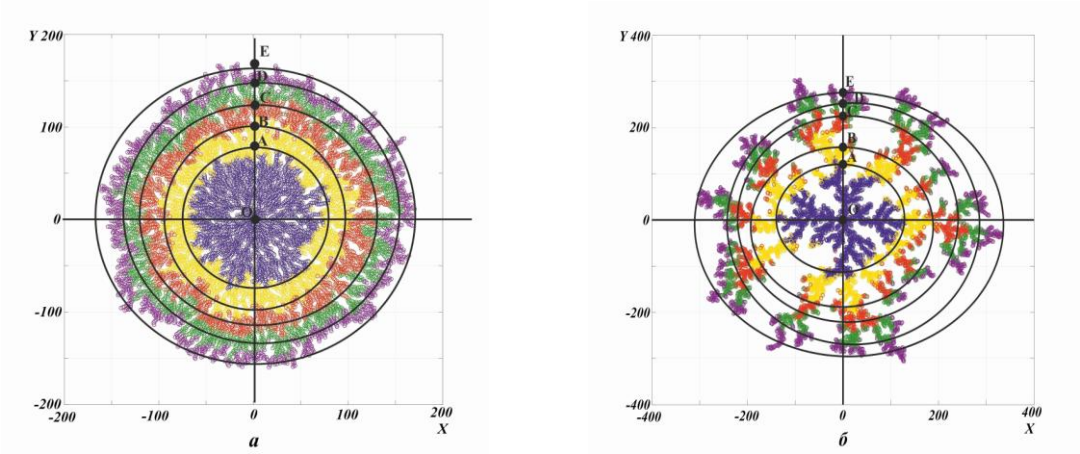


Рис. 3. Структуры дендритов, сформированных для моделей БА (*а*) и модификации ДОА (*б*). Цветовая палитра соответствует изменению N дендрита на 1500 (БА) и 2100 (ДОА) частиц. Буквенные обозначения соответствуют границам областей скейлинга.

Результаты моделирования показывают наличие широкой области скейлинга и множественность коэффициентов скейлинга дендритов. Причем, массовые фрактальные размерности D структуры дендрита и картины его дифракции в ближней зоне имеют близкие значения. Кластерная фрактальная размерность дендритов (при увеличении N), стремится к значению 1,7 (в рамках предложенной модификации модели ДОА) и к 1,9 (не сеточная модель БА), что не противоречит литературным данным [4-5, 7].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 18-01-00723 а).

ЛИТЕРАТУРА

1. В.М. Самсонов, Ю.В. Кузнецова, Е.В. Дьякова // Журнал технической физики. 2016. Т. 86. Вып. 2. С. 71.
2. М.В. Ковальчук, П.В. Короленко, Ю.В. Рыжикова // Ученые записки физического факультета МГУ. 2015. №1. С. 151401.
3. В.В. Исаева // Вестник ДВО РАН. 2015. №1. С. 5.
4. T.A. Witten, L.M. Sander // Phys. Rev. Lett. 1981. V. 47. P. 1400.
5. J.R. Nicolás-Carlock, J.L. Carrillo-Estrada, V. Dossetti // Scientific reports. 2016. V. 6. P. 19505.
6. Д.Д. Ружицкая, П.В. Короленко, Ю.В. Рыжикова // В сборнике трудов 10-й Международной конференции ARMIMP. Москва-Суздаль. 2017. С. 81.
7. A.Yu. Menshutin, L.N. Shchur // Phys. Rev. E. 2006. V. 73. P. 011407.
8. Е. Федер “Фракталы”. М.: Мир, 1991.
9. Дж. Гудмен “Введение в фурье-оптику”. М.: Мир, 1970.

Моделирование периодических волноводов лестничного типа

М.И. Светкин, А.Н. Боголюбов, А.И. Ерохин, В.М. Пикунов
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия,119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2
mihail-svetkin@mail.ru

Периодические волноводы лестничного типа, период которых состоит из отрезков волноводов постоянного прямоугольного сечения, находят все более широкое применение при создании различных электронных устройств терагерцового диапазона, например, клистронов [1-3].

В данной работе проводится математическое моделирование таких структур как с идеальным стенками, так и с импедансными, рассчитываются их дисперсионные характеристики.

Рассмотрим постановку задачи. Пусть волновод имеет период d, состоящий из P участков постоянного прямоугольного сечения с длинами d_p и сечениями S_p, $k = 1..P$. Ось волновода ориентирована вдоль оси z. Электромагнитное поле внутри волновода описывается системой уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} rot\mathbf{E} &= ik\mathbf{H}, \\ rot\mathbf{H} &= -ik\mathbf{E}, \end{aligned} \tag{1}$$

$0 < z < d$. Поля в сечениях $z = 0$ и $z = d$ связаны условиями периодичности Флоке [4]:

$$\mathbf{E}\big|_{z=d} = e^{i\gamma d}\,\mathbf{E}\big|_{z=0}, \mathbf{H}\big|_{z=d} = e^{i\gamma d}\,\mathbf{H}\big|_{z=0}. \tag{2}$$

Система (1, 2) дополняется граничными условиями Щукина-Леонтовича [5] на боковых стенках ∂D:

$$[\mathbf{n},\mathbf{E}]\big|_{\partial D} = Z_s\left[\mathbf{n},[\mathbf{n},\mathbf{H}]\right]\big|_{\partial D}, \tag{3}$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к поверхности ∂D, а Z_s – поверхностный импеданс материала стенок. При $Z_s = 0$ условие (3) переходит в граничное условие для идеального металла.

На стыках участков волноводов постоянного сечения ставятся проекционные условия сопряжения, соответствующие непрерывности в среднем потока энергии.

$$\begin{aligned} &\left[\mathbf{E}_\perp^{(p+1)} - \mathbf{E}_\perp^{(p)}, \mathbf{e}_i^{(p)}\right] = 0, \\ &\left[\mathbf{H}_\perp^{(p+1)} - \mathbf{H}_\perp^{(p)}, \mathbf{h}_i^{(p+1)}\right] = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

Задача (1, 2, 4) с граничным условием (3) решается с помощью неполного метода Галеркина [6]. Электромагнитные поля в каждом сечении представляются в виде разложения по системе базисных функций:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_\perp^{(p)} \\ \mathbf{H}_\perp^{(p)} \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{N_p} C_n^{(p)}(z) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_n^{(p)} \\ \mathbf{h}_n^{(p)} \end{pmatrix}, p = 1..P. \tag{5}$$

В случае отсутствия потерь в стенках в (5) используется базис идеального волновода [6]. Подстановка этого базиса в (1) приводит к системе дифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения полей на каждом регулярном участке:

$$\frac{dC^{(p)}}{dz} = A^{(p)}C^{(p)}, z_p < z \le z_{p+1}. \qquad (6)$$

Задача (6) с условиями сопряжения (4) является жесткой, что приводит к неустойчивости решения даже при небольшом количестве базисных функций и, следовательно, необходимости использования специальных методов для их решения, например, метода направленной ортогонализации [7].

В связи с этим был предложен эффективный метод [8], не приводящий к жестким системам уравнений и обладающий высокой скоростью и устойчивостью. Метод основан на выделении волн распространяющихся вдоль и против оси волновода, а также явном учете переотражений волн, происходящих внутри одного периода системы. Учет направления распространения позволяет избежать появления экспоненциально возрастающих решений задачи (6), приводящих к неустойчивости.

Исследовалась сходимость решений для случая волновода с периодом, состоящим из двух участков при предельном переходе к регулярному волноводу при выравнивании размеров сечений $S_2 \to S_1$. Дисперсионные характеристики в этом случае на большом диапазоне частот практически совпали с регулярным случаем. Однако наличие нерегулярности привело к возмущению дисперсионных кривых в областях $\mathrm{Im}\gamma d = 0, \pi, 2\pi$ с появлением так называемых «лакун» – участков спектра с более высоким затуханием. Подобное поведение дисперсионных кривых было получено аналитически с помощью асимптотических методов в работе [9].

Для задачи с потерями $Z_s \ne 0$ базис идеального волновода уже не удовлетворяет граничным условиям (3), поэтому для этого случая был предложен базис [10], в котором базис идеального волновода дополняется специально построенными функциями, обеспечивающими точное выполнение условий (3).

С помощью указанного метода построены дисперсионные характеристики бесконечного волновода постоянного сечения с потерями в стенках. Для данного случая рассматривался предельный переход при $Z_s \to 0$ к известному аналитическому решению для бесконечного идеального волновода.

Было проведено моделирование бесконечных периодических волноводов лестничного типа с потерями в стенках путем их разбиения на участки волноводов постоянного сечения и постановок соответствующих условий сопряжения. Построены матрицы трансформации полей в сечениях, отстоящих на период структуры и дисперсионные характеристики.

Предложенные математические модели позволяют эффективно рассчитывать дисперсионные характеристики и поля для широкого класса волноведущих структур сложной геометрии, как с идеальными стенками, так и с потерями.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 16-31-60084 мол_а_дк и № 16-01-00690.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.С. Ильинский, Н.Б. Косич // Радиотехника и электроника, 1974, т. 19, №6, с.1171-1182.

2. А.С. Ильинский, С.В. Трубников, Н.А. Федосеева «Математические модели и оптимизация вычислительных алгоритмов» М.: изд. Московского Университета, 1993.

3. А.Д. Григорьев «Электродинамика и техника СВЧ» М.: Высшая школа – 1990.

4. А.С. Ильинский «Математические модели электродинамики» М.: Высшая школа, 1991.

5. Л.А. Вайнштейн «Электромагнитные волны» М.: Радио и связь, 1988.

6. А.Г. Свешников, И.Е. Могилевский «Избранные математические задачи теории дифракции» М.: Физический факультет МГУ, 2012.

7. А.А. Быков, А.С. Ильинский // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1979. – Т. 19. – №. 3. – С. 631-639.

8. А.Н. Боголюбов и др.// Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2018. (в печати).

9. С.А. Назаров // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. – 2013. – №. 2.

10. А.И. Ерохин и др. // Учен. зап. физ. фак-та Моск. ун-та. — 2016. — № 6. — С. 1661106–1–1661106–3.

Математические модели микроволновых приборов с распределенным взаимодействием на основе полностью консервативных алгоритмов

А.Г. Свешников, А.Н. Боголюбов, А.А. Быков
МГУ имени М.В.Ломоносова, физический факультет, кафедра математики.
abkov@yandex.ru

Решение нестационарных задач требует алгоритмов, для которых на уровне дискретной задачи выполняются те же законы сохранения, которые верны для точной модели, основанной на уравнениях Максвелла, уравнениях движения частиц со всеми дополнительными условиями. Такие модели были созданы в 1980-1990-х годах на кафедре математики физического факультета МГУ под руководством профессора А.Г. Свешникова [1-4], упомянуты не все работы. Этот цикл работ продолжает столь же фундаментальный цикл работ, посвященных расчету распространения волн в неоднородных средах [5].

Динамика частиц. Поставим задачу для уравнения Больцмана для движения частиц в заданном внешнем поле. Можно рассматривать электрическое, магнитное поле и их комбинацию. Пусть $f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ есть функция распределения частиц. Запишем уравнение Больцмана в виде $\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}+m\mathbf{g}\frac{\partial f}{\partial p}=0,\quad \rho=m\int f\,d\mathbf{p},\quad \mathbf{J}=\int f\mathbf{p}d\mathbf{p},$ $f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\big|_{t=0}=f_0(\mathbf{r},\mathbf{p}),\ \ f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\big|_{\Sigma}=f_1(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\big|_{\Sigma}$ при $(\mathbf{n},\mathbf{p})>0,$ где Σ есть граница области, $\mathbf{n}$ есть внутренняя нормаль. Скорости частиц, направленных наружу, не заданы.

Метод крупных частиц с полной дискретизацией. Введем временную сетку $\omega_{\{t\}}=\{[t_0,t_1],[t_1,t_2]...,[t_{J-1},t_J]\}$ на промежутке $[0,T]$, $\omega_{\{\mathbf{r},t\}}=\omega_{\mathbf{r}}\times\omega_{\{t\}}$ сетка в области $D\times[0,T]$. Построим сужение этой векторной функции на сетку $\omega_{\{\mathbf{r},t\}}$: $\mathbf{r}_n^{(j)}=\mathbf{r}_n(t_j),\mathbf{v}_n^{(j)}=\mathbf{v}_n(t_j),\ n=1,...,N,\ j=1,...,J.$ Схема с полной дискретизацией имеет вид

$$\frac{\mathbf{p}_n^{(j+1)}-\mathbf{p}_n^{(j)}}{\tau}=M_n\frac{\mathbf{g}(\mathbf{r}_n^{(j+1)})+\mathbf{g}(\mathbf{r}_n^{(j)})}{2},\ \ \mathbf{v}_n^{(j+1/2)}=\frac{\mathbf{p}_n^{(j+1/2)}}{M_n},\ \ \frac{\mathbf{r}_n^{(j+1)}-\mathbf{r}_n^{(j)}}{\tau}=\frac{1}{M_n}\frac{\mathbf{p}_n^{(j+1)}+\mathbf{p}_n^{(j)}}{2}$$

где $E_n^{(j)}=(\mathbf{p}_n^{(j)})^2/2M_n.$ Для решения необходимо использовать итерационный алгоритм:

$$\frac{1}{\tau}(\mathbf{p}_n^{(j+1,s+1)}-\mathbf{p}_n^{(j)})=\frac{M_n}{2}(\mathbf{g}(\mathbf{r}_n^{(j+1,s)})+\mathbf{g}(\mathbf{r}_n^{(j)})),\quad (\mathbf{r}_n^{(j+1,s+1)}-\mathbf{r}_n^{(j)})/\tau=(\mathbf{p}_n^{(j+1,s)}+\mathbf{p}_n^{(j)})/2M_n\,.$$

Начальные условия итерационного процесса $\mathbf{p}_n^{(j+1,0)}=\mathbf{p}_n^{(j)}$, где $\mathbf{p}_n^{(j)}=\lim_{s\to+\infty}\mathbf{p}_n^{(j,s)}$. Используем обозначения $\mathbf{v}_n^{(j+1/2)}\overset{def}{=\!=\!=}(\mathbf{v}_n^{(j+1)}+\mathbf{v}_n^{(j)})/2.$ Найдем плотность частиц на сетке и плотность потока:

$$\rho_k^{(j+1/2)}=\sum_{n=1}^{N}\frac{M_n}{|D_k|}(\frac{1}{2}h_k(\mathbf{r}_n^{(j+1)})+\frac{1}{2}h_k(\mathbf{r}_n^{(j)})),\ \ \mathbf{J}_k^{(j+1/2)}=\sum_{n=1}^{N}\frac{M_n\mathbf{v}_n^{(j)}}{|D_k|}(\frac{1}{2}h_k(\mathbf{r}_n^{(j+1)})+\frac{1}{2}h_k(\mathbf{r}_n^{(j)})),$$

$E_n^{(j)} = (\mathbf{p}_n^{(j)})^2 / 2M_n$, тогда $(E_n^{(j+1)} - E_n^{(j)}) / \tau = \left((\mathbf{p}_n^{(j+1/2)})^2 / 2M_n, \mathbf{g}(\mathbf{r}_n^{(j+1/2)}) \right)$. Просуммировав по всем частицам, получим дискретный интегральный закон сохранения энергии частиц:

$$\frac{1}{\tau}\left(\sum_{n=1}^{N} E_n^{(j+1)} - \sum_{n=1}^{N} E_n^{(j)}\right) = \sum_{k=1}^{K} \left(\mathbf{J}^{(j+1/2)}(\hat{\mathbf{r}}_k), \mathbf{g}(\mathbf{r}_n^{(j+1/2)}) \right) | D_k |$$

Расчет электромагнитного поля. Для расчета электромагнитного поля мы используем метод дискретной аппроксимации на системе сдвинутых сеток. Рассмотрим внутри полубесконечного волновода D_j поле, удовлетворяющее уравнениям Максвелла $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$, $\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$, с начальными и граничными условиями $\mathbf{E}\big|_{t=0} = \mathbf{E}_0, \mathbf{H}\big|_{t=0} = \mathbf{E}_0, \mathbf{E}_\tau\big|_{\partial D} = 0.$ Заметим, что для обобщенного решения**Ошибка! Источник ссылки не найден.** * MERGEFORMAT выполнен закон охранения энергии. Пусть $L_1 > 0$, $L_2 > 0$ и D_L есть вся область, ограниченная металлическими стенками, в том числе область внутри отрезков подводященго и отводящего волноводов, для которой $z_1 < L_1$ и $z_2 < L_2$, причем z_1 и z_2 есть продольные координаты вдоль оси соответственно подводящего и отводящего волноводов. Тогда закон сохранения примет вид

$$\frac{1}{8\pi}\iiint_{D_L} (\mathbf{E}^2(t_1) + \mathbf{H}^2(t_1))dv = \frac{1}{8\pi}\iiint_{D_L} (\mathbf{E}^2(t_0) + \mathbf{H}^2(t_0))dv -$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\iiint_{D_L} \left(\mathbf{J}, \mathbf{E}\right) dv + \int_{t_0}^{t_1} \frac{c}{4\pi} \sum_{j=1}^{J} \iint_{\Sigma_j} \left(\left[\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right]\big|_{z_j = L_j}, \mathbf{e}_{z_j} \right) dx_j dy_j dt.$$

Координатные функции в подсоединенных волноводах. Найдем структуру поля, зависящего по экспоненциальному закону от продольной координаты z: $\mathbf{E}(x,y,z) = \mathbf{e}(x,y)e^{\pm i\gamma z}$, $\mathbf{H}(x,y,z) = \mathbf{h}(x,y)e^{\pm i\gamma z}$. Пусть (φ_n, α_n) есть полная система собственных функций и собственных значений краевой задачи $\nabla_\perp^2\varphi + \alpha^2\varphi = 0$, $\varphi\big|_\Gamma = 0$, и (ϕ_n, β_n) задачи $\nabla_\perp^2\phi + \beta^2\phi = 0$, $\partial\phi / \partial\mathbf{n}_\perp\big|_\Gamma = 0$. Здесь Γ есть полная граница блока (круга или кругового кольца). $\nabla_\perp^2\mathbf{e} + \chi^2\mathbf{e} = 0$, $\nabla_\perp^2\mathbf{h} + \chi^2\mathbf{h} = 0$, где $\chi^2 = \kappa^2 - \gamma^2$, $\nabla_\perp u = (u_x, u_y, 0)$. Выразим поперечные компоненты полей:

$$\mathbf{e}_\perp = -\frac{i\gamma}{\chi^2}\nabla_\perp \mathbf{e}_z + \frac{i\omega\mu}{\chi^2}\left[\mathbf{n}_z \times \nabla_\perp \mathbf{h}_z\right],\ \mathbf{h}_\perp = -\frac{i\gamma}{\chi^2}\nabla_\perp \mathbf{h}_z - \frac{i\omega\varepsilon}{\chi^2}\left[\mathbf{n}_z \times \nabla_\perp \mathbf{e}_z\right],$$

где $\left[\mathbf{n}_z \times \nabla_\perp u\right] = (-\partial u / \partial y, \partial u / \partial x, 0)$, Используем в качестве координатной системы поля ТМ и ТЕ типов: $\mathbf{e}_{n,z}^{TM} = \varphi_n$, $\mathbf{e}_{n,\perp}^{TM} = -\frac{i\gamma}{\alpha_n^2}\nabla_\perp\varphi_n$, $\mathbf{h}_{n,z}^{TM} = 0$, $\mathbf{h}_{n,\perp}^{TM} = -\frac{i\omega\varepsilon}{\alpha_n^2}\left[\mathbf{n}_z \times \nabla_\perp\varphi_n\right]$, $\mathbf{e}_{n,z}^{TE} = 0$, $\mathbf{e}_{n,\perp}^{TE} = \frac{i\omega\mu}{\beta_n^2}\left[\mathbf{n}_z \times \nabla_\perp\phi_n\right]$, $\mathbf{h}_{n,z}^{TE} = \phi_n$, $\mathbf{h}_{n,\perp}^{TE} = -\frac{i\gamma}{\beta_n^2}\nabla_\perp\phi_n$.

Представление поля в подсоединенных волноводах. Общее решение уравнений Максвелла можно представить в виде суперпозиции волн ТЕ и ТМ типа, бегущих в каждом из волноводов: $\mathbf{H}_\perp^{(j)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{h}_{k,j,\perp}^{TE}(x_j, y_j) A_{k,j}^{TE}(z_j, t) + \mathbf{h}_{k,j,\perp}^{TM}(x_j, y_j) A_{k,j}^{TM}(z_j, t),$

аналогично выражаются компоненты $\mathbf{E}_{\perp}^{(j)}$. Из уравнений Максвелла следует, что коэффициенты разложения поля по полной системе нормальных волн удовлетворяют уравнению Клейна-Гордона

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial z_j{}^2}+(\gamma_j^{TE,TM})^2\right)A_{k,j}^{TE,TM}=0.$$

Общее решение в продольно однородных участках $z_j > L_j$ можно найти, используя проебразование Фурье по координате z_j:

$$A_{k,j}(z_j,t)=-c\int_{t_0}^{t-(z_j-L)/c}\frac{\partial A_{k,j}}{\partial z_j}(L_j,t)J_0(\gamma_j\sqrt{c^2(t-\tau)^2-(z_j-L_j)^2})d\tau,$$

здесь и далее упоминание о принадлежности к ТЕ и ТМ типам опущено. Поэтому, положив $z_j = L_j$, получим $A_{k,j}(L,t)=-c\int_{t_0}^{t}\frac{\partial A_{k,j}}{\partial z_j}(L_j,t)J_0(\gamma_j c(t-\tau))d\tau.$ Будем говорить, что для электромагнитного поля $\mathbf{E},\mathbf{H}$, заданного в $D_L\times[0,T]$, выполнены условия излучения, если в каждом полубесконечно продольно однородном подсоединенном волноводе D_j сужение каждой мз компонент поля на поперечное сечение Σ_j принадлежит $L^2(\Sigma_j)$ и коэффициенты Фурье разложения поля по полной системе нормальных волн для каждого индекса k нормальной волны ТЕ и ТМ типов удовлетворяют условиям излучения.

Консервативная разностная схема. Ограничимся только цилиндрическими подсоединенными волноводами круглого сечения и аксиально симметричными волнами:

$$\frac{\partial E_r}{\partial t}=-c\frac{\partial H_\theta}{\partial z}-4\pi J_z,\ \frac{\partial E_z}{\partial t}=\frac{c}{r}\frac{\partial rH_\theta}{\partial r}-4\pi J_z,\ \frac{\partial H_\theta}{\partial t}=-c(\frac{\partial E_r}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial r}),$$

с граничными и начальными условиями $E_z\big|_{r=a,r=b}=0, E_r\big|_{t=t_0}=E_z\big|_{t=t_0}=H_\theta\big|_{t=t_0}=0,$

$$(H_\theta)_k(L,t)=-c\int_{t_0}^{t}\frac{\partial(H_\theta)_k}{\partial z}(L,\tau)J_0(\gamma_k c(t-\tau))d\tau,$$

где $(H_\theta)_k(z,t)=\left(H_\theta,h_k(r)\right)_r$, причем $\left(f,g\right)_r=2\pi\int_a^b rf(r)g(r)dr,$ и $\left.\frac{drh_k}{dr}\right|_{r=a}=0,$ $\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}rh_k=-\gamma_k^2h_k,$ $\left.\frac{drh_k}{dr}\right|_{r=b}=0.$ Введем целые и полуцелые сетки $\Omega_R=\{r_p\},r_p=r_0+ph_r,$ $\Omega_Z=\{z_q\},z_q=z_0+qh_z,$ $\Omega_T=\{t_m\},$ $t_m=t_0+mh_t,$ $\Omega_{RZ}=\Omega_R\times\Omega_Z,$ $\Omega_{R'}=\{r'_p\},\ r'_p=r_0+(p+1/2)h_r,$ $\Omega_{Z'}=\{z'_q\},\ z'_q=z_0+(q+1/2)h_z,$ $\Omega_{T'}=\{t'_m\},$ $t'_m=t_0+(m+1/2)h_t$ $\Omega_{R'Z}=\Omega_{R'}\times\Omega_Z,$ $\Omega_{RZ'}=\Omega_R\times\Omega_{Z'},$ $\Omega_{R'Z'}=\Omega_{R'}\times\Omega_{Z'},$ $\Omega_{RZT}=\Omega_R\times\Omega_Z\times\Omega_T,$ $\Omega_{RZT'}=\Omega_R\times\Omega_Z\times\Omega_{T'},$ и т.д. Аппроксимация операторов дифференцирования: $\frac{\Delta}{\Delta r}:F(\Omega_{RZ})\to\Omega_{R'Z},$ $\left.\frac{\Delta f}{\Delta r}\right|_{r_{p+1/2},z_q}=\frac{f(r_{p+1},z_q)-f(r_p,z_q)}{h_r},$ и аналогично для $\Delta/\Delta z$, $\Delta/\Delta t$. Обозначим гибридные двумерные пространственные

сетки, получающиеся как декартово произведение соответствующей пары одномерных пространственных сеток $\Omega\mathrm{R}$, $\Omega\mathrm{Z}$, $\Omega\Theta$. Пространственно-временные сетки, получающиеся как декартово произведение соответствующей двумерной гибридной пространственной сетки и соответствующей временной сетки, $\Omega\mathrm{R}\times\Omega\mathrm{T}$ и т.д. Введем сеточные функции $E_R \in F(\Omega\mathrm{R}\times\Omega\mathrm{T})$, $E_Z \in F(\Omega\mathrm{Z}\times\Omega\mathrm{T})$, $H_\Theta \in F(\Omega\Theta\times\Omega\mathrm{T})$, $J_R \in F(\Omega\mathrm{R}\times\Omega'\mathrm{T})$, $J_Z \in F(\Omega\mathrm{Z}\times\Omega'\mathrm{T})$, $J_\Theta \in F(\Omega\Theta\times\Omega'\mathrm{T})$, и т.д. Дискретные уравнения Максвелла:

$$\frac{\Delta E_R}{\Delta t} = -c\frac{\Delta H_{\Theta'}}{\Delta z} - 4\pi J_R, \qquad \frac{\Delta E_Z}{\Delta t} = \frac{c}{r}\left(\frac{\Delta(r\cdot H_\Theta)}{\Delta r}\right)' - 4\pi J_Z, \qquad \frac{\Delta H_\Theta}{\Delta t} = -c\left(\frac{\Delta E_R}{\Delta z} - \frac{\Delta E_Z}{\Delta r}\right)' - 4\pi J_\Theta,$$

дискретные граничные условия $E_Z(a, z_q, t_m) = 0,\ \ E_Z(b, z_q, t_m) = 0,$ начальные условия ставятся очевидным образом. Энергия дискретной системы вычисляется так: $\varepsilon(E_R, E_Z, H_\Theta) = \frac{1}{4}h_r h_z\left(\sum_{\Omega\mathrm{R}} rE_R^2 + \sum_{\Omega\mathrm{Z}} rE_Z^2 + \sum_{\Omega\Theta} rH_\Theta^2\right)$. Имеет место дискретный аналог закона сохранения энергии электромагнитного поля:

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t} = -2\pi h_r h_z\left(\sum_{\Omega\mathrm{Z}} rE_{Z'}J_Z + \sum_{\Omega\mathrm{R}} rE_{R'}J_R + \sum_{\Omega\Theta} rH_{\Theta'}J_\Theta\right) + \frac{c}{4\pi} < H_\Theta\big|_{z=L}, E_R\big|_{z=L-h_z/2} >_r .$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (проект 16-01-00690-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Р. Майков, А.Г. Свешников, С.А. Якунин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 26:6 (1986), 851–863.

2. А.Р. Майков, А.Д. Поезд, А.Г. Свешников, С.А. Якунин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 29:7 (1989), 1000–1011.

3. М.В. Кузелев, А.Д. Поезд, А.А. Рухадзе, А.Г. Свешников, С.А. Якунин // Матем. моделирование, 1:11 (1989), 34–40.

4. А.Р. Майков, А.Г. Свешников, С.А. Якунин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 30:12 (1990), 1785–1796.

5. А.Г. Свешников // Ж. вычисл. матем. и матем. физ.,1963. Т.3. С.314-326.

Отображения класса Коэна в анализе временных рядов позиционных характеристик волнового пучка

Е.А. Бабанин, Р.Ф. Стрюнгис
МГУ им.М.В.Ломоносова , физический факультет, кафедра фотоники и физики микроволн
babanin.eugen@gmail.com

Стохастические свойства каналов передачи данных традиционно принято описывать в квазистационарном приближении, игнорируя возможные вариации статистических распределений за интервал времени передачи отдельной сигнальной группы или зондирующей последовательности. Подобные приближения допустимы для задач локации или зондирования и становятся недостаточными при разработке помехоустойчивых алгоритмов управления сеансами передачи данных, длительность которых варьируется от нескольких секунд до фактически не прерываемого соединения. Традиционные методы частотного анализа не способны разрешить низкочастотную компоненту, таким образом спектр оказывается ограниченным снизу. Более того, классические методы подходят лишь для описания стационарных процессов, тогда как на практике процесс распространения лазерного пучка в открытой атмосфере является кусочно-стационарным.

Обойти ограничение разрешающей способности возможно применяя нелинейные отображения, принадлежащие классу функций Коэна [1]:

$$C_x(t,\omega;f)=\iiint\limits_{-\infty} e^{-i\phi(s-t)} f(\phi,\tau)\, x(s+\tau/2)\, x^*(s-\tau/2)\, e^{-i\omega\tau} d\phi ds d\tau \tag{1}$$

здесь $x(t)$ - исходный сигнал, $f(\phi,\tau)$ - функция параметризации.

Отбор параметризующей функции нелинейного отображения анализируемого сигнала позволяет сформировать необходимый тип и значение разрешения в заданном интервале времени и частот. Одним из частных случаев распределений данного класса является сглаженное псевдораспределение Вигнера-Вилли, соответствующее единичной функции $f_{WV}(\phi,\tau)=1$ параметризации.

$$PW(t,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t) x(t+\tau/2) x^*(t-\tau/2) e^{i\omega\tau} d\tau \tag{2}$$

где $h(t)$ - сглаживающее окно во временной области.

Управляя профилем функции параметризации распределения можно получить практически весь набор энергетических время-частотных распределений, включая спектрограммы, псевдораспределения и ряд других правил отображения, отфильтровывающих интерференционные искажения время-частотной структуры сигнала [2,3]. Такие как преобразование Борна-Жордана

$$BJ(t,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\tau|}\int_{t-\tau/2}^{t+\tau} x(u+\tau/2) x^*(u-\tau/2) du e^{i\omega\tau} d\tau \tag{3}$$

и Чои-Вильямса, к основным достоинствам которого можно отнести возможность управления уровнем интерференционных членов, путем подбора масштабного коэффициента σ:

$$CW(t,\omega)=\sqrt{\frac{\sigma}{4\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\tau|} e^{i\omega\tau}\int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{-\frac{(u-\tau)^2\sigma}{4\tau^2}\right\} x(u+\tau/2) x^*(u-\tau/2) du d\tau \tag{4}$$

К недостаткам преобразований Борна-Жордана и Чои-Вильямса стоит отнести несимметричность подавления интерференционных компонент вдоль оси $\omega = const$ и $t = const$.

Если в качестве исходного сигнала использовать динамические значения центральных моментов сигнального пучка,

$$M_I^n = \frac{1}{K\langle I(r,c;L)\rangle^n}\sum_{k=1}^{K}(I(r,c;k) - \langle I(r,c)\rangle)^n \quad (5)$$

полученные из зарегистрированного распределения интенсивности,

$$\langle I(r,c)\rangle = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} I\,(r,c;k) \quad (6)$$

то можно получить характерные частоты блуждания, в случае первого центрального момента, или искажения пучка, в случае моментов старших порядков. Таким образом могут быть оценены характерные времена стационарности положения, формы и целостности сигнального пучка при прохождении турбулентной атмосферы [4].

Основная сложность нелинейного время-частотного анализа состоит в разделении областей отображения сигнальных компонент и областей квадратичной интерференции. Вариация профиля параметризующей функции позволяет вытеснять интерференционные компоненты отображения на не значимые для детектирования области время-частотной карты. Рассмотренные типы отображений и способы управления их разрешающей способностью позволяют создавать новые классы параметризующих функций, настроенных на анализ сигналов заданного типа. Описанный подход весьма продуктивен для исследования сигналов на фоне коррелированных шумов, многокомпонентных импульсных последовательностей, фрактальных сигналов и многих других отображений самосогласованных состояний неравновесной физической системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Cohen “Time Frequency Analysis: Theory and Applications” Prentice Hall; 1994.
2. A.W. Rihaczek // IEEE Trans on IT. 1968. Vol. 14. No 3. P. 369−374.
3. C.H. Page // J. Appl. Phys. 1952. No 23.
4. Т.И. Арсеньян, М.И. Бабанина, Н.А. Сухарева “Методы нелинейных время-частотных преобразований в анализе флуктуаций электромагнитных волн на приземных трассах” Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова

Классификаторы в проблеме сверхразрешения

Е.Н. Терентьев[1], Н.Е. Шилин -Терентьев[2]
[1]*Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова*
[2]*EPAM systems, USA*
en.teren@physics.msu.ru

Прибор с АФ O присутствует в линейной модели регистрации изображений $I_\partial = O_\sigma * I_x$, звездочкой * обозначаем операцию свертка. Значками SD (стандартное отклонение) ∂ и σ, отмечаем, что измеренное изображение I_∂ и АФ Oσ известны с ошибками. В этой работе предполагается точная модель регистрации изображений $I=O*I_x$, т.е. SD $\partial=\sigma=0$. Обозначим md=min|M(O)|- не настраиваемый и mD=min|M(pO)| - настраиваемый промежуток МПФ M(O) и нулем. Если md>0, то $R=O^{-1}$ и $I_x=R*I$.

Прибор априори – до измерений должен “настраиваться” по параметрам [Loc, dx, DIAP] по непрерывной АФ parO [2-5], так что бы было либо естественное md>0, либо с интерполированием изображения под другой шаг оцифровки, и повышением обусловленности DIAP для АФ O, mD >md>0, см. Рис. 1,3. Сказанное означает, что в Классификаторе мы можем оказаться в методе **C**, но лучше бы сразу попасть в идеальный метод **B**.

Классификаторы. Классифицируются методы сверхразрешения по величине промежутка 0≤md≤1 для АФ O в точной модели регистрации изображений $I=O*I_x$.

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F, Finish**
$O=D_K$ **$md=M(D_K)==1$** Обращение не нужно	$O\sim D_K$ **$1\le md\le 10^{-1}$** $R=O^{-1}$ Обычное обращение	M(O),M(pO) **$10^{-1}\le md\le 10^{-4}$** md->mD $pR=pO^{-1}$ Для измерений низкой точности	M(O),M(pO) **$10^{-4}\le md\le 10^{-5}$** md->mD $pR=pO^{-1}$ Для измерений высокой точности	M(O),M(pO) **$Iz\le md\le 10^{-5}$** md->mD $pR=pO^{-1}$ Модельные эксперименты	$M(O)\sim D_K$ **$0\le md\le Iz=10^{-13}$** Из-за ошибок мантиссы вычисления не имеют смысла

Рис. 1. Классификатор методов сверхразрешения

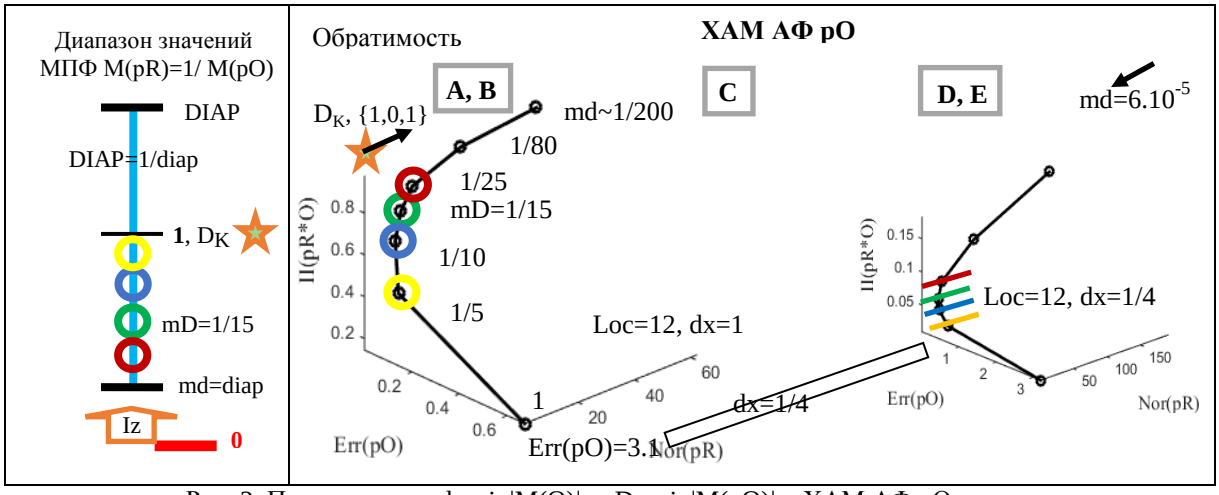


Рис. 2. Промежутки md=min|M(O)|, mD=min|M(pO)| и ХАМ АФ pO.

Выбор адекватной модели в методах C, D и E. Основная задача по выбору АФ

$$\min_{LO}\{\|pR\| \mid Err(pO)\le err\},\ \ LO=\{pO\mid[Loc,dx,DIAP]\} \qquad (1)$$

$pO=pR^{-1}$ ставится как задача на минимум:

с построением Характеристикой Адекватности Модели (ХАМ) АФ О [2,3]

$$\{x=Nor(pR),\ y=Err(pO),\ z=II(pR*O)\} \qquad (2)$$

С ХАМ АФ О (2) представлены методы от **A** до **E**, отмеченные светлыми прямоугольниками. ХАМ дискретной модели с dx=1 и размером области определения Loc=12 соответствует методу **C**. ХАМ непрерывной модели с dx=1/4, Loc=12 ближе к методам **D**, **E**, см. Рис. 2.

Если ХАМ непрерывной модели изображать в одном масштабе, то ХАМ непрерывной модели условно займет место длинного прямоугольника, помеченного Err(pO)=3.1 и dx=1/4, см. Рис.2.

Математическая фокусировка – регулировка увеличения разрешения изображений начинается с уменьшения от единицы регулируемого промежутка mD ≤ 1. При mD=1 в результате остаются исходные изображения. С уменьшением mD растут величины сверхразрешения SR и реакции на шум Nor(pR), см. Рис.4-5.

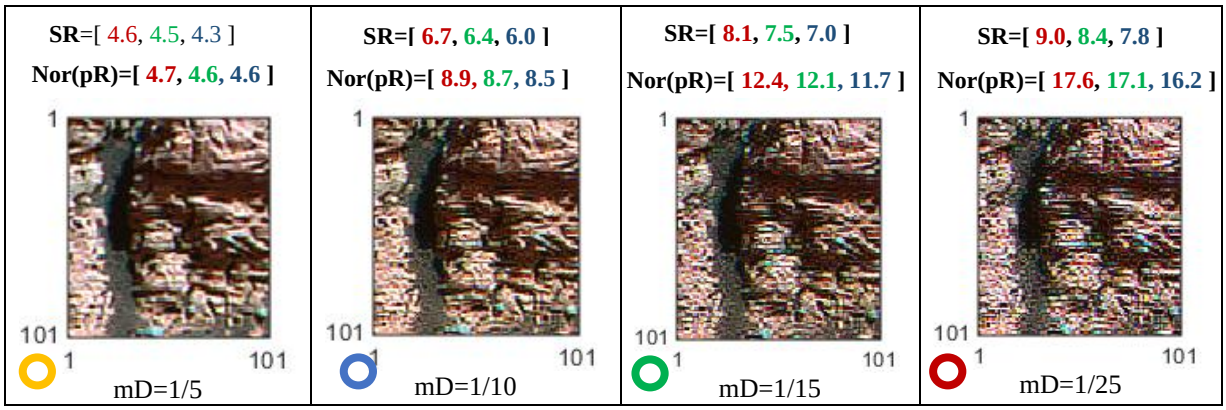


Рис. 4. Сверхразрешения SR и реакции на шум Nor(pR) в исходной сетке dx=1

Для однобайтовых изображений (низкой точности метод **C**) ограничение (неадекватность) реализуется около mD~1/25, появляются изменяющиеся (“выбиваются” красные) мелкие детали в изображении (высокой реакцией на шум – Nor(pR)), см. Рис. 5. Поэтому считаем, для однобайтовых изображений, как в нашем примере (∂~3-5%), допустимы величины SR~9.5. Для двух байтовых изображений ожидается сверх- разрешение SR~20-30, методы типа **D**.

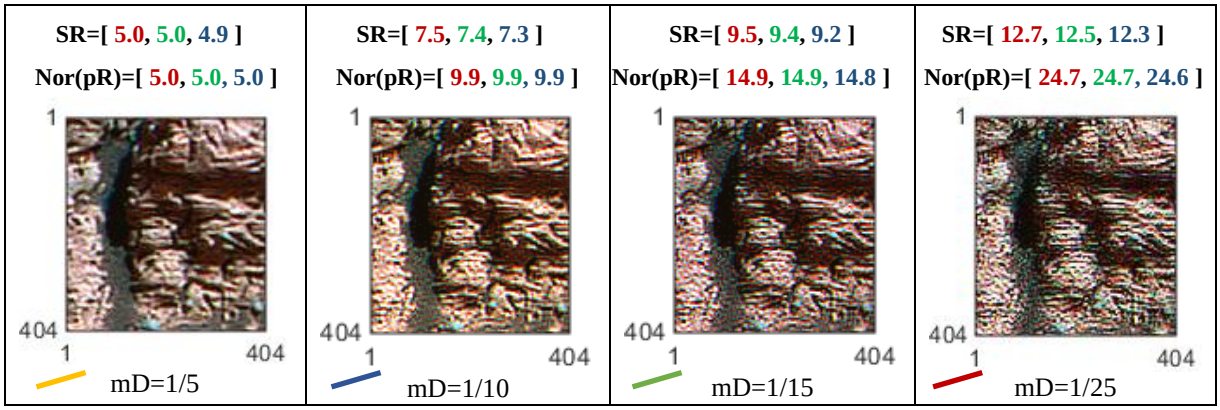


Рис. 5. Сверхразрешения SR и реакции на шум Nor(pR) с интерполяцией dx=1/4

***Промежутки* md *и* mD.** На Рис 6, 7 представлены промежутки md=min|M(O)|- не настраиваемый и mD=min|M(pO)| - настраиваемый промежуток МПФ M(O) и нулем.

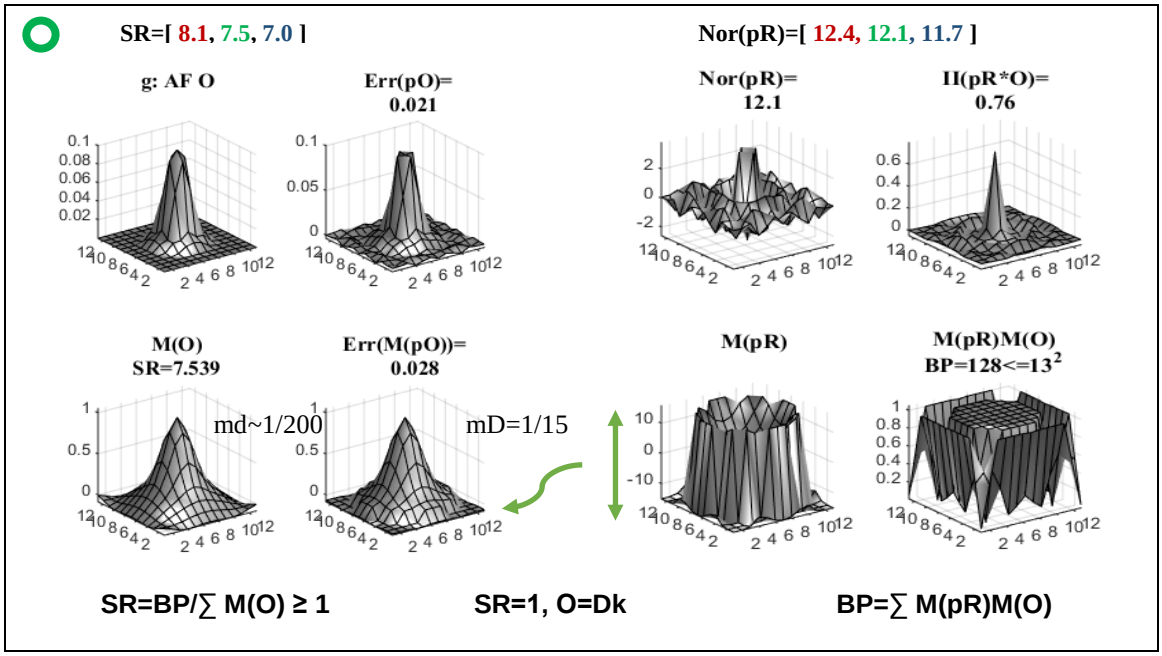


Рис. 6. Дискретная модель dx=1, с промежутком mD=1/15.

Обсуждение. Подход в проблеме сверхразрешения с Классификаторами упорядочивает создание моделей для достижения предельного адекватного сверх разрешения. В сверхразрешённых изображениях возможны скачки, перепады яркостей, т.е. решения обратной задачи по компенсации искажений АФ О не являются гладкими. Негладкость решений позволяет обоснованно и безопасно применять данный метод, например, в контурах управления реакторами.

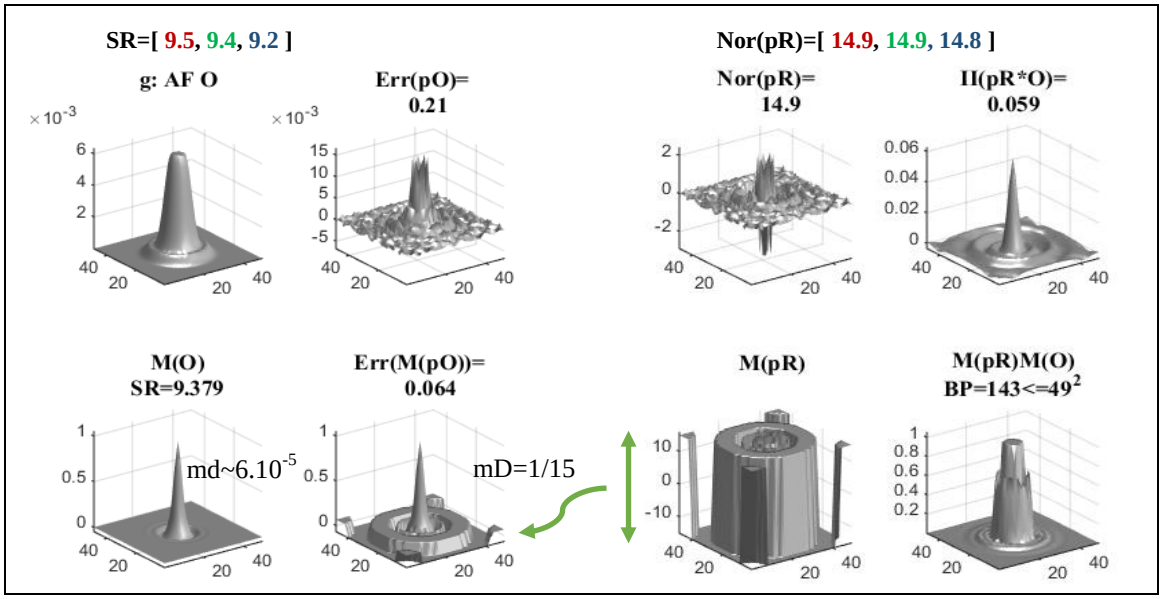


Рис. 7. Непрерывная модель dx=1/4, с промежутком mD=1/15.

Интересные модификации методов могут быть реализованы в новых радарных технологиях (с управляемой диаграммой направленности), в радарах с синтезированной апертурой и т.п. Подобные результаты уже получены в пассивном радиовидении [3].

Если есть необходимость, то решения (сверхразрешенные изображения) можно “сгладить” (конечно, с потерей разрешения) согласно априорной информации. Возможно применение методов сверхразрешения с интерполяцией для достижения предельного сверх разрешения в электронной микроскопии и томографии. Необходимо разработать Классификатор для неточных моделей регистрации изображений $I_{\partial}=O_{\sigma}*I_{x}$, $\partial>0$ и $\sigma>0$. Предлагаемая концепция проблемы сверхразрешения с классификатором намного сложнее классического метода регуляризации [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Е.Н. Терентьев, Н.Е. Терентьев // Изв. РАН сер. Физич., 2015, том 79, № 12, с. 1633-1637.
2. E.N. Terentiev, N.E. Terentiev // Bulletin of the Russian Academy of Science. Physics, 2015, Vol.79, No 12, pp.1427-1431, DOI 10.3103/S1062873815120229
3. Е.Н. Терентьев и др. // УЗФФ Московского Университета, 9 с., №6, 1761005(2017)
4. А.Н. Тихонов, М.В. Уфимцев “Статистическая обработка результатов эксперимента” изд. Московского университета, 1988.

О применении операций теории поля в изображениях

Е.Н. Терентьев[1], Н.Е. Шилин-Терентьев[2], И.Н. Приходько[1], И.И. Фаршакова[1]
[1]*Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова*
[2]*EPAM systems, USA*
en.teren@physics.msu.ru

Изображение (скалярное поле) P связывается с двумерным векторным полем B=grad P. Синтезированные вихри ищутся двумерных полях B_, ортогональных B с помощью операций проектирования на векторные поля направлений в пределах заданных шаблонов. Синтезированные вихри применяются при анализе изображений типа зрачки глаз, Дорожные Знаки (ДЗ), вихри в космических изображениях и т.п.

В основе метода лежит 2D Конечномерная Теорема Отсчетов (КМТО) с реализацией операций теории поля. Дан 2-х мерный массив отсчетов $D=f(x0,\ y0)$ в квадрате, матрицы $H^{(0)}(x0)$ и $H^{(n)}(x)$, тогда функция $f^{(nx,ny)}(x,\ y)$ [1,2]:

$$f^{(n_x,n_y)}(x,y)=\sum_{kx,ky=1}^{N} c_{kx\,ky} * H^{(nx)}(kx,x) * H^{(ny)}(ky,y),\quad kx,ky=1:N \tag{1}$$

$$c_{kx\,ky}=(f(x0,y0),H^{(0)}(kx,x0)*H^{(0)}(ky,y0))=$$
$$=\sum_{x0,y0=1}^{N} f(x0,y0)*H^{(0)}(kx,x0)*H^{(0)}(ky,y0),\quad kx,ky=1:N \tag{2}$$

проходит через точки отсчетов $f^{(nx,ny)}(x0,y0)$. Скалярные произведения (2) реализует Прямое ДПФ, а Фурье ряд (1) реализует Обратное ДПФ с интерполяцией, если $dx<1$.

Операции математического анализа и теории поля сводятся к операциям над Фурье гармониками $H^{(n)}(x0)$ и $H^{(n)}(x)$: при $n>0$ реализуем дифференцирование n-го порядка и при $n<0$ – интегрирование n-го порядка [1,2].

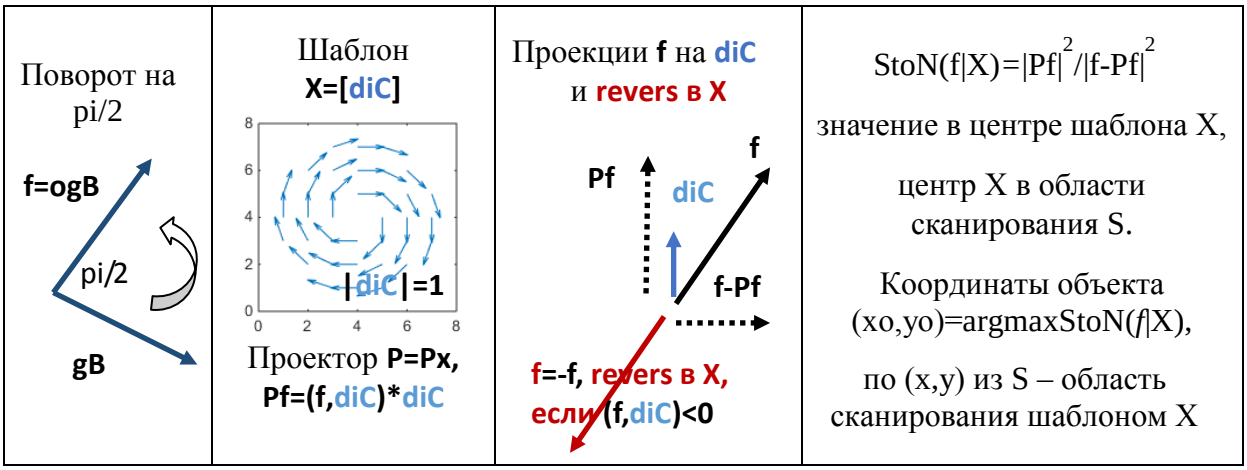


Рис. 1. Операции над векторными полями, шаблоны, проекции, устройство и использование функции “Сигнал/Шум” – StoN.

Приведем пример записи градиента от двухмерного числового массива чисел $D=f(x0,y0)$, функция $f^{(0,0)}(x,y)$ проходит через точки отсчетов в квадрате $(x0,\ y0)$:

$$grad\ D=\{\frac{\partial}{\partial x}D,\frac{\partial}{\partial y}D\}=\{f^{(1,0)}(x,y),\ f^{(0,1)}(x,y)\} \tag{3}$$

Индикация вихрей и ДЗ. На Рис. 1-4 разбирается случай, когда 70% высоких частот обнулены и от изображения остается 30% НЧ. Работоспособность метода сохраняется. Функция StoN в случае 30% НЧ “немного шире”, чем в случае полной полосы частот.

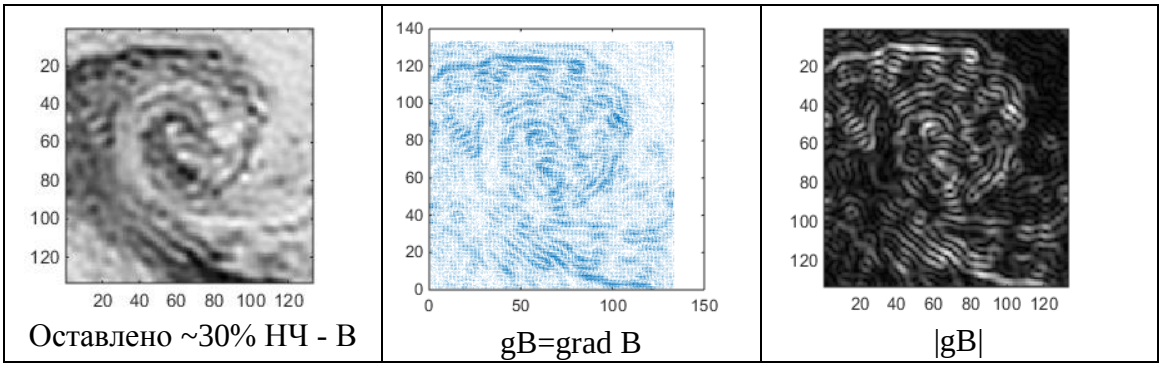


Рис. 1. Пример области изображения с вихрем B, градиентного поля gB и |gB|.

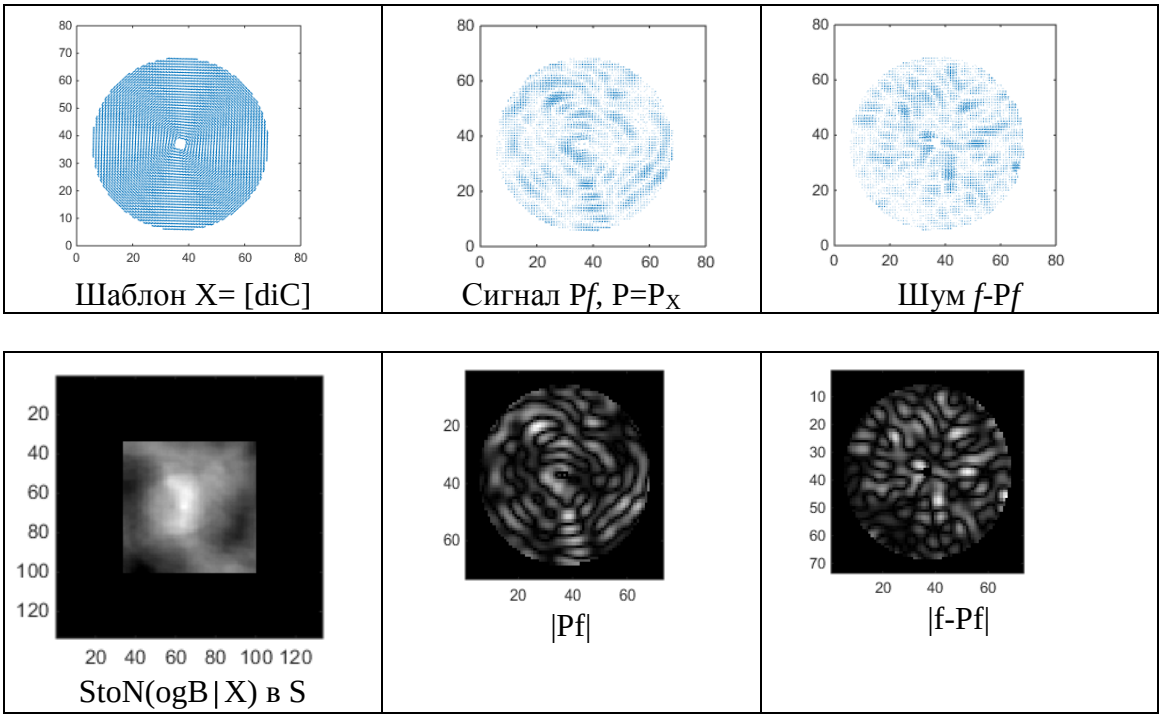


Рис. 2. Компоненты функции StoN и ее значения в области сканирования S.

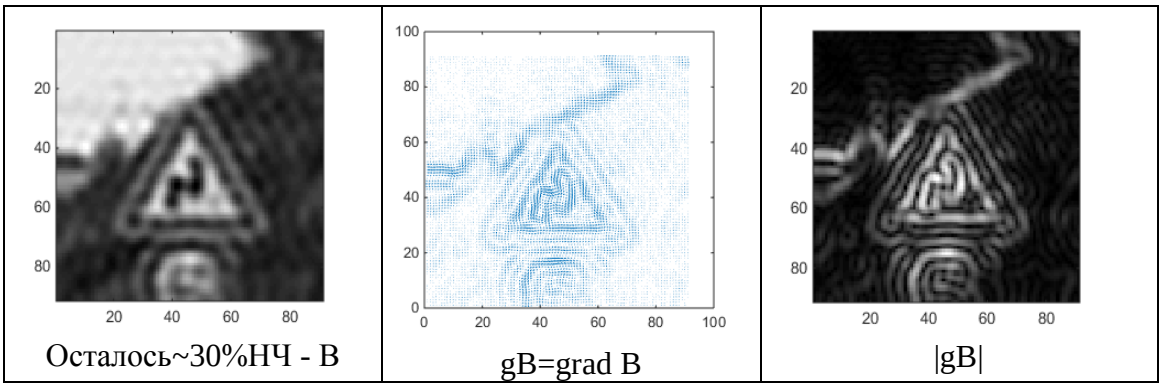


Рис. 3. Пример области изображения B (Blue) с ДЗ, градиентного поля gB и |gB|.

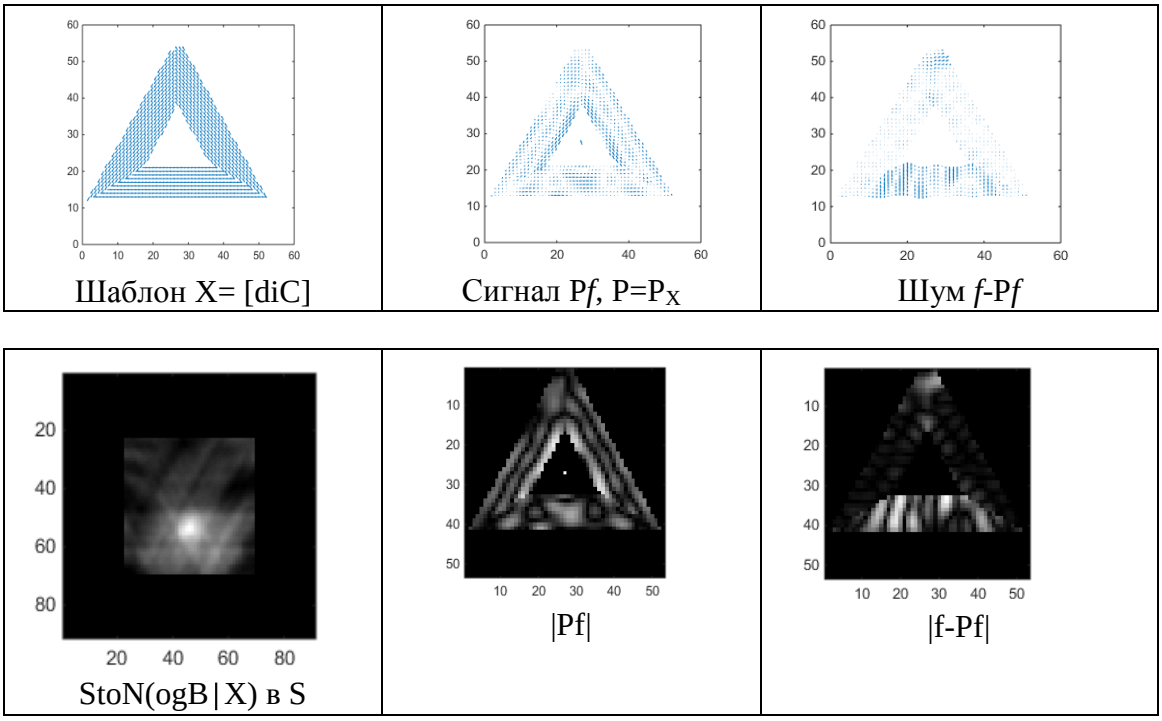


Рис. 4. Компоненты функции StoN и ее значения в области сканирования S.

Выводы. Метод индикации вихрей и локальных объектов типа ДЗ с использованием градиентных полей [1,2] работает более точно по сравнению с известными методами анализа изображений. В будущем ожидаются очень широкие области применения.

В последующей работе рассмотрим проблему распараллеливания вычислений на графических ускорителях.

Очень высокая помехозащищенность данного метода с сохранением высокой точности оценивания положения объекта возможно, будет востребована в задачах целеуказания по изображениям объектов с характерной геометрической формой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е.Н. Терентьев, Н.Е. Терентьев // Процессы в геосредах, № 4 (9), с. 355-362 (2016).

2. Е.Н. Терентьев, Н.Е. Терентьев, И.И. Фаршакова // Труды школы-семинара «Волны-2017». Математическое моделирование в радиофизике и оптике, с. 56-58, Красновидово, 4-9 июня, 2017.

Характеристики Адекватности Моделей сверхразрешения в радиовидении

Е.Н. Терентьев[1], Н.Е. Шилин-Терентьев[2], Ю.А. Пирогов[1], И.И. Фаршакова[1]
[1]*Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова*
[2]*EPAM systems, USA*
en.teren@physics.msu.ru

Под Характеристиками Адекватности Моделей (ХАМ) сверхразрешения понимается зависимость трех функций: нормы разрешающей функции (или реакции на шум), ошибки в диаграмме направленности и значения индикатора обратимости. По ХАМ диаграммы направленности системы радиовидения планируется реальное сверхразрешение.

Введение

Если Модуляционная Передаточная Функция (МПФ) M(O) ограничена: $diap \le |M(O)| \le 1$, то $1 \le |M(R)|=1/|M(O)| \le DIAP$. Ограничение в частотной области DIAP=1/diap является параметром обусловленности АФ O. Если для четных АФ O DIAP устремим к единице, то мы получим АФ D_K – дельта символ Кронекера – самую обусловленную АФ. Понятное дело, что у хорошего прибора значения МПФ M(O) должны быть подальше от нуля.

Обычно прибор способен оцифровывать изображения с определенным шагом, который задается разработчиком прибора. Будем считать этот шаг единичным dx=1. С шагом dx=1 оцифровывается и АФ O, O не равно D_K.

Основная идея ХАМ сверхразрешения состоит в том, что выбираются такие размеры области определения АФ O, что бы ее обратная разрешающая функция $R=O^{-1}$ на выбранной дискретной области имела минимальную норму.

Минимум нормы R реализуется путем изменения шага оцифровки dx и изменением длины Loc области определения АФ O. Кроме того мы можем огрублять АФ O до обратимой $pO=pR^{-1}$ путем увеличения ее обусловленности параметром DIAP [2-5]. Множество разных длин Loc областей определения АФ O с разными шагами оцифровки dx и разными параметрами DIAP будем называть “Ложем АФ O” LO={pO|[Loc, dx, DIAP]}. Из Ложа LO берем только те АФ pO с min Nor(pR), те берем работоспособные приборы с обратимыми АФ $pO=pR^{-1}$.

Заметим, что современные математические методы при решении обратной проблемы по существу предлагают использовать “априорную информацию о гладкости” сигналов (решений обратной задачи) на, возможно, не работоспособных, плохих приборах. Адекватность Дискретной Измерительной Системы (ДИС) прибора не проверяется. Понятное дело, что “гладкие решения” связывать с неработоспособным прибором не совсем адекватно.

Отличительным моментом ХАМ сверхразрешения является получение сверх разрешения объектов меньше размера пиксела исходного изображения.

Постановка задачи

Основная задача по выбору АФ $pO=pR^{-1}$ ставится как задача на минимум:

$$\min_{LO}\{\|pR\| \mid Err(pO) \le eps\},\ \ LO = \{pO \mid [Loc, dx, DIAP]\} \qquad (1)$$

с ХАМ ДИС.

$$\{x = \mathrm{Nor}(pR),\ \ y = \mathrm{Err}(pO),\ \ z = \mathrm{II}(pR * O)\}. \qquad (2)$$

Оценивание величины сверхразрешения. Если имеет место нормировка АФ O: ∑O=1, то в нуле МПФ M(O)(0)=1, то будем оценивать сверхразрешение величиной (SR -сокращение от Super Resolution):

$$SR=\sum M(pR)M(O)/\sum M(O) \qquad (3)$$

Заметим, что SR≥ 1. Если АФ $O=D_K$, то SR=1. Величина сверхразрешения SR есть функция параметров [Loc, dx, DIAP] (1). Желательно, чтобы величина сверхразрешения не зависела от размеров изображений с большими Loc.

Пример реализации ХАМ сверхразрешения

На Рис. 1 приведены примеры сверхразрешения в исходной сетке dx=1 и с интерполированием с dx=1/4. Отдельно представлено сверхразрешение короны с dx=1/4.

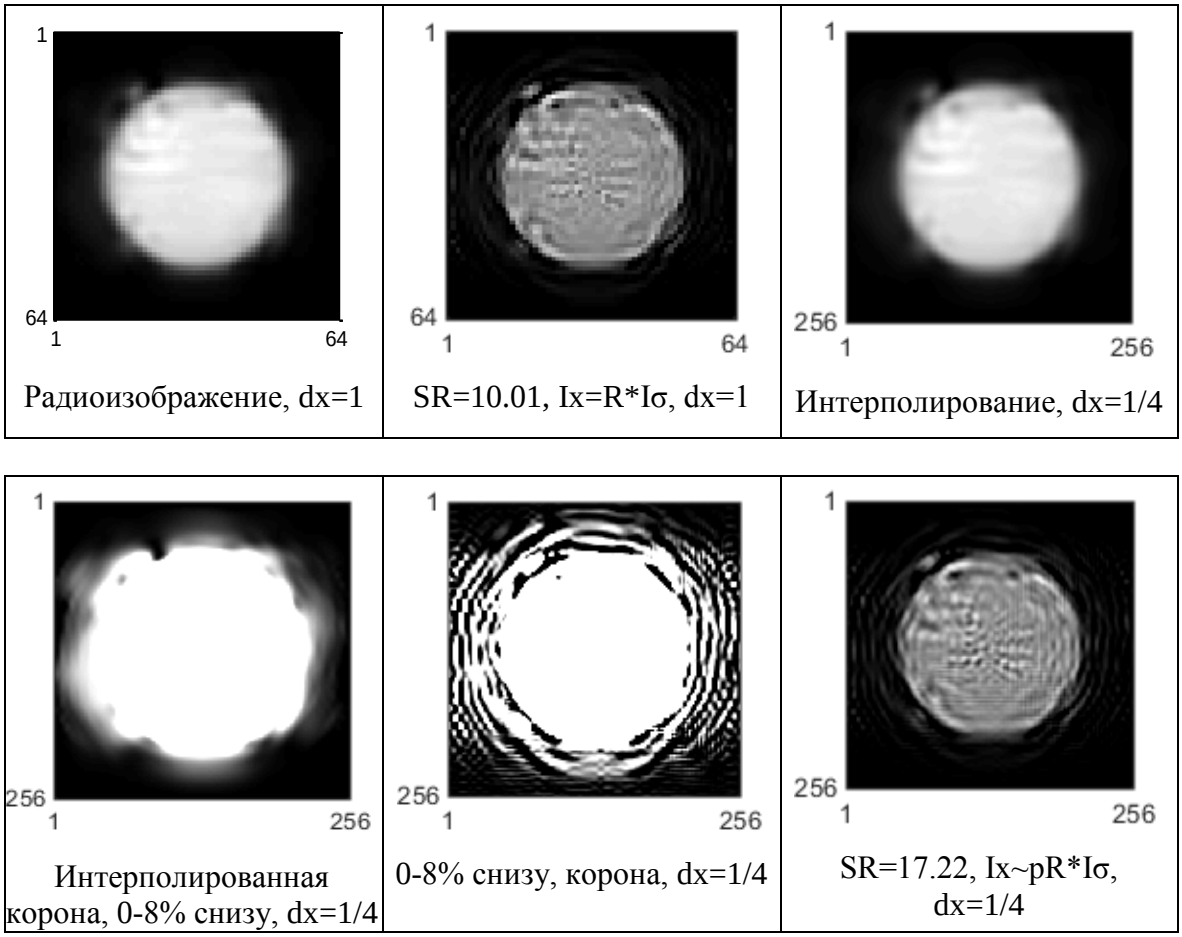


Рис. 1. Примеры применения ФПН АФ O в задаче о сверхразрешении радиоизображения Солнца в дискретном dx=1 и непрерывном dx=1/4 случаях.

Пример ХАМ АФ pO

Квадратиком со стрелкой обозначены места на ХАМ АФ pO, которым соответствуют изображения на Рис. 1.

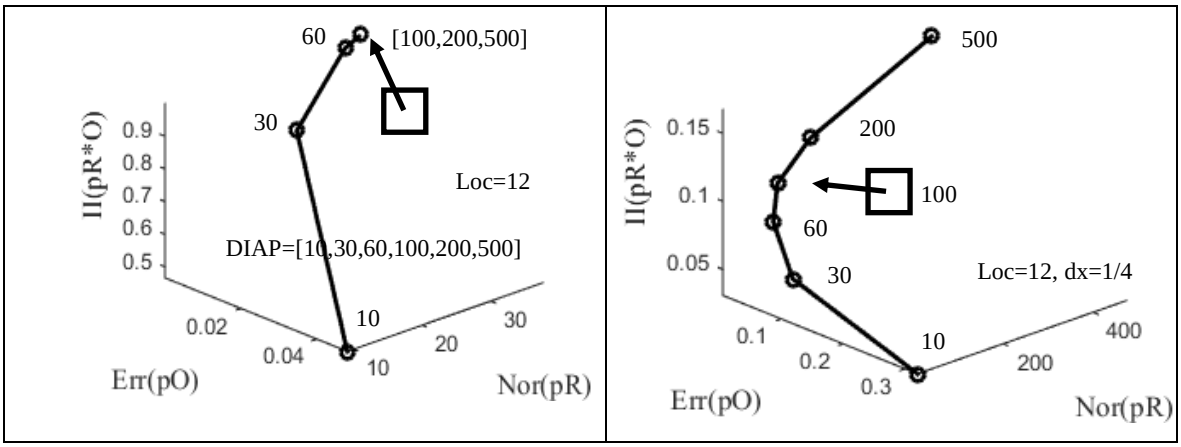


Рис. 2. Примеры ХАМ АФ O в дискретном и непрерывных случаях.

На Рис. 3 изучаем поведение значений сверхразрешения SR при dx=1/2, 1/6 и 1/8.

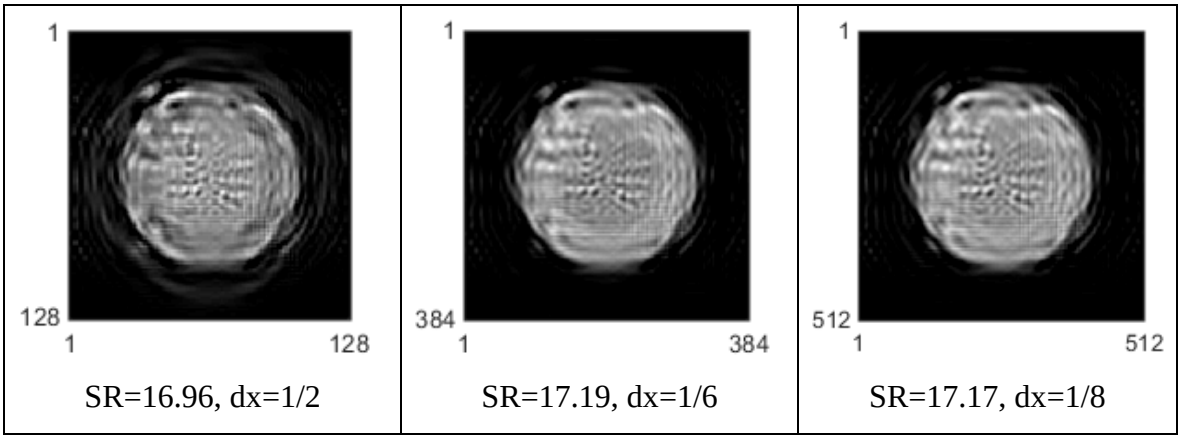


Рис. 3. Зависимость величины SR от dx при DIAP=100, Loc=12.

Сверхразрешение SR как функция с насыщением

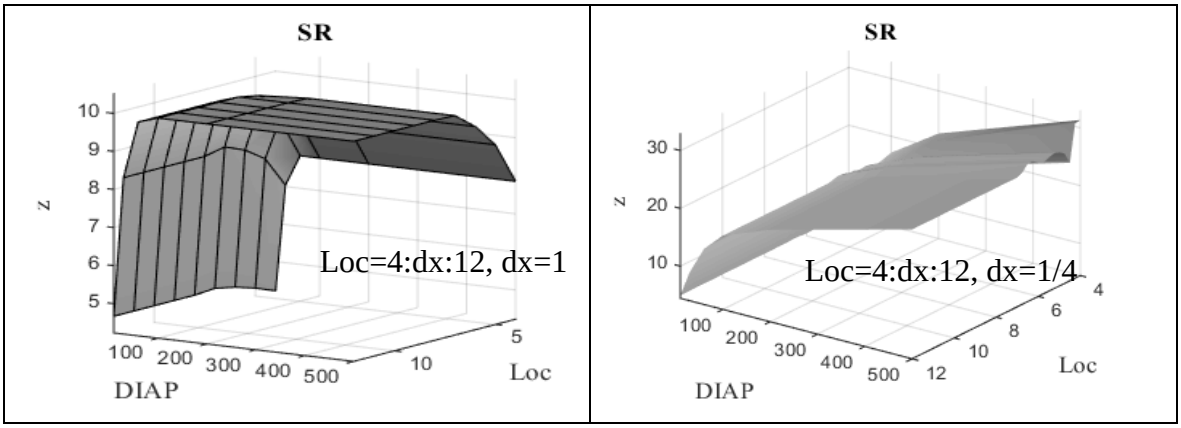


Рис. 4. Зависимости SR от параметров [Loc, dx, DIAP] в дискретном и непрерывном случаях.

В дискретном случае с dx=1 сверхразрешение SR~10 в области насыщения. В непрерывном случае SR~17.17 с dx=1/8 и насыщения нет (по DIAP), см. Рис. 4.

Обсуждение

В приведенном ниже примере по сути реализовано разрешение внутри пиксела исходного изображения. В качестве такового взято радиоизображение Солнца, полученное с помощью радиотелескопа 3-мм диапазона РТ-7.5, расположенного на Дмитровском полигоне МГТУ имени Н.Э.Баумана и построенного под руководством профессора МГТУ Б.А.Розанова. Параболическое зеркало радиотелескопа имело диаметр около 8 м и обеспечивало сканирование пространства с диаграммой направленности в 3 угловых минуты. При расстоянии от Земли до Солнца в 150 млн. км это соответствует наблюдаемому на поверхности Солнца пикселу с линейным размером около 50 тыс. км или одной тридцатой части диаметра солнечного диска.

Достигнута величина сверхразрешения SR~17, с разрешением объектов меньше пиксела в исходном изображении.

Выводы

Не гладкость решений позволяет обоснованно и безопасно применять данный метод, например, в контурах управления реактором. Интересные модификации методов управления АФ О могут быть реализованы в новых радарных технологиях, локаторах с синтезированной апертурой, рентгеновских томографах, телескопах и т.п.

Если есть необходимость, то решения (сверхразрешенные изображения) можно «сгладить» согласно априорной информации. Возможно применение ХАМ АФ с интерполяцией для достижения предельного сверх разрешения в электронной микроскопии и томографии. В томографии нужен очень мощный вычислитель с большой памятью, так как задачи трехмерные

Конечно, в идеальном случае надо проектировать умные, самонастраивающиеся приборы (антенные системы) под реализуемую ДИС по ХАМ АФ О. Предполагаем, что все это можно реализовать “в железе” для современных радаров, телескопов, микроскопов, томографов и т.п.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е.Н. Терентьев, Н.Е. Терентьев//Изв. РАН, Сер. Физ., 2015, том 79, № 12, с. 1633-1637

2. E.N. Terentiev, N.E. Terentiev // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2015, Vol.79, No 12, pp.1427-1431, DOI 10.3103/S1062873815120229

3. Е.Н. Терентьев //УЗФФ Московского Университета, 9 с., №6, 1761005(2017)

4. E.N. Terentiev, N.E. Terentiev, I.I. Farshakova // doi: 10.1007/978-3-319-77788-7_19