

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
В РАДИОФИЗИКЕ И ОПТИКЕ**

Исследование поглощения электромагнитных волн в двуслойном графене методом Монте-Карло в присутствии магнитного поля	
<i>В.Л. Абдрахманов, Д.В. Завьялов</i>	<i>3</i>
Неоднородность плазменного микрополя	
<i>А.А. Белов, Н.Н. Калиткин, И.А. Козлитин</i>	<i>5</i>
Математическое моделирование волноведущих систем на основе метаматериалов методом конечных элементов	
<i>А.Н. Боголюбов, Н.А. Боголюбов.....</i>	<i>8</i>
Дискретное моделирование параметрической неустойчивости магнитоактивной плазмы	
<i>Л.В. Бородачев.....</i>	<i>11</i>
Бороуглеродные нанотрубки типа BC_n – новый класс метаматериалов	
<i>С.В. Борознин, И.В. Запороцкова, Н.П. Борознина</i>	<i>14</i>
Моделирование слоистых гетероструктур методом FDTD	
<i>В.А. Говорухин, Ж.О. Домбровская, Н.Е. Шапкина</i>	<i>16</i>
Моделирование процессов распространения излучения в приемопередающих трактах лазерных систем	
<i>А.М. Зотов, А.В. Аверченко, П.В. Короленко, Н.Н. Павлов.....</i>	<i>18</i>
Математическое моделирование конической безэховой камеры	
<i>М.К. Кеппер, Н.Е. Шапкина</i>	<i>21</i>
Численное моделирование тепловых шумов в микрорезонаторах с модами шепчущей галереи	
<i>Н.М. Кондратьев, М.Л. Городецкий.....</i>	<i>23</i>
Учет эффекта нелокальности при рассеянии света на плазмонных наночастицах в гибридной схеме метода дискретных источников	
<i>И.В. Лопушенко</i>	<i>28</i>
Сингулярности электромагнитного поля волновода в окрестности особых точек	
<i>А.Н. Боголюбов, И.Е. Могилевский</i>	<i>32</i>
Расчет высокоэффективных резонаторов твердотельных лазеров	
<i>П.А. Носов, В.И. Батшев, В.Ю. Павлов</i>	<i>35</i>
Расчет формирующей оптической системы технологического оборудования на базе мощных волоконных лазеров	
<i>П.А. Носов</i>	<i>38</i>

Изучение характеристик семейства молекул с выделенными одноатомными зарядовыми центрами на основе атомов Rh, Ru, Pt для построения одноэлектронного молекулярного транзистора	
<i>А.А. Паршинцев, В.В. Шорохов, Е.С. Солдатов</i>	40
Моделирование модифицированных резонаторов Фабри-Перо: расчет собственных мод и изучение их устойчивости	
<i>М.В. Поплавский</i>	41
Моделирование полупроводниковых лазеров и оптических усилителей	
<i>А.Г. Ржанов</i>	44
Дифракция на телах с коническими точками	
<i>В.В. Ровенко, И.Е. Могилевский</i>	48
Моделирование периодических волноведущих систем сложной геометрии терагерцового диапазона	
<i>В.М. Пикунов, А.И. Ерохин, М.И. Светкин</i>	51
Моделирование сочленения прямоугольных волноводов разного размера	
<i>В.М. Пикунов, А.И. Ерохин, М.И. Светкин</i>	53
Конечномерные Теоремы Отсчетов в моделировании вихрей	
<i>Е.Н. Терентьев, Н.Е. Терентьев, И.И. Фаршакова</i>	56
Физические Принципы Настройки и интерполяция в достижении предельного сверх разрешения	
<i>Е.Н. Терентьев, Н.Е. Терентьев, И.И. Фаршакова</i>	59

Исследование поглощения электромагнитных волн в двухслойном графене методом Монте-Карло в присутствии магнитного поля

В.Л. Абдрахманов, Д.В. Завьялов
Волгоградский государственный технический университет
369565@gmail.com

На протяжении уже более десяти лет ведутся активные теоретические и экспериментальные исследования графена и родственных материалов [1,2]. Интерес к этому материалу обусловлен, в немалой степени, его необычным законом дисперсии носителей заряда, который обуславливает уникальные свойства графена.

В работе исследуется поглощение электромагнитных волн в двухслойном графене, находящемся в постоянном магнитном поле. В однослойном графене этот эффект теоретически был изучен в [3] как в приближении постоянного времени релаксации, так и при помощи моделирования с использованием метода Монте-Карло. Двухслойный графен, в отличие от однослойного, позволяет управлять шириной запрещённой зоны при помощи внешнего постоянного поля. Изучение зависимости спектра поглощения от ширины запрещённой зоны так же является целью исследования.

Постановка задачи выглядит следующим образом: на лист двухслойного графена, расположенный в однородном магнитном поле перпендикулярно линиям напряжённости, но нормали падает плоская линейно-поляризованная волна.

Для моделирования процессов поглощения энергии падающей волны электронами используется квазиклассическое приближение. В его рамках электроны рассматриваются как классические частицы со спектром

$$\varepsilon = \sqrt{\Delta^2 + \frac{\gamma^2}{2} + v_F^2 p^2} - \sqrt{\frac{\gamma^4}{4} + (\gamma^2 + 4\Delta^2)v_F^2 p^2}, \quad (1)$$

где $v_F = 10^8 \frac{\text{см}}{\text{с}}$ – скорость Ферми в графене, $\gamma = 0,35$ эВ, а Δ зависит от разности потенциалов между слоями графена. В качестве процессов рассеивания носителей тока берется рассеяние на фононах (как акустических, так и бездисперсионных оптических).

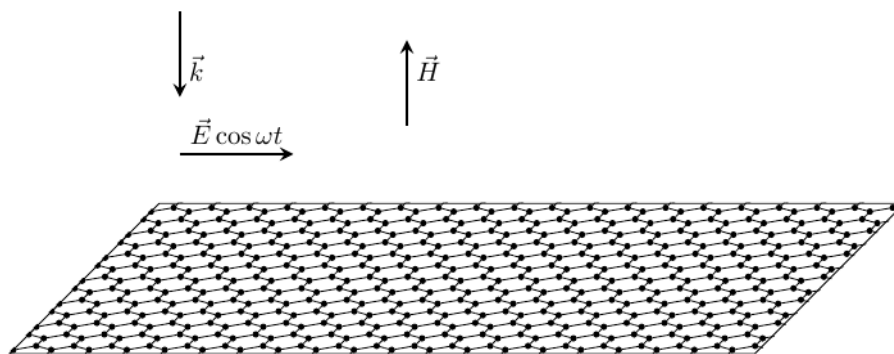


Рис. 1. Геометрия задачи

При помощи моделирования были получены зависимости поглощаемой мощности от частоты при различных значениях приложенного между слоями графена напряжения. Семейство этих кривых представлено на рисунке 2.

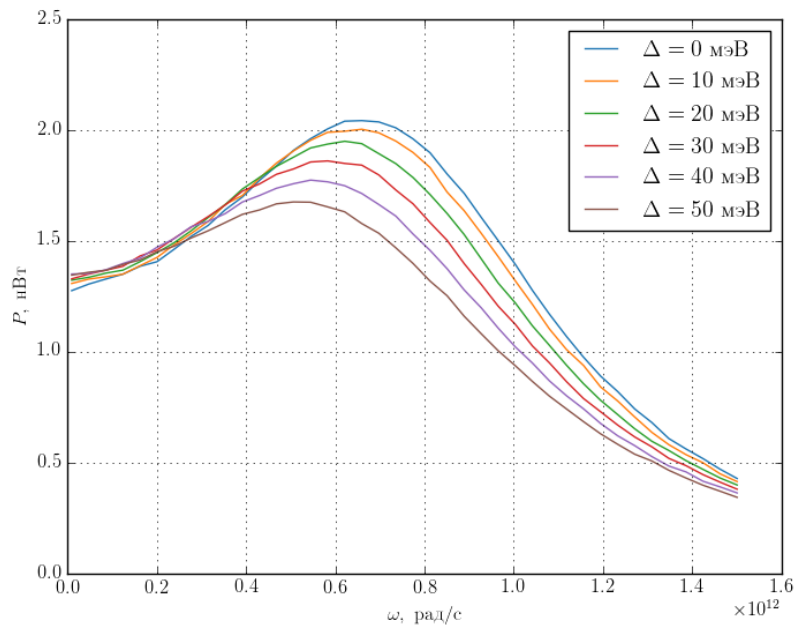


Рис. 2. Спектр поглощения двухслойного графена в магнитном поле при различных значениях разности потенциалов между слоями

Как можно заметить, увеличение поперечного электрического поля приводит к понижению резонансной частоты и уменьшению поглощения. Этот эффект связан с тем, что при воздействии постоянного электрического поля, перпендикулярного плоскости графена, в электронном спектре появляется область, в которой эффективная масса носителей стремится к бесконечности. Увеличение средней эффективной массы приводит к снижению поглощения и уменьшению циклотронной частоты, что приводит к смещению максимума поглощения влево и вниз.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Olbrich et al // Phys. Rev. B. 87, 235439 (2013).
2. V.L. Abdrakhmanov, S.V. Kryuchkov, D.V. Zav'yalov. // Physics of Wave Phenomena. 2016, V. 24, № 4, P. 295–300.
3. S.V. Kryuchkov, E.I. Kukhar', D.V. Zav'yalov. // Physics of the Solid State. 2015, V. 57, № 6, P. 1244-1248.

Неоднородность плазменного микрополя

А.А. Белов¹, Н.Н. Калиткин², И.А. Козлитин²

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет

²Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
aa.belov@physics.msu.ru, kalitkin@imamod.ru, kozlitin@elins.ru

1. Проблема. Плазма состоит из заряженных частиц разных сортов, находящихся в хаотическом тепловом движении. Поэтому электрическое поле, создаваемое этими частицами в некоторой точке пространства, будет флуктуировать во времени. Наличие такого поля существенно влияет на оптические свойства плазмы.

Если ионный остов находится в электрическом поле, то его уровни смещены относительно уровней изолированного от внешней поля иона. Поэтому для каждого отдельного иона будут смещены пороги фотоэффекта с разных уровней и положения спектральных линий, соответствующих переходам между уровнями. Поскольку электрическое поле флуктурует, то для совокупности всех ионов это приводит к размытию порогов фотоэффекта и уширению спектральных линий.

Отсюда видно, что для правильного описания оптических свойств плазмы необходимо знать статистические свойства микрополя. Серьезное изучение началось с работы Хольцмарка [1]. В этой работе из приближенных соображений была построена функция распределения электрического поля $P(E)$ в данной точке пространства. Это позволило разумно оценить штарковское уширение оптических линий. В 1980-е годы группа Иглесиаса (Лос-Аламос) построила модели $P(E)$, ориентированные на плазму высоких плотностей. Тогда же появились эксперименты по измерению рентгеновских спектров лазерной плазмы с $T \sim 1$ кэВ и $\rho \sim 1$ г/см³, разумно согласующиеся с этими моделями.

Однако никто не обращал внимания на один принципиальный недостаток всех этих моделей. Их распределения имели медленно убывающие «хвосты» $P(E) \sim E^{-3}$ при $E \rightarrow \infty$. Это приводило к тому, что плотность энергии электрического поля

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_0^{\infty} E^2 P(E) dE \quad (1)$$

оказывалась бесконечной. В формулах используем атомную систему единиц. Согласие с экспериментами объясняется тем, что за наблюдаемые контуры линий отвечает только малая окрестность максимума функции распределения, которая в этих моделях рассчитывается удовлетворительно. Поэтому для полноценного описания микрополя потребовались новые подходы, начатые в [2-4] в предположении пространственной однородности микрополя. Далее изложено, как следует обобщить эти подходы на случай неоднородного микрополя.

2. Пространственная неоднородность. Точку, в которой ищем поле, выберем за начало координат. Пусть плазма состоит частиц с зарядом Z_j с мгновенными положениями \vec{r}_j . Этими частицами являются ионы и электроны ($Z_e = -1$). Плазма электронейтральна, так что

$$\sum Z_j = 0. \quad (2)$$

Нам нужны характеристики поля в точке \vec{r} вблизи начала координат. Каждый заряд создает в этой точке потенциал $\varphi_j = Z_j / |\vec{r}_j - \vec{r}|$. Поэтому полный потенциал равен

$$\varphi(\vec{r}) = \sum Z_j / |\vec{r}_j - \vec{r}|. \quad (3)$$

Разложим этот потенциал по \vec{r} , ограничиваясь квадратичными членами:

$$\varphi(\vec{r}) \approx \varphi(0) + (\vec{E}, \vec{r}) + \frac{1}{2}(\vec{r}, T\vec{r}). \quad (4)$$

Здесь скаляр, вектор электрического поля \vec{E} и тензор T имеют следующий вид:

$$\varphi(0) = \sum Z_j / r_j, \quad \vec{E} = \sum Z_j / r_j^3 \{x_j, y_j, z_j\}, \quad T = \sum Z_j / r_j^5 t, \quad r_j = \sqrt{x_j^2 + y_j^2 + z_j^2}. \quad (5)$$

$$t = \begin{pmatrix} 3x_j^2 - r_j^2 & 3x_j y_j & 3x_j z_j \\ 3x_j y_j & 3y_j^2 - r_j^2 & 3y_j z_j \\ 3x_j z_j & 3y_j z_j & 3z_j^2 - r_j^2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Во всех предшествующих работах рассматривалась только напряженность \vec{E} , а наличие не только третьего, но и первого слагаемых в (4) не учитывалось.

3. Распределения. Обозначим через V средний объем, приходящийся на один ион. Тогда радиус R сферы объема V есть среднее расстояние между ионами. Введем среднее значение заряда Z , учитывающее наличие ионов и электронов (это усреднение либо по Хольцмарку, либо по Дебаю).

Согласно [3], примем гипотезу квазинезависимости частиц (модель QUIP). Этот предполагает, что кинетическая энергия движения существенно больше энергии кулоновского взаимодействия. Тогда для нахождения функции распределения величин (5)-(6) можно использовать закон больших чисел. Это приводит к следующим закономерностям. Скалярный потенциал $\varphi(0)$ имеет гауссову функцию распределения

$$P(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\varphi_0} \exp\left(-\frac{\varphi^2}{\varphi_0^2}\right). \quad (7)$$

Каждая из компонент вектора напряженности также имеет гауссово распределение, а длина этого вектора имеет максвелловское распределение:

$$P(E_i) = \frac{1}{\sqrt{\pi}E_0} \exp\left(-\frac{E_i^2}{E_0^2}\right), \quad P(E) = \frac{E^2}{2\sqrt{\pi}E_0^3} \exp\left(-\frac{E^2}{E_0^2}\right). \quad (8)$$

При этом компоненты E_x, E_y, E_z не коррелированы ни между собой, ни со скалярами φ или E . Компоненты квадрупольного тензора также распределены по Гауссу и не коррелированы с величинами (7), (8)

$$P(T_{ik}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}T_0} \exp\left(-\frac{T_{ik}^2}{T_0^2}\right). \quad (7)$$

Масштабные константы определяются из следующих соображений. Электрическое поле имеет плотность энергии (1). Умножая плотность W на V , получаем энергию в средней атомной ячейке. Квазинезависимость частиц означает среднюю равномерность их распределения в пространстве. В этом случае энергия кулоновского взаимодействия на одну ячейку равна $-0.9Z^2/R$. Но прямое

взаимодействие частиц можно трактовать как взаимодействие одной частицы с полем, созданным полем другой частицы, но с обратным знаком. Это дает

$$E_0 = \sqrt{18/5} Z/R^2. \quad (8)$$

Максимум распределения напряженности достигается при $E = E_0 \approx 1.90 Z/R^2$. Это достаточно близко к максимуму распределения Хольцмарка, который достигается при $E \approx 1.65 Z/R^2$. Поскольку напряженность есть градиент потенциала, а квадрупольный тензор есть производная напряженности, то

$$\varphi_0 = \sqrt{18/5} Z^2/R, \quad T_0 = 6\sqrt{2/5} Z^2/R^3. \quad (9)$$

Отсюда видно, что разложение (4) есть ряд по степеням R^{-1} .

Оценим характерную величину R для нескольких типичных ситуаций. (а) Открытый разряд в трубках при давлении 1 атм. и температуре $T = 8-10$ кК, который часто употребляется в различных спектрометрических измерениях. (б) Разряд в запаянном капилляре, когда плотность холодного газа соответствует 1 атм., а температура при нагреве составляет 10-20 кК; такой разряд используют для исследования уширения линий в плотной плазме. (в) Горячая плазма с плотностью $\rho \sim 1$ г/см³, близкой к плотности твердого тела. (г) Сверхплотная плазма с $\rho \sim 100$ г/см³, что соответствует сжатию конденсированных веществ ударными волнами с давлениями в сотни миллионов атмосфер. Соответствующие значения R приведены в табл. 1.

	(а)	(б)	(в)	(г)
R (a.e.)	120	40	4	1

Табл. 1. Радиусы атомных ячеек в различных условиях.

Видно, что в первых двух случаях сходимость ряда (4) хорошая, и опущенными членами разложения можно пренебречь. Даже в третьем случае можно разумно ограничиться квадрупольным членом. Лишь в четвертом случае вкладом следующих членов пренебрегать нельзя.

4. Оптические свойства. Можно показать, что распределение $P(\varphi)$ ответственно за размытие порогов фотоэффекта. Распределения $P(E)$ и $P(T)$ ответственные за штарковское уширение спектральных линий. Предварительные количественные оценки этих эффектов разумно согласуются как с экспериментальными рентгеновскими спектрами в плотной лазерной плазме, так и с ширинами линий в открытых разрядных трубках. Все три слагаемых надо использовать для определения заселенностей электронных уровней и, тем самым, для расчета интенсивности фотоэффекта и поглощения в линиях.

Работа поддержана грантом РНФ № 16-11-10001

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Holtmark // Ann. Phys. 1919. V. 58. P. 577.
2. Н.Н. Калиткин, И.А. Козлитин. // ДАН. 2006. Т. 411. № 1. С. 36.
3. Н.Н. Калиткин, И.А. Козлитин. // ДАН. 2008. Т. 418. № 5. С. 614.
4. Н.Н. Калиткин, И.А. Козлитин. // Физика плазмы. 2011. Т. 37. № 2. С. 214.

Математическое моделирование волноведущих систем на основе метаматериалов методом конечных элементов

А.Н.Боголюбов, Н.А.Боголюбов

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
bogan7@yandex.ru, russell67@yandex.ru

В настоящее время большие перспективы в высокочастотной электродинамике, волновой и интегральной оптики связывают с устройствами, построенными с использованием мезоскопических систем – искусственно созданных структурированных материалов с характерными размерами структурных элементов от единиц до сотен нанометров. Наряду с волноведущими системами со сложной нерегулярной геометрией и с неоднородным анизотропным заполнением все большее применение находят волноведущие системы с биизотропным и, в частности, с киральным заполнением. Помимо широко используемых различных устройств на основе многослойных систем, начинают применяться многослойные устройства на основе фрактальных слоистых структур. Эти устройства позволяют получать компактные и эффективные средства связи и управления в широком диапазоне длин волн. В связи с этим весьма остро встает вопрос о моделировании известных, создании и реализации новых экономичных высокоточных алгоритмов расчета подобных устройств, позволяющих исследовать наиболее полные математические модели с использованием, в частности, кластерных вычислительных систем [1]. По-прежнему остается насущной необходимостью создание эффективных численных методов, позволяющих проводить апостериорную оценку точности полученных конкретных результатов вычислительного эксперимента. Весьма актуальной является задача создания и исследование математических моделей металлодиэлектрических, диэлектрических и многослойных волноведущих систем, в частности, на основе киральных, биизотропных и бианизотропных сред. Решение данной задачи включает в себя несколько этапов. Этап первый: разработка эффективных численных и численно-аналитических методов и модернизация известных методов исследования построенных математических моделей. Этап второй: строгое математическое обоснование этих методов на основе глубокого изучения возникающих операторов в специальных функциональных и топологических пространствах. Этап третий: создание на основе разработанных методов алгоритмов для исследования широкого класса волноведущих систем и устройств. Этап четвертый: реализация построенных алгоритмов в виде программ и программных комплексов.

Для описания волноведущих и многослойных систем используются математические модели, представляющие собой краевые и начально-краевые задачи для систем уравнений в частных производных в ограниченных и неограниченных областях с нерегулярной геометрией и сложным неоднородным и анизотропным заполнением. Операторы, возникающие в таких задачах, являются несамосопряженными и незнакоопределенными. Большой интерес представляет исследование как прямых задач математического моделирования волноведущих и многослойных систем, так и обратных задач математического синтеза таких систем с заранее заданными свойствами. В работах А.Г.Свешникова и А.С.Ильинского, был предложен подход решения задач синтеза в полной математической постановке с использованием метода регуляризации А.Н. Тихонова [2]. В основе данного подхода лежит идея многократного решения прямой задачи расчета волноведущей системы с направленно изменяемыми оптимизационными параметрами.

В процессе решения задачи синтеза используются вариационные постановки задач, строится оценивающий функционал и ищется его экстремум. Задача синтеза

волноведущих систем является нелинейной задачей с несамосопряженными операторами, что препятствует использованию известных алгоритмов и программ. Весьма эффективные алгоритмы минимизации прямого поиска могут быть построены на основе метода Нелдера-Мида, который является одним из наиболее удобных и универсальных методов при относительно небольшом числе минимизируемых параметров [1]. Разработанные на основе данного метода алгоритмы решения задач синтеза волноведущих систем используют технологию распараллеливания вычислительного процесса. В частности, на каждом шаге процесса оптимизации параллельно решается ряд прямых задач.

Математическое моделирование прямых задач осуществляется с использованием проекционных и конечно-разностных методов и их модификаций, например, различных вариантов проекционно-сеточных методов (метод конечных элементов, метод смещенных конечных элементов, метод суперэлементов и т.д.). Эти методы являются наиболее мощными и универсальными для решения задач расчета волноведущих систем со сложной геометрией и сложным заполнением на основе метаматериалов. Важнейшим моментом в исследовании качества разработанных методов и построенных на их основе алгоритмов является исследование их сходимости и априорная и апостериорная оценки получаемой точности, что осуществляется путем глубокого изучения методами функционального анализа спектральных свойств операторов построенных краевых задач.

Можно выделить два класса задач, методика применения метода конечных разностей и конечных элементов для которых совершенно различна. Первый класс – это задачи возбуждения, заключающиеся в расчете неоднородных по длине волноведущих систем, таких как ответвители, согласующие переходы, изгибы, волноводные трансформаторы и т.д. Под неоднородностями при этом подразумеваются как неоднородности геометрии волноведущей системы, так и неоднородности заполняющей ее среды. Второй класс – это спектральные задачи, заключающиеся в расчете однородных по длине волноведущих систем с неоднородной геометрией поперечного сечения и произвольным изменением свойств заполнений среды в поперечном направлении.

В работе [3] на основе метода смешанных конечных элементов решена задача возбуждения плоского волновода с киральным заполнением.

В результате использования техники метода конечных элементов векторная задача расчета волноведущей системы со сложным заполнением на основе метаматериалов сводится к обобщенной алгебраической проблеме собственных значений для незнакоопределенных ленточных матриц высокого порядка. В случае эрмитовых или симметричных матриц для их факторизации, необходимой для последующего использования итерационных методов, применяется специальной стратегия - метод Банча-Кауфман, который предоставляет возможность разрешить проблемы, связанные со спецификой данных матриц [4].

В работах [5-6] построен и реализован алгоритм решения задачи распространения электромагнитных волн в волноведущих системах с биизотропным заполнением на основе лагранжевых конечных элементов, при применении которого не возникают фиктивные нефизические решения («духи»), и с использованием методики Банча – Кауфман для факторизации матрицы жесткости. Разработанный алгоритм использована для расчета постоянных распространения волн в волноводах с прямоугольной геометрией поперечного сечения с биизотропным заполнением. Результаты исследования продемонстрировали высокую эффективность и точность предложенного алгоритма. Разработанный метод решения прямой задачи впервые использован для решения задачи синтеза [7]. Общая постановка задачи позволяет применять

разработанные алгоритмы для моделирования широкого круга волноведущих систем, построенных с использованием метаматериалов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (проект 15-01-03524).

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Н. Боголюбов, Н.А. Боголюбов, А.Г. Свешников // Физические основы приборостроения. 2013. Т.2, №1. С. 10-17. Библ. 60.
2. А.Г. Свешников, А.С. Ильинский // ДАН СССР. 1972. Т.204. № 5. С. 1077.
3. A.N. Bogolyubov et. al. // PIERS. Progress in Electromagnetic Research Symposium PIERS 2012 Moscow. August 19-23. Section 3P5b “The Modern Hybrid Methods in the Problems of Computational Electromagnetics”. Moscow. August 19-23. P. 1224.
4. Ю.В. Мухартова, Н.А.Боголюбов. // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 2013. № 3. С. 3.
5. Н.А. Боголюбов, Ю.В.Мухартова // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54. №6. С. 969.
6. Ю.В. Мухартова, Н.А. Боголюбов // Математическое моделирование. 2014. Т. 26, № 12. С. 97.
7. Н.А. Боголюбов, И.А. Буткарев, Ю.В. Мухартова // Журнал радиоэлектроники: электронный журнал. 2015. №3. Режим доступа: <http://jre.chliire.ru/jre/mar15/17/text.pdf>.

Дискретное моделирование параметрической неустойчивости магнитоактивной плазмы

Л.В. Бородачев

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
borodach2000@mail.ru

Настоящее исследование непосредственно связано с проблемой аномального поглощения плазмой интенсивных световых пучков [1], механизм которого получил законченное объяснение в контексте сильной ленгмюровской турбулентности [2].

Детальное изучение сильно турбулентных электростатических процессов, в том числе и методами численного эксперимента, ведется фактически с начала 70-ых годов (см., например, работы [1-4]). Результатом этих усилий явилось выяснение общих закономерностей рассматриваемого явления. В частности, было установлено, что начальная раскачка внешней высокочастотной волной аperiodической неустойчивости, к которой по мере роста электростатических флуктуации добавляется и модуляционная неустойчивость, приводит к своеобразной самофокусировке ленгмюровских колебаний и появления нелинейных локальных особенностей их амплитуды. При этом за счёт высокочастотного давления частицы выталкиваются из области локализации волновых пакетов и в плазме образуются каверны (в одномерном случае - солитоны) плотности, играющие роль резонаторов для захваченных ленгмюровских колебаний, так называемые кавитоны. Последние в процессе эволюции «схлопываются» за конечное время, обеспечивая перекачку плазмонов из длинноволнового конденсата, порождаемого в общем случае сторонними источниками (например, лазерным излучением [5]), в коротковолновую часть спектра. На поздней (кинетической) стадии процесса включается эффективное затухание Ландау [2] на резонансных электронах, реализующее механизм усвоения плазмой волновой энергии.

Впервые это явление, названное ленгмюровским коллапсом, было рассмотрено в трехмерном случае в рамках усредненного (по «быстрому» времени $\sim 1/\omega_{pe}$) описания плазмы в работе [3]. Позднее в серии численных расчетов по электростатическому моделированию бесстолкновительной плазмы [4] была установлена принципиальная возможность вынужденного коллапса (квазиколлапса) в присутствии постоянной волны накачки и в одномерной геометрии (напомним, что в замкнутой одномерной системе без внешнего воздействия обычный коллапс запрещён законами сохранения [2]), а именно показано формирование солитонов и генерация высокоэнергичных электронов на поздней стадии процесса.

Таким образом, основные черты ленгмюровского коллапса, рассматриваемого в упрощенных (электростатических) постановках в настоящее время хорошо известны. Вместе с тем, учитывая фундаментальный характер явления, естественно желание продолжить его изучения для построения более точной теоретической модели, включающей магнитное поле. Использование с этой целью компьютерного эксперимента по методу макрочастиц [6], лишённого многих ограничений аналитических методов и обладающего огромными возможностями диагностики, весьма эффективно.

В этой связи на основе дискретной безызлучательной модели Власова – Дарвина [7] было проведено численное исследование параметрической неустойчивости в магнитоактивной среде, приводящей к возникновению на нелинейной стадии сильной ленгмюровской турбулентности, и сопоставление полученных результатов с имеющейся теорией. Последнее объясняет целесообразность подхода, при котором влияние магнитоактивности среды на параметрическую неустойчивость

ленгмюровских колебаний желательнее изучать, отталкиваясь от традиционных электростатических постановок и постепенно наращивая внешнее магнитное поле. В этом контексте отметим ряд моментов, на которые существенно опирается наша (электромагнитная) постановка.

Развитие ленгмюровского коллапса в поле волны накачки непосредственно связано с нелинейной эволюцией каверн плотности, имеющих ВЧ наполнение. Поэтому его численное изучение естественно вести в масштабах «турбулентной ячейки» [4], определяемых характерной величиной кавитона.

В наиболее интенсивной стадии процесса нелинейной самофокусировки колебаний концентрация средней по области плотности волновой энергии значительно (в 5-8 раз) больше плотности энергии внешней накачки. Это позволяет в отличие от ранних численных экспериментов по аномальному нагреву плазмы (например, [4]) использовать накачки малой и умеренной интенсивностей, реализующие оптимальные условия для наблюдения динамики коллапса.

Генерация кавитонов (способствующая обогащению коротковолновой части спектра ленгмюровских колебаний и в дальнейшем включение механизма затухания Ландау) обусловлена последовательной раскачкой параметрической и модуляционной неустойчивостей. Поэтому базовая постановка призвана разрешить разрешить их преобладающее развитие на фоне малых побочных эффектов.

Вместе с тем, как показали настоящие эксперименты, в магнитоактивной среде самофокусировка ленгмюровских колебаний на позднем этапе сопровождается активно идущими распадными процессами, которые в отличие от случая чистой электростатики во многом определяют кинетическую стадию коллапса. При этом обычное для лабораторной плазмы неравенство $Te \gg Ti$, сохраняемое в нашей постановке, обуславливает слабое затухание образующейся ионно-звуковой волны.

К ранее сказанному добавим, что в настоящих полуторамерных (X, V_x, V_y, V_z) исследованиях ленгмюровского коллапса мы ограничиваемся случаем продольных колебаний в направлении стоячей волны накачки $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0 \cos(\omega_0 t)$, перпендикулярной внешнему магнитному полю $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z B_0$ и с частотой ω_0 , близкой к верхнегибридной электронной $\omega_{uh} = (\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2)^{1/2}$. При этом в рамках стартовой процедуры организуется длинноволновое возмущение максвелловского распределения электронов по скоростям, обуславливающее повышенную плотность электростатической энергии в первой моде (с волновым числом $K_0 = 2\pi / L$) ленгмюровских колебаний, которая при удовлетворении неравенства $W_f / n_0 T_e > (K_0 r_{De})^2$ оказывается нестабильной. Это позволяет в зависимости от «расстройки» частоты внешнего возбуждения ω_0 реализовать на нелинейной стадии раскачки режимы аперриодической или распадной (рассматриваемой ниже) неустойчивости.

Отметим характерные моменты и особенности развития ленгмюровского коллапса, возникающие при параметрическом возбуждении магнитоактивной плазмы.

Прежде всего, нелинейная стадия самофокусировки ленгмюровских колебаний в электромагнитном случае протекает на фоне распада волны накачки на низкочастотную и высокочастотную моды, из которых вторая является верхнегибридным электронным колебанием, а первая — ионно-звуковой волной. При этом полученные численные результаты подтверждают теоретическую зависимость инкремента параметрической неустойчивости от интенсивности волны накачки $\gamma \sim (E_0^2)^{1/3}$ [1].

Далее, по мере развития распадных процессов растет амплитуда стоячей ионно-звуковой волны. Этот рост ограничивается процессом нелинейного «опрокидывания», сопровождающегося захватом все большей части ионов. Резко возрастающий при этом декремент неустойчивой низкочастотной моды вызывает соответствующее увеличение

порога распадной неустойчивости, что, в свою очередь, приводит к ее насыщению и стабилизации уровня электростатических флуктуации.

Наконец, в проведенных компьютерных экспериментах обнаружен аномальный поперечный нагрев плазменных компонент, наблюдающийся с разной интенсивностью, но во всех вариантах, связанных с параметрическим возбуждением потенциальных колебаний. Указанный эффект представляет особый интерес, поскольку имеет стохастическую природу и сохраняет максвелловский вид функции распределения частиц, в отличие от эффекта Ландау, генерирующего надтепловые ионы и электроны при ленгмюровском коллапсе в его классическом варианте [4].

Таким образом, на основе данных численных исследований можно утверждать, что коллапс, как нелинейная стадия модуляционной неустойчивости, имеет место при наличии умеренного магнитного поля. Однако, его кинетическая стадия определяется по сравнению с чисто электростатическим случаем уже не затуханием Ландау, а поперечным стохастическим нагревом основной массы электронов и более интенсивным захватом ионов в ионно-звуковые колебания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.М. Силин “Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму” М.: Наука, 1973.
2. Л.А. Арцимович, Р.З. Сагдеев “Физика плазмы для физиков” М.: Атомиздат, 1979.
3. В.Е. Захаров // ЖЭТФ. 1972. Т.62. № 5. С. 1745.
4. М.В. Масленников “Численное моделирование коллективных процессов в плазме” М.: ИПМ АН СССР, 1980.
5. Л.В. Бородачев // Мат. Моделирование. 2015. Т. 27. № 4. С.127.
6. R.W. Hockney, J.W. Eastwood “Computer Simulation Using Particles” N.-Y.: McGraw-Hill, 1981.
7. Л.В. Бородачев, И.В. Мингалев, О.В. Мингалев “Энциклопедия низкотемпературной плазмы (серия Б)”, Т. VII. М.: Янус-К, 2008. С. 136.

Бороуглеродные нанотрубки типа BC_n – новый класс метаматериалов

С.В. Борознин, И.В. Запороцкова, Н.П. Борознина
Волгоградский государственный университет
boroznin@volsu.ru

Поразительные свойства углеродных нанотубулярных структур сделали их источником идей для сотен различных применений в науке и технике, в том числе в нанотехнологии и нанoeлектронике, и вдохновили исследователей на поиск новых неуглеродных нанотрубок среди других классов неорганических соединений. Для этого был проведен ряд теоретических и экспериментальных работ, позволивших сначала предсказать, а затем и синтезировать одностенные нанотрубки изоэлектронных аналогов углерода – гексагональных наноструктур, полученных замещением атомов углерода в однослойных углеродных нанотрубках (ОУНТ) на атомы бора – так называемые BC_n трубки. Следует отметить, что трубки, полученные сверткой изоструктурных аналогов графита, таких, как квазипланарный карбид бора BC_3 , имеют меньшую энергию деформации, чем сами углеродные нанотрубки, что делает их получение энергетически выгодным. Они обладают интересными электронно-энергетическими характеристиками, зависящими от взаимного расположения атомов бора и углерода в них.

Это рождает множество интересных исследовательских задач, таких как теоретическое моделирование наиболее вероятного расположения атомов В и С в бороуглеродных нанотубуленах. Несмотря на ожидаемую практическую пользу и важность этих одномерных наносистем, их структура и свойства экспериментально до сих пор не изучены.

В 2003 году ученым удалось синтезировать однослойные бороуглеродные нанотрубки. Исследование многослойных бороуглеродных нанотруб методом сканирующей туннельной спектроскопии (СТС) представлено в работе. Данные соединения могут быть рассмотрены как новый класс нанотубулярных систем, обладающих уникальными физико-химическими свойствами, открывающими широчайшие перспективы их использования в нанотехнологии. Ожидается, что бороуглеродные нанотубулярные системы станут образующим материалом для новых структур в различных областях от производства новых элементов питания до защиты окружающей среды.

Однако до настоящего времени не существует однозначного мнения о наиболее энергетически выгодной структуре бороуглеродных нанотруб, практически ничего не известно об их электронно-энергетическом строении, физических и химических свойствах. Поэтому исследования данного класса нанотубулярных борсодержащих структур и композитов на их основе в настоящее время являются чрезвычайно актуальными ввиду ожидаемых перспектив применения.

Задачей данной работы являлось исследование возможности существования бороуглеродных нанотубуленов с различными вариантами атомного упорядочения атомов бора и углерода и установление особенностей электронно-энергетического строения данных наноструктур.

Возможным вариантом бороуглеродной структуры является гексагональный карбид бора BC_n – его квазипланарная форма, схожая по строению с графитом. Это одномерная плоская структура, состоящая из подобных углеродным гексагональным циклов. Химические связи определены сильными ковалентными взаимодействиями, обусловленными гибридными sp -орбиталями. В работе рассмотрены различные нанотубулены с различным содержанием атомов бора в кластерах (15%, 25%,

50%). Также были смоделированы различные варианты расположения атомов в кластере нанотрубки для изучения влияния периодичности на ширину запрещенной зоны и, как следствие, на электронные свойства изучаемых наносистем.

Расчеты проводились с использованием метода функционала плотности (DFT) с использованием функционала B3LYP и базиса 6-31G. Для двух видов нанотрубок (концентрации 50% и 25%) были предложены два варианта расположения цепочек атома бора относительно продольной оси нанотрубки: вдоль и поперек ее; для концентрации 15% было выбрано расположение вдоль спирали.

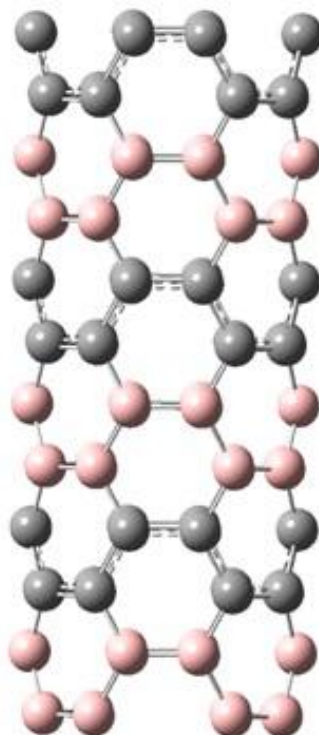


Рис. 1. Фрагмент кластера ВС нанотрубки с периодически расположенными атомами бора

Анализ ширины запрещенной зоны показал, что все рассматриваемые нанотрубулены относятся к диэлектрикам, причем ширина запрещенной зоны уменьшается по мере увеличения концентрации атомов бора (4,09 эВ для 15%, 2,99 эВ для 50%). Анализ зарядового распределения позволил сделать интересные выводы о возможных сферах применения данных нанотрубок. На томах углерода поверхности концентрируется отрицательный заряд, а на атомах бора – положительный. Это позволяет предположить, что данные наноструктуры можно использовать в наноэлектронике при создании электрических схем при ориентации атомов продольно главной оси тубулена, а также в качестве наноконденсаторов при их поперечном расположении.

Работа выполнена в рамках реализации гранта Президента РФ МК-1735.2017.8.

Моделирование слоистых гетероструктур методом FDTD

В.А. Говорухин, Ж.О. Домбровская, Н.Е. Шапкина

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет
v081297@mail.ru

Метод конечных разностей во временной области (Finite-DifferenceTime-Domain, FDTD) является одним из наиболее популярных методов численной электродинамики. Он основан на дискретизации уравнений Максвелла, записанных в дифференциальной форме, по конечно-разностной схеме Йе [1], [2].

Метод FDTD относится к так называемым резонансным методам. Как правило, его используют для расчетов электродинамических характеристик структур, характерные размеры которых порядка длины волны. При этом, чтобы погрешность вычислений на равномерной сетке не превышала 1.5%, шаг по пространству h чаще всего выбирают равным $1/20$ длины волны λ падающего излучения [3]. Однако при наличии пространственных неоднородностей из-за недостаточно подробного шага становятся заметными нефизические осцилляции решения [4], [5]. Это связано с немонотонностью разностной схемы. С целью уменьшения накопления ошибок рекомендуется производить расчеты на более мелких сетках, выбирая h с учетом как геометрических, так и материальных параметров рассчитываемой структуры.

Для создания оптоэлектронных приборов (лазеры, светодиоды) и приёмников оптического излучения (фотодиоды, преобразователи ИК-излучения в видимое, фототранзисторы и т.д.) широко применяются гетероструктуры. Они представляют собой слоистые полупроводниковые структуры на подложке, причем толщины слоев могут быть сопоставимы или заметно меньше λ . Один из слоев обычно имеет больший показатель преломления, что создает дополнительные трудности при расчетах, так как вблизи границ раздела могут возникать контрастные структуры. Из-за сильной разномасштабности участков решения расчеты с равномерным шагом избыточно трудоемки. Поэтому необходимо использовать адаптивные сетки.

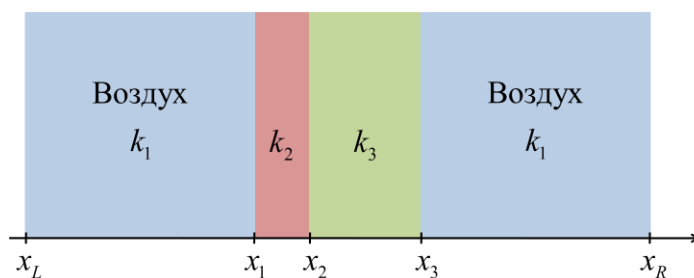


Рис. 1. Одинарная гетероструктура.

Универсальных алгоритмов построения производящих функций для адаптивных сеток не существует, их нужно строить исходя из условий конкретной задачи. Среди множества допустимых сеток следует выделить квазиравномерные сетки [6], расчеты на которых можно проводить с многократным сгущением. Они, также как и равномерные сетки [7], позволяют находить апостериорную асимптотически точную оценку погрешности вычислений. Более того, применяя формулы Ричардсона [8] рекуррентным образом [6], можно в несколько раз повысить порядок точности [9].

Рассмотрим слоистую диэлектрическую среду «воздух-гетероструктура-воздух», состоящую в общей сложности из $s + 2$ слоев. Совсем недавно производящая функция из [10],[11] хорошо передающая все детали решения (регулярные участки, пограничные слои, а также переходные области между ними), была обобщена на случай границы

раздела «воздух-диэлектрик»[12]. Используя ее, можно построить следующую производящую функцию

$$x(\xi) = \begin{cases} A_1 \operatorname{th} [C_1 \xi (1 + \xi^2/3)] + x_L, \\ A_i \operatorname{th} [C_i (\xi - \xi_i) (1 + (\xi - \xi_i)^2/3)] + (x_i + x_{i-1})/2, \\ A_{s+2} \operatorname{th} [C_{s+2} (\xi - \xi_{s+2}) (1 + (\xi - \xi_{s+2})^2/3)] + x_R, \end{cases} \quad (1)$$

где $x \in [x_L; x_R]$, $\xi \in [0; 2s+2]$, номер внутренних слоев i пробегает значения от 2 до $s+1$. Все обозначения соответствуют рис. 1. Управляющие параметры A и C для левой и правой воздушных прослоек определяются из нижеприведенных систем уравнений.

$$A_1 \operatorname{th} [4C_1/3] + x_L = x_1; \quad \frac{2A_1 C_1}{\operatorname{ch}^2 [4C_1/3]} = \frac{1/\sqrt{\varepsilon_1}}{1/\sqrt{\varepsilon_1} + k_1^2}. \quad (2)$$

$$A_{s+2} \operatorname{th} [4C_{s+2}/3] + x_R = x_{s+1}; \quad \frac{2A_{s+2} C_{s+2}}{\operatorname{ch}^2 [4C_{s+2}/3]} = \frac{1/\sqrt{\varepsilon_1}}{1/\sqrt{\varepsilon_1} + k_1^2}.$$

Аналогично для самой структуры

$$A_i \operatorname{th} [4C_i/3] + \frac{x_i + x_{i-1}}{2} = x_i; \quad \frac{2A_i C_i}{\operatorname{ch}^2 [4C_i/3]} = \frac{1/\sqrt{\varepsilon_i}}{1/\sqrt{\varepsilon_i} + k_i^2}. \quad (3)$$

Здесь ε – диэлектрическая проницаемость, k – волновое число.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 15-01-03524 и № 16-31-00418).

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Taflove, S.C. Hagness “Computational electrodynamics: the finite-difference time-domain method”. 3rd ed. Boston, Norwood: Artech House, 2005.
2. K.S. Yee // IEEE Trans. Antennas and Propagation. 1966. V. 14. P. 302.
3. A. Taflove, K.R. Umashankar // Proceedings of the IEEE. 1989. V. 77. P. 682.
4. T.Hirono et al. // IEEE Microwave Guided Wave Lett. 2000. V. 10.P. 359.
5. K.P. Hwang, A.C. Cangellaris//IEEE Microwave Guided Wave Lett. 2001. V. 11. P. 158.
6. Н.Н. Калиткин и др. “Вычисления на квазиравномерных сетках”. М.: Физматлит, 2005.
7. Ж.О. Домбровская, А.Н. Боголюбов // Известия Российской академии наук. Серия физическая. 2017. Т. 81.С. 117.
8. L.F. Richardson, J.A. Gaunt // Philos. Trans. R. Soc. A. 1927. V.226. P. 299.
9. Zh.O. Dombrovskaya, A. N. Bogolyubov // Proceedings of PIERS. IEEEExploreDigitalLibrary, 2017.
10. А.А. Белов, Н.Н. Калиткин // Математическое моделирование. 2015. Т. 27. С. 47.
11. А.А. Белов, Н.Н. Калиткин //Известия Российской академии наук. Серия физическая. 2015. Т. 79. С. 1655.
12. Ж.О. Домбровская // Моделирование и анализ информационных систем. 2016. Т. 23. С.539.

Моделирование процессов распространения излучения в приеме-передающих трактах лазерных систем

А.М. Зотов¹, А.В. Аверченко¹, П.В. Короленко^{1,2}, Н.Н. Павлов¹

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

² Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук, Москва

azotov@gmail.com

При совершенствовании систем связи, различных типов адаптивных и метрологических устройств часто возникает необходимость в получении корректных данных об амплитудно-фазовом профиле используемых электромагнитных волн. Особый интерес вызывают фазовые флуктуации излучения, обусловленные пространственными и временными топологическими изменениями структуры волнового фронта. Топологические возмущения волнового фронта, как правило, имеют характер винтовых дислокаций [1]. Несмотря на то, что вопросы формирования винтовых дислокаций нашли широкое освещение в литературе, некоторые из них оказались недостаточно изученными. К ним следует отнести группу вопросов, касающихся образования дислокаций при дифракционном распространении световых пучков. Так, в дополнительном изучении нуждаются физические факторы, влияющие на процесс формирования дислокационных образований применительно к пучкам с ограниченной апертурой. Целью данной работы явился анализ условий появления топологических возмущений на волновом фронте, применительно к узконаправленным лазерным пучкам с изначально бездислокационной структурой волнового фронта.

Рассмотрение указанной проблемы проводилось в несколько этапов. На первом этапе с целью определения наиболее важных причин, приводящих к появлению аномалий в распределении фазы в поперечном сечении лазерного пучка, было теоретически рассмотрено его распространение, при условии, что его профиль описывается супергауссовой функцией. Рис. 1 – 3 характеризуют рассчитанные распределения поля пучка в области его распространения. Считалось, что на изначальном волновом фронте на оси пучка имеет место «провал», распределение фазы в области которого задается формулой:

$$F(x) = A \cdot (8x^2 - x^4), \quad (1)$$

где A – нормировочный коэффициент, задающий исходную величину стрелы прогиба фронта; x – значение поперечной координаты.

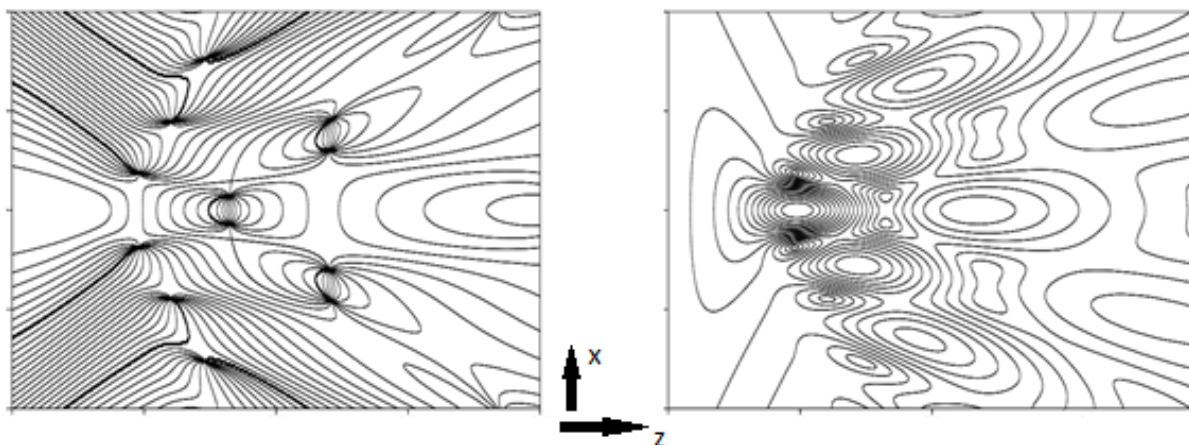


Рис. 1. Структура поля лазерного пучка. Распределение амплитуды (справа), система эквифазных линий (слева). x, z – соответственно поперечная и продольная координаты.

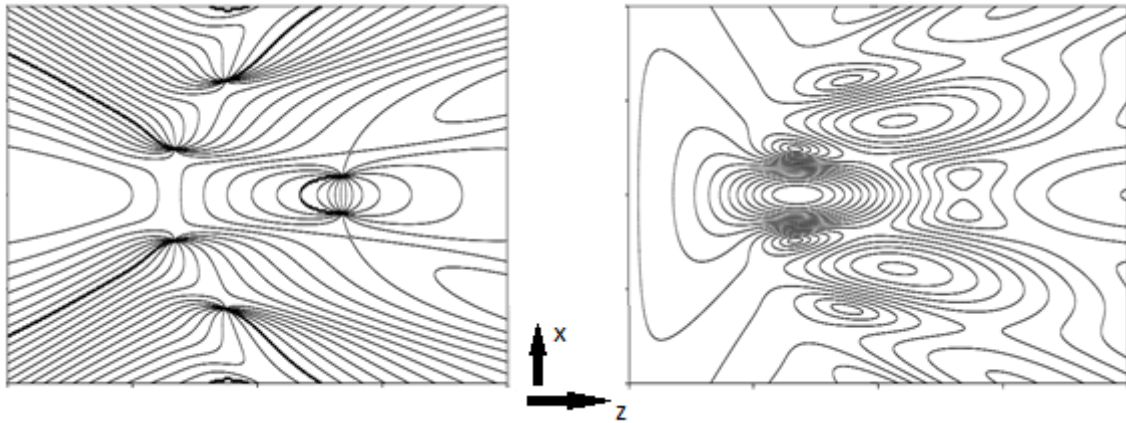


Рис. 2. Структура поля лазерного пучка. Распределение амплитуды (справа), система эквифазных линий (слева). Величина стрелы прогиба равна 0.75 от исходной.

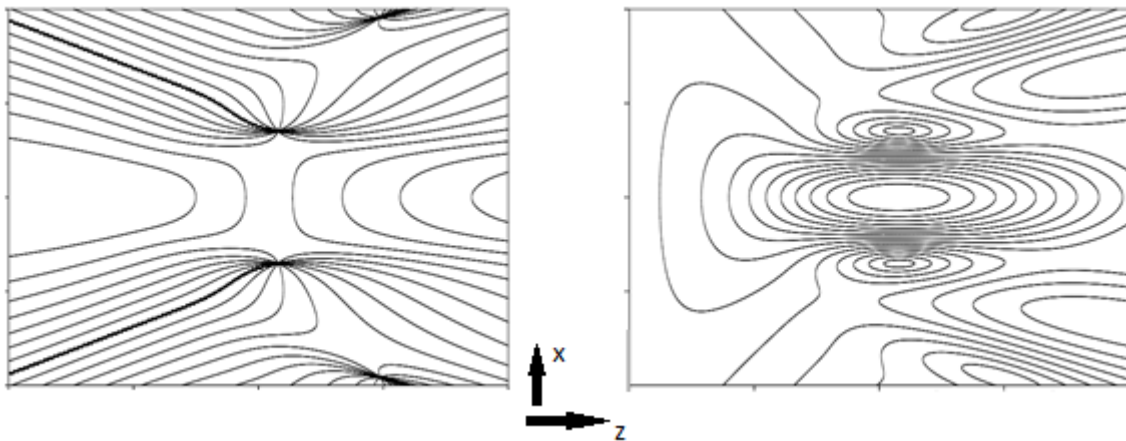


Рис. 3. Структура поля лазерного пучка. Распределение амплитуды (справа), система эквифазных линий (слева). Величина стрелы прогиба равна 0.5 от исходной.

Численное моделирование, осуществленное методом разложения заданного лазерного излучения по плоским волнам, показало, что при распространении рассматриваемого пучка положение и количество фазовых дислокаций зависит от значения стрелы прогиба волновой поверхности. При уменьшении стрелы прогиба количество дислокаций снижается, и заметным образом меняется характер их распределения. Начиная с определенного значения величины стрелы прогиба, винтовые дислокации в поле не наблюдаются.

На втором этапе моделировалось распространение пространственно-ограниченного лазерного пучка при наличии стохастических возмущений, придающих волновому фронту более сложный характер. Было установлено, что необходимым условием формирования винтовых дислокаций, является превышение среднеквадратичного отклонения фазы от фазы плоской волны на величину, превосходящую $\sigma_\varphi = \pi/4$.

На третьем этапе были выполнены эксперименты, направленные на проверку результатов теоретического рассмотрения. Методика измерений была аналогична описанной в работе [2]. Исследовалось распространение лазерного пучка при прохождении через многопроходную оптическую кювету. Изменяя температурный режим внутри кюветы и скорость прокачки турбулентной среды, можно было менять уровень возмущений волнового фронта на выходе кюветы. В соответствии с

результатами теоретического анализа было обнаружено, что в тех случаях, когда стандартное отклонение флуктуаций фазы на выходе кюветы превышало величину $\sigma_\varphi = \pi/4$ на больших расстояниях от кюветы, с высокой степенью вероятности, можно было обнаружить образование винтовых дислокаций фазы. Их наличие и положение идентифицировалось путем фиксации на сдвиговых интерферограммах точек в которых происходило ветвление интерференционных полос. На Рис. 4 в качестве примеров приведены сдвиговые интерферограммы, относящиеся к изначальной структуре волнового фронта, и к структуре волнового фронта, образованного на расстоянии нескольких десятков метров от начальной плоскости.

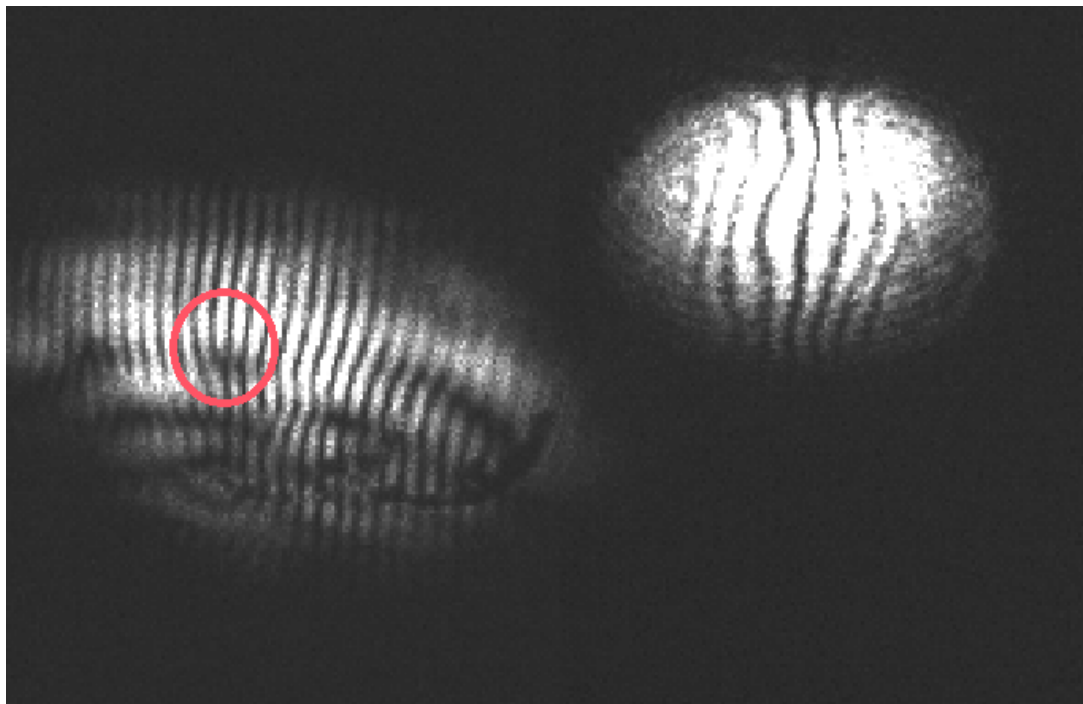


Рис. 4. Сдвиговые интерферограммы: изначальной структуры волнового фронта (справа), на расстоянии 25 метров от начальной плоскости (слева). Красный круг указывает на винтовую дислокацию.

Таким образом, установленные в данной работе физические условия и факторы, влияющие на появление в лазерных пучках дислокационных образований, следует учитывать при оптимизации геометрии оптических трактов экспериментальных установок и информационных систем, с целью уменьшения влияния фазовых аномалий на работу различного рода оптических элементов и регистрирующих устройств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б.Я. Зельдович и др. «Обращение волнового фронта» М.: Наука, 1985.
2. E.G. Kim et al. // *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Fizicheskaya*. 2014. V. 78. No. 12. P. 1546.
3. Л.М. Бреховских и др. «Волны в слоистых средах» М.: изд-во АН СССР, 1957.
4. С. Солимено и др. «Дифракция и волноводное распространение оптического излучения» М.: изд-во Мир, 1989.

Математическое моделирование конической безэховой камеры

М.К. Кеппер¹, Н.Е. Шапкина^{1,2}

¹Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова, физический факультет

²Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН

kepper.maria@gmail.com

В настоящее время проблема исследования рассеивающих свойств объектов представляет собой интенсивно развивающуюся область прикладной электродинамики.

В последние десятилетия широкое распространение получили компактные полигоны, как мощное средство для экспериментальных исследований рассеивающих свойств различных объектов, а также параметров антенн.

Предметом исследования является построение трехмерной математической модели безэховой камеры в форме конического и секториального рупора. Рассматривается две задачи: в первом случае внутренняя поверхность рупора является идеально проводящей, во втором - покрыта диэлектриком.

Пусть рассматриваемый рупор имеет высоту h и угол раскрыва γ . Вводится сферическая система координат с центром в вершине рупора, и рассматривается электромагнитное поле, сгенерированное источником излучения, в области: $0 < \vartheta < \gamma, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 < r < a$. В качестве источника излучения используется диполь, расположенный в некоторой точке $(R_\vartheta, \vartheta, \varphi)$ и направленный вдоль орта φ .

Представляет интерес электромагнитное поле в «раскрыве» рупора.

В случае идеально проводящей поверхности на поверхности конуса компоненты поля будут представлены следующим образом [1]:

$$\text{Для } U: E_r = U_{rr} + k^2 U, E_\theta = \frac{1}{r} U_{r\theta}, E_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} U_{r\varphi}, H_r = 0, H_\theta = -\frac{ik}{r \sin \theta} U_\varphi,$$

$$H_\varphi = \frac{ik}{r} U_\theta$$

$$\text{Для } V: E_r = 0, E_\theta = \frac{ik}{r \sin \theta} V_\varphi, E_\varphi = -\frac{ik}{r} V_\theta, H_r = V_{rr} + k^2 V, H_\theta = \frac{1}{r} V_{r\theta},$$

$$H_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} V_{r\varphi} \quad k = \omega/c,$$

где функции U и V – электрическая и магнитная функции Герца соответственно. Они удовлетворяют уравнению:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{(\sin \theta)^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right) + k^2 U = 0$$

Данное уравнение не является волновым. Для функций $u = \frac{U}{r}, v = \frac{V}{r}$ уравнения приобретают вид:

$$\Delta u + k^2 u = 0; \Delta v + k^2 v = 0, \text{ где } u = 0, \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \text{ на границе } \theta = \gamma.$$

Функции u и v позволяют свести решение уравнений поля к решению волновых уравнений. Представим функции u и v (потенциалы Дебая) в виде разложения по собственным функциям конуса ψ_{mn} и ξ_{mn} [1]:

$$u = \frac{1}{k} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{mn} \psi_{mn}^{(1)}, v = \frac{1}{k \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} b_{mn} \psi_{mn}^{(2)}$$

При этом пространство, в котором расположен конус, предполагается однородным и изотропным.

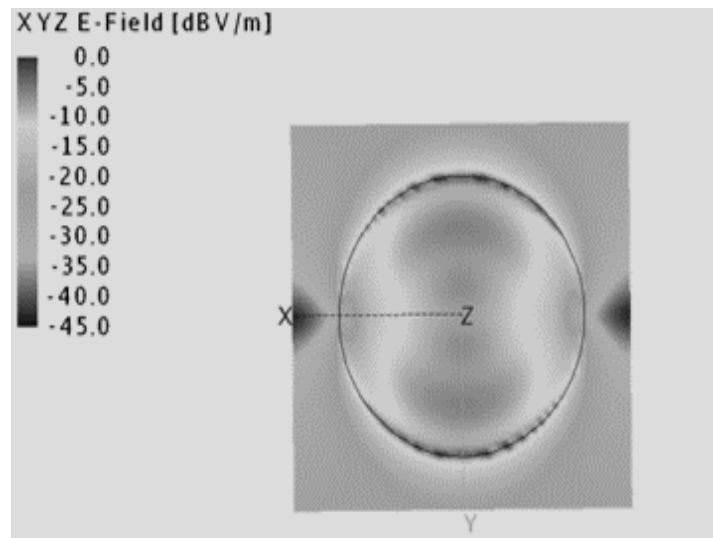
Результаты расчетов представлены в декартовой системе координат, соответствующей исходной сферической системе.

Был рассмотрен также случай импедансного покрытия конуса, в котором условия на границе принимают следующий вид:

При $\varphi = y$ выполняется $[n'E] = -z[n'H]$,

где $n' = \vec{n}, z = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}}$, ε – диэлектрическая проницаемость, μ – магнитная.

При расчетах считалось, что $\varepsilon = 6 - i6$, $\mu = 6 - i6$, толщина материала на стенках рупора = 0.225 м.



Электрическое поле «в разрезе» при $z=h$

Компьютерное моделирование проводится с помощью программы FEKO и программы Matematika. Полученные результаты хорошо согласуются с экспериментом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.А. Вайнштейн «Электромагнитные волны» Москва «Радио и связь», 1988.
2. L.H. Hemming // IEEE Press and Wiley Interscience.: New-York, 2002.
3. М.К. Кеппер «Электромагнитное моделирование конической безэховой камеры», Конференция «Ломоносов-2017».

Численное моделирование тепловых шумов в микрорезонаторах с модами шепчущей галереи

Н.М. Кондратьев¹, М.Л. Городецкий²

¹Российский квантовый центр (ООО МЦКТ)

²МГУ им. М.В. Ломоносова

email@mymail.ru

Микрорезонаторы с модами шепчущей галереи (МШГ) являются перспективными элементами для будущих фотонных устройств, так как они сочетают сверхвысокую добротность коэффициент с небольшим размером и объёмом моды. Большинство приложений требуют высокой стабильности мод и надежной количественной оценки шумов различного происхождения. Фундаментальные термические и квантовые флуктуации играют решающую роль, если избежать технических шумов. Первым тепловым шумом, исследованным в микрорезонаторах, был терморелаксационный шум [1]. Экспериментальные результаты для микросфер из плавленого кварца были найдены в хорошем согласии с теоретическим предсказанием. Броуновский шум микротороида WGM был впоследствии измерен [2] и сравнен с феноменологической моделью шума. Теоретический обзор возможных шумов в микродисках WGM можно найти в [3].

В этой статье мы демонстрируем метод численного моделирования тепловых шумов в произвольной осесимметричной структуре WGM. Мы показываем, что реальная геометрия резонатора мало влияет на спектр терморелаксационных шумов и что упрощенная формула бесконечного пространства [1] является довольно общей.

Для нахождения шумов мы используем флуктуационно-диссипационную теорему в формулировке, аналогичной [4]. Эта формулировка легко преобразуется в следующий алгоритм.

1. Выбрать обобщённую координату x , описывающую систему.
2. Представить наблюдаемую в виде $y = \int x(\vec{r})q(\vec{r})d^3r$.
3. Подействовать на систему слабой обобщённой силой $f = F_0 \cos(\omega t)q(\vec{r})$, энергетически сопряжённой к x (т.е. работа этой силы равна $W_f = \int f dx$).
4. Рассчитать отклик системы на данное воздействие и рассеянную энергию W_{diss}
5. Рассчитать спектральную плотность

$$S_y(\omega) = \hbar \frac{2W_{diss}}{\pi F_0^2} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \quad (1)$$

В случае резонатора наблюдаемой является его собственная частота, а точнее её сдвиг. Она зависит от радиуса резонатора и его показателя преломления. В первом приближении $\omega = \frac{lc}{Rn}$, где c -- скорость света, R -- радиус, n -- показатель преломления, l -- орбитальное число. Можно показать, что

$$\frac{\delta\omega_k}{\omega_k} = -\sum \frac{A_j}{A_k} \frac{\int \vec{e}_k^* \delta\hat{\epsilon}_j \vec{e}_j d^3r}{2}, \quad (2)$$

где A_j -- амплитуды мод резонатора, \vec{e}_j -- их нормированные формы, $\delta\hat{\epsilon}$ -- изменение тензора диэлектрической проницаемости. Как будет показано далее, сдвиг частоты

вследствие изменения радиуса так же можно выразить в такой форме. Отношение амплитуд колебаний в модах в стационарном случае можно представить в виде произведения отношения частотных резонансных частей и интегралов перекрытия мод с полем накачки:

$$\frac{A_j}{A_k} = \frac{\omega - \omega_k + i\delta_k}{\omega - \omega_j + i\delta_j} \frac{\int \vec{e}_j^* \vec{f} d^3r}{\int \vec{e}_k^* \vec{f} d^3r}, \quad (3)$$

Первая (частотная) часть обычно может быть близка к 1 только для мод с одинаковыми орбитальными числами l . Вторая часть – наоборот близка к 1 только для мод одной конфигурации с одинаковыми радиальными и поперечными модовыми числами q и p .

Терморелрактивный шум в резонаторе – сдвиг резонансной частоты при флуктуациях температуры из-за терморелрактивного эффекта. В статье [1] была получена формула

$$S_{\delta T}(\omega) = \frac{k_B T^2}{\sqrt{\pi^3 \kappa \rho C \omega}} \sqrt{\frac{1}{2p-1}} \frac{1}{R \sqrt{d_z^2 - d_r^2}} \frac{1}{(1 + (\omega\tau)^{3/2})^2} \quad (4)$$

$$\tau = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1/3} \frac{\rho C}{\kappa} d_r^2, \quad (5)$$

где k_B -- постоянная Больцмана, T -- температура, κ -- теплопроводность, ρ -- плотность, C – теплоёмкость, d_r и d_z -- полуширины фундаментальной моды (по энергии). Эти формула справедлива только при $d_z > d_r$, однако можно показать, что при $d_z < d_r$ необходимо поменять d_r и d_z местами в (4) и (5). При $d_z = d_r$ получается более сложное выражение.

Для численного моделирования выберем обобщённой координатой температуру. Несмотря на то, что в сферических резонаторах моды вырождены по азимутальному числу, мы полагаем, что отношение (3) близко к 1 только для моды накачки. Так как при решении уравнения теплопроводности не возникает никаких резонансов, можно смело ограничить рассмотрение только одной модой. Таким образом, используя (2) получим уравнение для моделирования

$$i\omega\rho C\tilde{T} + \kappa\Delta\tilde{T} = i\omega T S_0 \varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon_j} \beta_j |\vec{e}_j(\vec{r})|^2 \quad (6)$$

Рассеянную энергию найдём

$$W_{diss} = \int \frac{\pi\kappa}{\omega T} |\text{grad } \tilde{T}|^2 d^3r \quad (7)$$

Где \tilde{T} -- комплексная амплитуда флуктуации температуры $\delta T = \Re[\tilde{T}e^{i\omega t}]$, β_j -- терморелрактивные коэффициенты и $S_0 = 1$ Дж – размерная нормировка. На рисунке 1 представлено сравнение результатов моделирования с экспериментом [1] и теоретическими выражениями (4)-(5) и [2]. Моделирование показало, что за счёт связи с окружающей средой посредством теплопередачи спектральная плотность шума соответствует выражению для бесконечного открытого пространства. Учёт же границ при помощи решения задачи о теплоизолированном резонаторе приводит к существенной ошибке. Это хорошо видно на примере [2], где был проведён расчёт для изолированного CaF₂ диска.

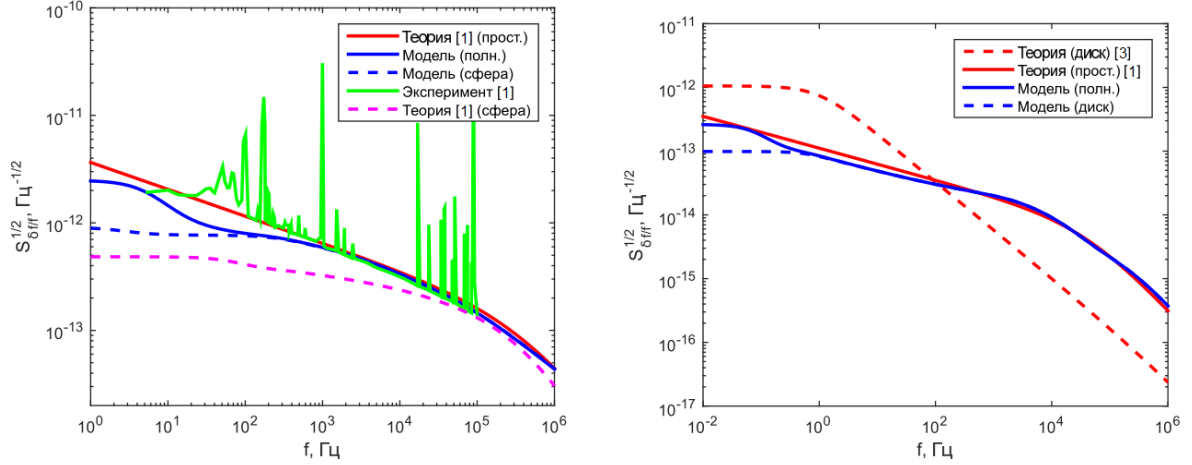


Рис. 1. Слева: сравнение теории (4)-(5), моделирования (с окружением и без), эксперимента [1] и формулы A15 из приложения [1] для терморепрфрактивного шума SiO_2 сферы. Справа: сравнение теории (4)-(5), теории [3] и моделирования (с окружением и без) для терморепрфрактивного шума CaF_2 диска.

Броуновский шум – изменение наблюдаемой вследствие теплового движения частиц вещества резонатора и как следствие, его границы. Легко получить феноменологическую формулу для резонансной спектральной плотности [2]:

$$S_{\delta R/R} = \sum_j \frac{2k_B T}{m_j R^2} \frac{\Gamma_j}{(\omega^2 - \Omega_j^2)^2 + \omega^2 \Gamma_j^2}, \quad (8)$$

где Ω_j -- частоты механических мод, Γ_j -- их потери (полная ширина), m_j -- их эффективные массы. В статье [3] было дано выражение для низшей моды $\Omega_0 = \frac{\pi v_s}{R}$,

$\Gamma_0 \geq \frac{2\Omega_0^2 \kappa T \alpha^2 \rho}{9C}$ и формула, аналогичная (8) при $m_0 = \frac{9KV_R}{R^2 \Omega_0^2}$. Здесь v_s -- скорость

звука в материале резонатора, κ -- теплопроводность, α -- тепловое расширение, K -- объёмный модуль упругости, V_R -- объём резонатора.

Для моделирования Броуновского шума удобно принять обобщённой координатой поле смещений упругого тела \vec{u} , тогда обобщённой силой будет являться просто сила, действующая на поверхность резонатора. При малых деформациях, можно рассматривать изменение радиуса резонатора как локальное изменение показателя преломления:

$$\varepsilon(\vec{r}) \rightarrow \varepsilon(\vec{r} - \vec{u}(\vec{r}')) \approx \varepsilon(\vec{r}) - \vec{u} \vec{\nabla} \varepsilon(\vec{r}), \quad (9)$$

Подробный анализ, с учётом поляризации [5], даёт

$$\frac{\delta \omega_k}{\omega_k} = - \sum \frac{A_j}{A_k} \frac{\int [\vec{e}_{k\parallel}^* \Delta \hat{\varepsilon}_{re} \vec{e}_{j\parallel} - \vec{d}_{k\perp}^* \Delta \hat{\varepsilon}_{re}^{-1} \vec{d}_{j\perp}] \vec{n}_S d^2 r}{2}, \quad (10)$$

где $\Delta \hat{\varepsilon}_{re} = \hat{\varepsilon}_r - \hat{\varepsilon}_e$ и $\Delta \hat{\varepsilon}_{re}^{-1} = \hat{\varepsilon}_r^{-1} - \hat{\varepsilon}_e^{-1}$ -- разности диэлектрических проницаемостей резонатора и окружающей среды и их обратных величин, \vec{n}_S -- нормаль к поверхности резонатора, $\vec{e}_{j\parallel}$ и $\vec{d}_{j\perp} = (\hat{\varepsilon} \vec{e}_j)_{\perp}$ -- составляющие нормированных векторов электрического поля и индукции, параллельные и перпендикулярные поверхности

резонатора соответственно. В данном случае уже не получится пренебречь перекрёстными членами, как это делалось для терморелактивного шума, так как уравнение упругости выдаст резонансы. Так как интегрирование в (10) производится по поверхности резонатора, то и пробная сила в уравнениях движения должна быть приложена к поверхности:

$$\hat{\sigma}_{\vec{n}_S}|_S = -F_0 \sum \frac{A_j}{2A_k} \left[\vec{e}_{k\parallel}^* \Delta \hat{\epsilon}_{re} \vec{e}_{j\parallel} - \vec{d}_{k\perp}^* \Delta \hat{\epsilon}_{re}^{-1} \vec{d}_{j\perp} \right] \vec{n}_S, \quad (11)$$

где $\hat{\sigma}$ -- тензор механического напряжения, и $F_0 = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$ -- размерная нормировка. Отметим, что для ТЕ мод (электрическое поле вдоль оси резонатора) второй член в скобках можно считать равным нулю, а для ТМ мод (электрическое поле вдоль радиуса резонатора) первый член равен нулю. Рассеянную энергию найдём через угол потерь

$$W_{diss} = \varphi_{loss} \int \xi_{ik} \sigma_{ik} d^3 r, \quad (12)$$

где ξ_{ik} -- тензор деформации.

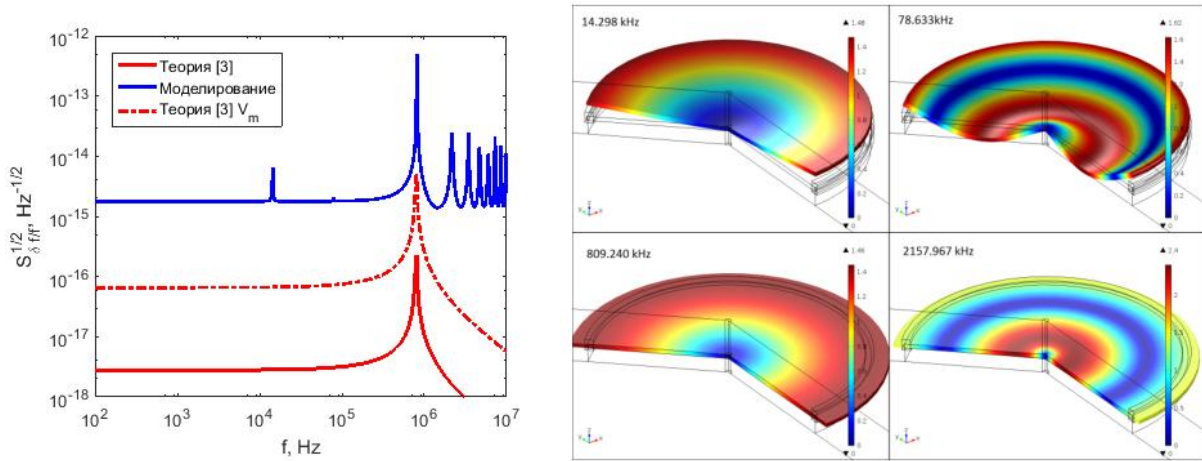


Рис. 2. Слева: сравнение теории (8)[3] (красная), и моделирования броуновского шума CaF2 диска. На рисунке так же показан шум (8) с подстановкой объёма МШГ вместо объёма резонатора. Справа: первые четыре механические моды микродиска, которые видно в броуновском шуме. Первые две моды являются вертикальными, вторые две -- радиальными. Радиальная мода с частотой Ω_0 , используемая в след за [3] является шестой по частоте механической модой.

На рисунке 2 представлено сравнение теории с моделированием для резонатора из [2]. Видно, что существует множество резонансов, как справа так и слева от него. Первые пять мод являются вертикальными, две низшие из них изображены на рис. 2 справа вверху и присутствуют в броуновском шуме. Ещё три вертикальные в нём отсутствуют. Радиальная мода с частотой Ω_0 , является шестой по частоте механической модой. Следующая радиальная мода -- десятой (рис. 2 справа внизу). Количественного соответствия так же не наблюдается. Можно добиться лучшего соответствия, если в эффективной массе заменить объём резонатора на объём оптической моды $V_m \approx 2\pi R d_z d_r$, предположив, что для шума имеет значение объём, близкий к объёму МШГ, а не всего резонатора, как предполагалось в [3].

Так же проводилось моделирование тороидального резонатора [2] для сравнения с полученными там же экспериментальными данными. Результаты представлены на рисунке 3.

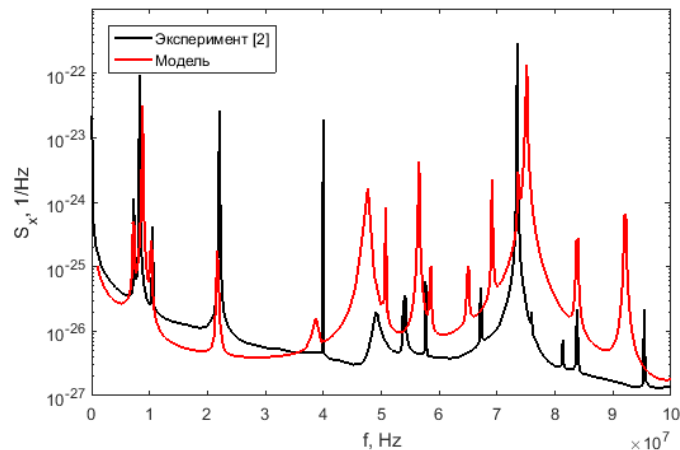


Рис. 3. Сравнение моделирования и эксперимента [2] спектральной плотности микротороида.

Таким образом, мы рассмотрели применение флуктуационно-диссипационной теоремы для расчета терморелактивного шума в микрорезонаторах с модами шепчущей галереи с помощью метода конечных элементов. Главным преимуществом этого метода является то, что он позволяет моделировать произвольную геометрию и параметры материала. Его также можно легко обобщить на другие типы шума.

Результаты моделирования были проверены с использованием экспериментальных данных и аналитической теории. Было обнаружено, что терморелактивный шум практически не зависит от геометрии резонатора при высоких частотах, и равен приближенному аналитическому выражению. Однако на низких частотах связь с окружающей средой через границы и опору может немного изменить шум. Выражение для терморелактивного шума, полученного для дискового резонатора в [3], было найдено несовместимым с модельным. Показано, что рассчитанный данным методом Броуновский шума так же близок к экспериментальным результатам, повторяя все характерные особенности спектральной плотности.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 17-02-00522).

ЛИТЕРАТУРА

1. M. L. Gorodetsky, I.S. Grudinin // J.Opt. Soc. Am. B. 2004. Vol. 21, No. 4. P. 697.
2. A. Schliesser, et al. // New Journal of Physics 2008 Vol. 10 P. 095015
3. A.V. Matsko, et al. // J. Opt. Soc. Am. B 2007 Vol. 24 P. 1324–1335
4. Y. Levin // Physics Letters A 2008 Vol. 372 P. 1941 – 1944
5. Skorobogatiy.

Учет эффекта нелокальности при рассеянии света на плазмонных наночастицах в гибридной схеме метода дискретных источников

И.В. Лопушенко

МГУ им. М.В. Ломоносова, Физический факультет, кафедра математики
lopushenko.ivan@physics.msu.ru

Исследование взаимодействия света с наноструктурами из благородных металлов в настоящее время является актуальным в связи с уникальными оптическими свойствами данных структур, позволяющими получать интенсивные локализованные электромагнитные поля на масштабах, меньших дифракционного предела Аббе [1]. Большое влияние на рассеивающие свойства данных структур оказывают их геометрические размеры и форма, варьирование которых позволяет гибко управлять характеристиками рассеянного света и получать электромагнитные поля с определенными свойствами. Данные эффекты широко используются в таких прикладных областях, как ближнепольная оптическая микроскопия, проектирование и конструирование различных детекторов, увеличение сечения эффекта комбинационного рассеяния света, литография наночастиц, и других.

Для того, чтобы проектировать сложные фотонные наносистемы с требуемыми характеристиками, необходимо проведение строгого математического моделирования. Если размер рассеивателя меньше 10нм, классическая электродинамическая теория становится не применимой для описания возникающих физических эффектов [2]. В этом случае необходим учет так называемого эффекта нелокальности (ЭНЛ), который затрудняет численное решение задачи рассеяния [3]. Физическая природа данного эффекта заключается в следующем: по мере того, как размер рассеивателя из благородного металла становится меньше длины свободного пробега электронов в материале, свободные заряды накапливаются у поверхности рассеивателя, после чего внутри него формируются пространственный заряд и ток. В этом случае электрическое поле \mathbf{E} внутри рассеивателя перестает быть чисто поперечным ($\text{div}\mathbf{E}=0$), и для адекватного описания происходящих процессов требуется привлечение продольной составляющей поля ($\text{rot}\mathbf{E}=0$). В основу настоящей работы положены теоретические подходы к описанию данных процессов, известные как гидродинамическая теория (ГДТ) и обобщенный нелокальный оптический отклик (ОНО) [4].

Таким образом, полное поле в точке M внутри частицы представимо в виде суммы продольной и поперечной компонент: $\mathbf{E}_i(M) = \mathbf{E}_T(M) + \mathbf{E}_L(M)$. Можно показать, что продольное $\mathbf{E}_L(M)$ и поперечное $\mathbf{E}_T(M)$ поля являются решениями уравнений Гельмгольца:

$$(\nabla^2 + k_T^2) \text{rot } \mathbf{E}_T(\mathbf{r}, \omega) = 0,$$

$$(\nabla^2 + k_L^2) \text{div } \mathbf{E}_L(\mathbf{r}, \omega) = 0,$$

где поперечному полю соответствует волновое число $k_T^2 = k^2 \varepsilon_i \mu_i$, а продольному полю соответствует волновое число k_L , определяемое с помощью ГДТ и ОНО. Здесь и далее ε_i , μ_i – материальные характеристики рассеивателя, $k=2\pi/\lambda=\omega/c$, λ – длина волны внешнего возбуждения, c – скорость света в вакууме, \mathbf{r} – радиус-вектор точки наблюдения.

В настоящей работе рассматривается трехмерная задача дифракции плоской линейно поляризованной электромагнитной волны $\{\mathbf{E}^{inc}, \mathbf{H}^{inc}\}$ на однородной

металлической наночастице D_i в однородной изотропной среде D_0 . Тогда математическая постановка задачи в рамках ГДТ и ОНО принимает вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{H}_i(M) &= jk \left(\varepsilon_T \mathbf{E}_i(M) + \xi^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E}_L(M) \right); & \operatorname{rot}\mathbf{H}_0(M) &= jk \varepsilon_0 \mathbf{E}_0(M); \\ \operatorname{rot}\mathbf{E}_i(M) &= -jk \mu_i \mathbf{H}_i(M); & \operatorname{rot}\mathbf{E}_0(M) &= -jk \mu_0 \mathbf{H}_0(M); \\ \mathbf{E}_i(M) &= \mathbf{E}_T(M) + \mathbf{E}_L(M); & \mathbf{E}_0(M) &= \mathbf{E}^S(M) + \mathbf{E}^{inc}(M); \\ M \in D_i; & & M \in D_0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_P \times [\mathbf{E}_i(P) - \mathbf{E}^S(P)] &= \mathbf{n}_P \times \mathbf{E}^{inc}(P); \\ \mathbf{n}_P \times [\mathbf{H}_i(P) - \mathbf{H}^S(P)] &= \mathbf{n}_P \times \mathbf{H}^{inc}(P); \\ \mathbf{n}_P \cdot \varepsilon_L \mathbf{E}_i(P) &= \mathbf{n}_P \cdot \varepsilon_0 (\mathbf{E}^{inc}(P) + \mathbf{E}^S(P)); \\ P \in \partial D_i; \end{aligned} \tag{1}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \cdot \left(\sqrt{\varepsilon_0} \mathbf{E}^S(M) \times \frac{\mathbf{r}}{r} - \sqrt{\mu_0} \mathbf{H}^S(M) \right) = 0, \quad r = |M| \rightarrow \infty, \quad M \in D_0.$$

Здесь предполагается, что электромагнитное поле имеет гармоническую зависимость от времени вида $e^{j\omega t}$. Введены следующие обозначения: $\varepsilon_T = \varepsilon_i$ – экспериментально измеренная диэлектрическая проницаемость материала рассеивателя, $\{\mathbf{E}_{0,i}, \mathbf{H}_{0,i}\}$ – полное поле в каждой из областей $D_{0,i}$, \mathbf{n}_P – внешняя единичная нормаль к поверхности ∂D_i , j – мнимая единица, ε_0, μ_0 – материальные характеристики среды D_0 , $k_0^2 = k^2 \varepsilon_0 \mu_0$ – волновое число в среде D_0 .

Кроме того, введены следующие величины, необходимые для корректного учета продольного поля внутри частицы: вклад в диэлектрическую проницаемость, связанный с наличием связанных электронов и ионов в металле $\varepsilon_L = \varepsilon_T - \omega_p^2 / (j\gamma\omega - \omega^2)$, и величина ξ , характеризующая масштаб ЭНЛ. В рамках ГДТ и ОНО значение ξ вычисляется по-разному: $\xi_H^2 = \varepsilon_L \beta^2 / (\omega^2 - j\gamma\omega)$ для ГДТ и $\xi_G^2 = \varepsilon_L (\beta^2 + D(\gamma + j\omega)) / (\omega^2 - j\gamma\omega)$ для ОНО [4]. Нами так же использованы обозначения для плазменной частоты металла ω_p , коэффициента затухания в среде γ , коэффициента β , связанного со скоростью Ферми v_F соотношением $\beta^2 = 3/5 v_F^2$ в рассматриваемом частотном диапазоне, а так же для коэффициента диффузии электронов D . Отметим, что продольная компонента поля локализована строго внутри частицы и не вносит вклад в магнитное поле \mathbf{H}_i , так как $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\Phi) = 0$. Кроме того, при $\beta=0$ и $D=0$ поле внутри частицы становится чисто поперечным, что соответствует локальному приближению.

Для решения поставленной задачи в настоящей работе предлагается модификация метода дискретных источников (МДИ) [5]. Его отличительными особенностями являются высокое быстродействие, достигаемое благодаря аналитическому представлению для ближнего и дальнего полей и отсутствию необходимости в проведении интегрирования по поверхности рассеивателя, а так же возможность получения апостериорной оценки точности решения. Учет ЭНЛ в рамках МДИ проводится с использованием подходов ГДТ и ОНО путем введения дополнительных дискретных источников (ДИ), соответствующих продольной компоненте поля.

Поскольку рассматривается дифракция света на частицах небольших размеров, мы будем строить решение для поля вне и внутри рассеивателя на основе гибридной схемы МДИ [5]. Обозначим $j_n(\cdot)$ - сферическая функция Бесселя порядка n . Тогда выражения для полей дискретных источников, используемых для моделирования полного поля внутри частицы, примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\alpha,T}^e(M, M_n) &= \frac{j}{k\varepsilon_T\mu_i} \text{rotrot}\mathbf{A}_{\alpha,n}^i, \\ \mathbf{E}_{\alpha,T}^h(M, M_n) &= \frac{1}{\varepsilon_T} \text{rot}\mathbf{A}_{\alpha,n}^i, \\ \mathbf{E}_L(M, M_n) &= \text{grad}\left(j_1(k_L R_{MM_n}) \sin\Theta \cos\phi\right), \\ \mathbf{H}_{\alpha,i}^{e,h}(M, M_n) &= \frac{j}{k\mu_i} \text{rot}\mathbf{E}_{\alpha,T}^{e,h}(M, M_n).\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь $\mathbf{A}_{1,n}^i = \{j_0(k_T R_{MM_n}), 0, 0\}$, $\mathbf{A}_{2,n}^i = \{0, j_0(k_T R_{MM_n}), 0\}$, $\mathbf{A}_{3,n}^i = \{0, 0, j_0(k_T R_{MM_n})\}$ - векторные потенциалы источников в декартовых координатах, $R_{MM_n}^2 = (x-x_n)^2 + (y-y_n)^2 + (z-z_n)^2$, а Θ и ϕ - сферические координаты точки M относительно точки M_n .

Выражения для ДИ, моделирующих рассеянное поле во внешней области $\{\mathbf{E}^S, \mathbf{H}^S\}$ строятся аналогично (2) на основе решений уравнения Гельмгольца в виде сферических функций Ханкеля второго рода $h_0^{(2)}(k_0 R_{MM_n})$, удовлетворяющих условиям излучения, а ДИ располагаются в точках $\{M_n\} \in D_i$, локализованных внутри рассеивателя. Подчеркнем, что для построения рассеянного поля продольные поля не привлекаются, поэтому для его описания достаточно величин $\mathbf{E}_{\alpha,0}^{e,h}$ и $\mathbf{H}_{\alpha,0}^{e,h}$, где индекс 0 означает вычисление поля в области D_0 . Таким образом, итоговые представления для внешнего и внутреннего полей принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_T^N(M) &= \sum_{n=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 \left(p_{\alpha,n}^T \mathbf{E}_{\alpha,T}^e(M, M_n) + q_{\alpha,n}^T \mathbf{E}_{\alpha,T}^h(M, M_n) \right), \\ \mathbf{E}_L^N(M) &= \sum_{n=1}^N p_n^L \mathbf{E}_L(M, M_n); \\ \mathbf{H}_i^N(M) &= \sum_{n=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 \left(p_{\alpha,n}^T \mathbf{H}_{\alpha,i}^e(M, M_n) + q_{\alpha,n}^T \mathbf{H}_{\alpha,i}^h(M, M_n) \right); \\ \mathbf{E}_N^S(M) &= \sum_{n=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 \left(p_{\alpha,n}^0 \mathbf{E}_{\alpha,0}^e(M, M_n) + q_{\alpha,n}^0 \mathbf{E}_{\alpha,0}^h(M, M_n) \right); \\ \mathbf{H}_N^S(M) &= \sum_{n=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 \left(p_{\alpha,n}^0 \mathbf{H}_{\alpha,0}^e(M, M_n) + q_{\alpha,n}^0 \mathbf{H}_{\alpha,0}^h(M, M_n) \right).\end{aligned}$$

Неизвестные амплитуды $\{p_{\alpha,n}^T, p_n^L, p_{\alpha,n}^0, q_{\alpha,n}^T, q_{\alpha,n}^0\}_{n=1}^N$ определяются с помощью метода коллокаций из граничных условий на поверхности рассеивателя, заданных в математической постановке задачи (1). Определив амплитуды ДИ, легко вычислить диаграмму направленности рассеянного поля \mathbf{F} , которая определяется как

$$\mathbf{E}_0(R)/|\mathbf{E}_0^0(R)| = \frac{\exp\{-jk_0R\}}{R} \mathbf{F}(\theta_0, \theta, \varphi) + O(1/R^2), \quad R \rightarrow \infty, \quad z > 0.$$

На ее основе вычисляются такие характеристики рассеяния, как дифференциальное сечение рассеяния (DSC) и полное сечение рассеяния σ :

$$DSC(\theta_0, \theta, \varphi) = |F_\theta(\theta_0, \theta, \varphi)|^2 + |F_\varphi(\theta_0, \theta, \varphi)|^2, \quad \sigma(\theta_0) = \int_{\Omega} DSC(\theta_0, \theta, \varphi) d\Omega.$$

Здесь Ω - единичная сфера, $\{R, \theta, \varphi\}$ - сферические координаты точки M , соответствующие выбранным ранее декартовым координатам.

Апробация предложенной схемы проведена для случая дифракции плоской волны на серебряных наночастицах сферической формы диаметром от 6 до 20 нм путем вычисления перечисленных характеристик рассеяния и их сравнения с аналитическим решением, учитывающим ЭНЛ и предложенном в работе [4]. Результаты тестирования показали хорошую точность предложенной схемы, а так же возможность расширения области её применимости для исследования оптических свойств наночастиц других форм, в том числе сплюснутых и вытянутых сфероидов.

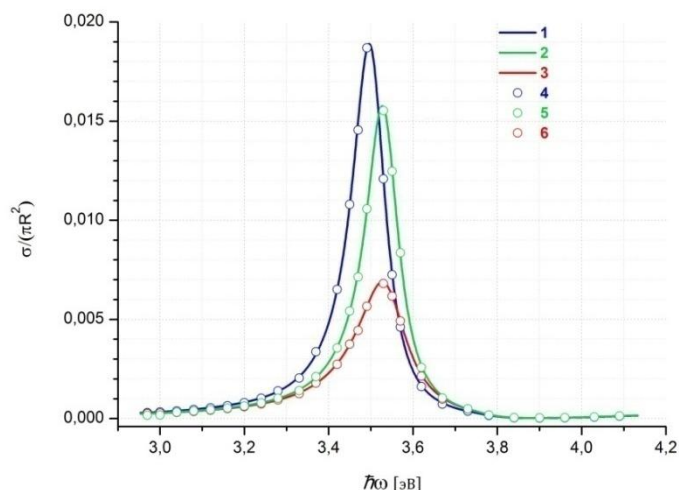


Рис. 1. Полное сечение рассеяния для серебряной сферы диаметром $2R=10$ нм в зависимости от частоты внешнего возбуждения ω . Апостериорная оценка точности вычислений по схеме МДИ не превышает 1%.

- 1 - Аналитический результат без учета ЭНЛ
- 2 - Аналитический результат с учетом ЭНЛ в рамках ГДТ
- 3 - Аналитический результат с учетом ЭНЛ в рамках ОНО
- 4 - Результат, полученный по вычислительной схеме МДИ без учета ЭНЛ
- 5 - Результат, полученный по вычислительной схеме МДИ с учетом ЭНЛ в рамках ГДТ
- 6 - Результат, полученный по вычислительной схеме МДИ с учетом ЭНЛ в рамках ОНО

ЛИТЕРАТУРА

1. B. Gallinet, J. Butet and O. J. F. Martin. // Laser Photonics Rev. 2015. V. 9. No 6. PP. 577–603.
2. F.J. Garcia de Abajo. // J. Phys. Chem. C. 2008. No 112. PP. 17983–17987.
3. Ю.А. Еремин, А.Г. Свешников. // Вестник МГУ. Серия 3: Физика, астрономия.. 2016. № 5. С.31–35.
4. S. Raza et al. // J. Phys.: Condens. Matter. 2015. Vol. 27. No 18. P. 183204.
5. Ю.А. Еремин, И.В. Лопушенко. // Вестник МГУ. Сер. 15: Выч. Матем. и Киберн. 2016. № 1. С. 3.

Сингулярности электромагнитного поля волновода в окрестности особых точек

А.Н. Боголюбов, И.Е. Могилевский
 МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет
bogan7@yandex.ru
mogilev@phys.msu.ru

В настоящее время весьма актуальна задача о расчете электромагнитного поля в волноведущих системах при наличии ребер на их границах и сложного заполнения. Известно, что наличие ребер на границе и разрывов диэлектрической проницаемости приводит к появлению особенностей у электромагнитного поля в окрестности особой точки границы или неоднородности заполнения [1,4]. Одним из способов преодоления этих проблем является выделение особенности решения в явном виде, то есть построение асимптотики электромагнитного поля в окрестности ребра в волноводе [4]. При этом существенно используются результаты по асимптотике решения эллиптических краевых задач, представленные в работе В.А. Кондратьева [3], а также С.А. Назарова и Б.А. Пламеневского [2]. Здесь и далее под словом «асимптотическое представление» имеется в виду запись решения в виде суммы сингулярной и гладкой частей.

Рассматривается радиоволновод, представляющий собой бесконечный цилиндр $Q = \{(x, y) \in \Omega, z \in (-\infty, +\infty)\}$ с идеально проводящими стенками и диэлектрическим заполнением, неоднородным в поперечном сечении. Предполагается, что электромагнитное поле волновода имеет гармоническую зависимость от времени вида $e^{-i\omega t}$. Магнитная проницаемость среды, заполняющей волновод, равна $\mu \equiv 1$. Диэлектрическая проницаемость ε — кусочно-непрерывная скалярная вещественная функция. Исследуется случай, когда граница волновода имеет входящее ребро с двугранным углом ω_0 . Через ребро проходит плоскость разрыва диэлектрической проницаемости, составляющая двугранный угол β с границей волновода.

При указанных условиях для компонент электромагнитного поля в работе [5] получена следующая математическая постановка задачи (для собственных векторов)

$$\begin{aligned} - \operatorname{grad} \operatorname{div} H_\lambda - k^2 \operatorname{rot} E_z &= -g^2 H_\lambda, \\ -ik \operatorname{rote} H_\lambda - \operatorname{div} \operatorname{grad} E_z &= -g^2 e E_z, \end{aligned} \quad (1)$$

где $k = \frac{\omega}{c}$ — волновой вектор, g — спектральный параметр; предполагается, что все функции имеют зависимость от z вида e^{igs} . Граничные условия и условия сопряжения имеют вид

$$\begin{aligned} (\mathbf{H} \mathbf{Ch})|_{\Gamma_W} = 0, E_z|_{\Gamma_W} = 0, \frac{\partial (\mathbf{H} \mathbf{Ch})}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_C} = 0, \frac{\partial E_z}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_C} = 0, (\mathbf{H} \mathbf{r} \mathbf{n})|_C = 0, \\ \frac{\partial \operatorname{div} H_\lambda}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_C} = 0, \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\operatorname{grad} E_z + ik (\mathbf{H} \mathbf{r} \mathbf{i}_z)) \mathbf{Ch}|_{\Gamma_C} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь использованы следующие обозначения: $H_\lambda = \{H_x, H_y\} = \{H_r, H_j\}$, C — линия разрыва диэлектрической проницаемости, \mathbf{n} — нормаль к границе области или линии разрыва,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} H_\lambda &= \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y}, \operatorname{rot} H_\lambda = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}, \\ \operatorname{grad} E_z &= \mathbf{i}_x \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial E_z}{\partial y}, \operatorname{rot} E_z = \mathbf{i}_x \frac{\partial E_z}{\partial y} - \mathbf{i}_y \frac{\partial E_z}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3)$$

В работе [5] рассмотрен вопрос о поиске слабых решений задачи (1)-(2). Показано, что данная задача порождает ограниченный оператор $T : (L_2(W))^3 \otimes W$ компактный в подпространстве V гильбертова пространства $W = H_0(\operatorname{div}) E W_2^1$, выделяемом дополнительным условием

$$\operatorname{rot} H_\lambda = -ikeE_z, \quad (4)$$

которое понимается в смысле обобщенных функций. Таким образом, спектр задачи (1)-(2), рассматриваемой в указанном пространстве, состоит из счетного множества возрастающих по модулю собственных значений.

Чтобы провести исследование поведения электромагнитного поля в окрестности ребра границы волновода, через которое проходит плоскость разрыва диэлектрической проницаемости, сначала данная задача рассматривается на всей плоскости вместо области W . В дальнейшем использование срезающей функции позволяет свести задачу в конечном поперечном сечении волновода к задаче на всей плоскости и использовать полученные результаты для асимптотического представления решения. Дополнительно предполагается, что диэлектрическая проницаемость является кусочно-постоянной (по крайней мере, в окрестности ребра). Для удобства описания вводится полярная система координат с центром на ребре волновода.

Уравнение для компоненты электрического поля E_z принимает вид:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} E_z = - \frac{2}{r^2} \frac{e_2 - e_1}{e_2 + e_1} \frac{\partial u}{\partial j} (r, b) d(j - b) + g^2 E_z - \frac{ik}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_j) + \frac{ik}{r} \frac{\partial H_r}{\partial j}. \quad (5)$$

Обозначим $a = \frac{e_2 - e_1}{e_2 + e_1}$. Для компонент H_r и H_j магнитного поля получается система

$$\begin{aligned} r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_r) + r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial j} (rH_j) &= -k^2 e \frac{\partial E_z}{\partial j} + g^2 (rH_r), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rH_r) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial j^2} (rH_j) &= -k^2 e r \frac{\partial E_z}{\partial r} + g^2 (rH_j). \end{aligned} \quad (6)$$

Тем же методом, что применен в работе [1] для диэлектрического ребра, удастся получить следующее представление электрического поля в окрестности металло-диэлектрического ребра:

$$E_z(r, j) = c \sum_{-d < n_k < 1} e^{-C_k r^{n_k}} \left\{ \cos \frac{\nu_k}{n_k} (b - w_0 + j) \frac{\partial}{\partial r} \cos \frac{\nu_k}{n_k} (b - j - w_0) \frac{\partial}{\partial j} + B(r, j) \right\}. \quad (7)$$

где ν_k — решения уравнения $a \sin \frac{\nu_k}{n_k} (2b - w_0) \frac{\partial}{\partial r} \sin(n_k w_0) = 0$.

(кроме $n_k = 0$), $c(r) = \begin{cases} \frac{1}{r}, & r \leq d/2, \\ 0, & r > d, \end{cases}$ $c(r) \text{ ОС}^\Gamma$ — срезающая функция, $V(r, j)$ —

гладкая часть решения, для которой получена оценка в соответствующей норме.

Исследование показало, что главную особенность имеет именно электрическое поле. Сама продольная компонента электрического поля ограничена в окрестности угловой точки, а ее производная имеет степенную особенность, причем вид функции, описывающей особенность, и показатели степени соответствуют полученным ранее для скалярного случая [6].

При построении численного решения знание точного вида сингулярности позволяет в пространство пробных функций ввести функции, имеющие сингулярности данного вида, и тем самым точно аппроксимировать сингулярную часть решения. Это дает возможность получить скорость сходимости приближенного решения к точному, соответствующую гладкому случаю [7].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (проекты 15-01-03524 и 16-01-00690).

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Н. Боголюбов, И.Е. Могилевский, А.Г. Свешников // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т.55. № 3. С.446.
2. С.А. Назаров, Б.А. Пламеневский «Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей». М.: Наука — 1991.
3. В.А. Кондратьев // Труды Московского Математического Общества. Т.16. 1967. С.227.
4. А.Н. Боголюбов, А.Л. Делицын, И.Е. Могилевский, А.Г. Свешников // Радиотехника и электроника. 2003. Т.48. №7. С.787.
5. А.Л. Делицын // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т.39. № 2. С.315-322.
6. А.Н. Боголюбов, И.Е. Могилевский // Труды российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи им. А.С. Попова, серия Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации. Т. 9. С. 33-35.
7. А.Н. Боголюбов, А.И. Ерохин, И.Е. Могилевский, М.И. Светкин // Вестник МГУ. Серия 3. Физика. Астрономия. 2017. № 1. С. 17.

Расчет высокоэффективных резонаторов твердотельных лазеров

П.А. Носов, В.И. Батшев, В.Ю. Павлов

МГТУ им. Н.Э. Баумана

pan.bmstu@gmail.com

Особенностью резонаторов твердотельных лазеров является возникновение в активном элементе термооптических неоднородностей (образуется так называемая «тепловая» линза) [1-3]. Возникающая в твердотельном активном элементе тепловая линза приводит к изменению конфигурации резонатора – резонатор становится зеркально-линзовым.

В работе рассмотрен активный способ обеспечения стабильности пространственных параметров пучка на выходе лазера, обоснована структура оптической системы резонатора, необходимая для его реализации. Разработана методика расчета резонатора твердотельного лазера, позволяющая определить конструктивные параметры резонатора при отклонении оптической силы тепловой линзы активного элемента относительно исходного (номинального) значения. Этот способ также может быть использован при разработке резонатора, для которого оптическую силу тепловой линзы заранее сложно определить.

Перспективным направлением развития лазерных приборов и систем на базе твердотельных лазеров является разработка оптических систем, позволяющих осуществлять плавное изменение пространственных параметров лазерного пучка в рабочей зоне в широких пределах: диаметра перетяжки, ее положения, конфокального параметра, угловой расходимости. Такие оптические системы востребованы для таких прикладных направлений, как космические оптические линии связи, разработка лазерных оптико-электронных приборов экологического мониторинга и др.

В работе предложена и обоснована структура оптической системы резонатора твердотельного лазера, позволяющая обеспечивать плавное изменение пространственных параметров пучка на выходе резонатора лазера при неизменности его энергетических параметров. Схема оптической системы резонатора включает линзоподобный твердотельный активный элемент и двухкомпонентную внутррезонаторную вариосистему, расположенные между плоскими зеркалами (рис. 1).

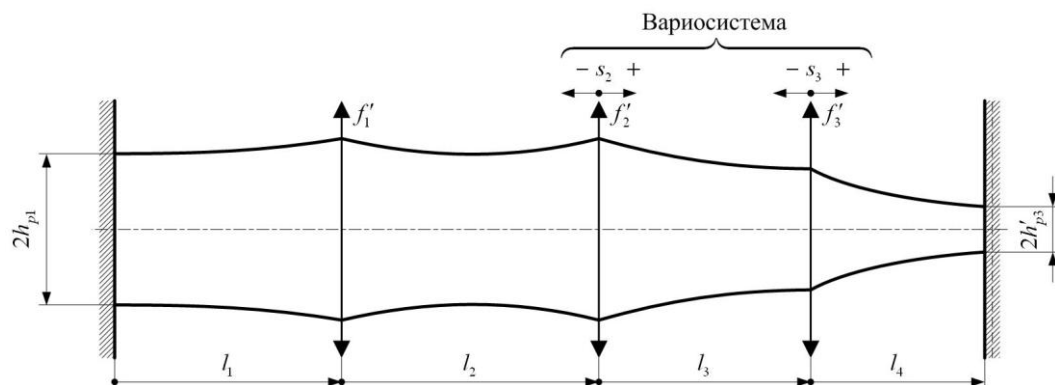


Рис. 1. Схема эквивалентной оптической системы резонатора твердотельного лазера для формирования пучка с изменяемыми пространственными параметрами: f'_1 – заднее фокусное расстояние тепловой линзы; f'_2, f'_3 – задние фокусные расстояния линз вариосистемы; s_2, s_3 – перемещение линз вариосистемы (влево от нулевого положения – отрицательное, вправо – положительное); $l_1 \dots l_4$ – длины плеч резонатора; $2h_{p1}, 2h'_{p3}$ – диаметр перетяжки пучка на зеркалах резонатора.

Задача габаритного расчета устойчивых резонаторов твердотельных лазеров, формирующих лазерный пучок с изменяемыми пространственными параметрами при неизменности энергетических параметров излучения резонаторов, подробно рассмотрена в [4]. Абберрационный анализ зеркально-линзовых резонаторов предлагается проводить методом лучевого пакета, ранее использовавшийся только для анализа «пустых» резонаторов [5]. Результаты расчета показывают, что параметры схемы резонатора обеспечивают формирование пучка с требуемыми параметрами – неизменность диаметра перетяжки на левом зеркале и требуемый перепад изменения диаметра пучка на выходном правом зеркале.

К настоящему времени влияние неоднородности активной среды, разъюстировки элементов резонатора и других факторов на пространственно-энергетические характеристики лазерного пучка в литературе в той или иной степени рассмотрены, а некоторые исследованы достаточно подробно [6]. Однако в большинстве работ считают практически неразличимыми оптические элементы резонатора со сферической и параболической поверхностями. Это допущение справедливо только в параксиальном приближении. Поскольку, как правило, применяют сферические зеркала, абберрация формы поверхности оптических элементов резонатора в совокупности с перечисленными факторами влияет на характеристики формируемого пучка.

Данная задача в работе исследуется в рамках скалярной теории дифракции [2,5,6]. Рассмотрим двухзеркальный резонатор длиной L с радиусами кривизны сферических зеркал R_j , где $j=1$ – для левого зеркала, а $j=2$ – для правого зеркала. Волновая абберрация сферического зеркала в точке $(x_j; y_j)$ в работе представлена в виде:

$$W_j(x_j, y_j) = -\frac{h_j^2}{R_j} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{h_j^2}{R_j^2} + \frac{1}{8} \frac{h_j^4}{R_j^4} + \frac{5}{64} \frac{h_j^6}{R_j^6} + \dots \right), \quad h_j^2 = x_j^2 + y_j^2.$$

Здесь первый член соответствует параксиальному приближению, а остальные – абберрациям зеркала 3, 5 и 7-го порядков, соответственно.

При описании резонаторов часто используют G -плоскость, на которой каждому резонатору произвольной конфигурации однозначно соответствует некоторая точка (рис. 2). Анализ G -диаграммы с учетом абберраций зеркал резонатора позволяет сделать следующие выводы: 1) имеются конфигурации устойчивых концентричных (в I четверти диаграммы) и конфокальных (в III четверти диаграммы) резонаторов; 2) малые искажения поля формируемого пучка характерны для неконфокальных и неконцентричных резонаторов вдали от границы характерных для этих резонаторов кривых.

Проведенные для линейных резонаторов различных конфигураций расчеты показали, что 1) параметры конфигурации (g -параметры) идеального резонатора и при учете абберраций высших порядков зеркал различны; 2) область устойчивости реального резонатора уже, чем идеального; 3) вблизи границы устойчивости резонатор может стать неустойчивым из-за абберраций зеркал, что приведет к формированию другого типа колебаний.

Для расчета распределения поля и параметров лазерного пучка в многоэлементных резонаторах с учетом абберраций зеркал предлагается метод эквивалентного двухзеркального резонатора. В этом методе многоэлементный резонатор приводится к эквивалентному двухзеркальному, параметры которого (радиусы кривизны зеркал, расстояние между ними, их апертуры) определяются параметрами многокомпонентной схемы. Это позволяет упростить анализ влияния абберраций зеркал многоэлементного резонатора произвольной конфигурации на

характеристики формируемого пучка и применить для их расчета результаты, полученные для двухзеркального резонатора.

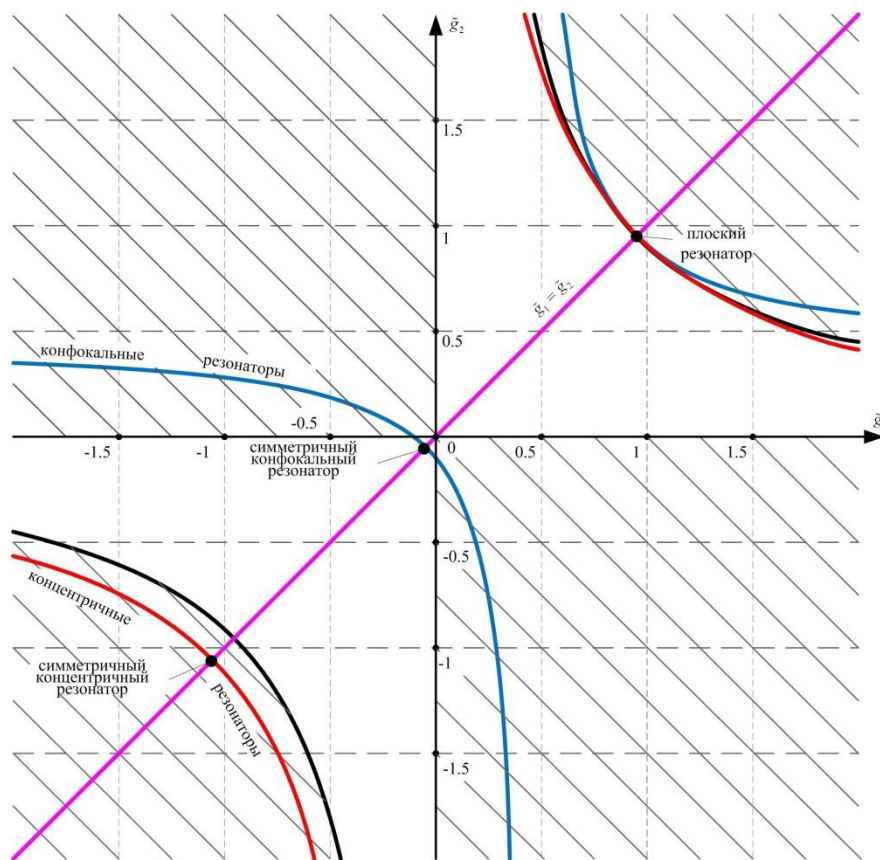


Рис. 2. G-диаграмма лазерных резонаторов.

Таким образом, на базе теории лазерной оптики с учетом особенностей формирования излучения твердотельными лазерами разработана методика габаритного расчета и абберационного анализа резонаторов. Адекватность разработанной методики подтверждена результатами расчета параметров оптической системы резонаторов для изменения пространственных параметров выходного пучка.

Исследование выполнено при поддержке гранта Президента РФ (грант № МК-6960.2016.8).

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Koechner “Solid-State Laser Engineering” Berlin: Springer. 6th ed., 1999.
2. В.П. Быков, О.О. Силичев “Лазерные резонаторы” М.: Физматлит, 2004.
3. А.В. Мезенов, Л.Н. Сомс, А.И. Степанов “Термооптика твердотельных лазеров” Л.: Машиностроение, 1986.
4. П.А. Носов, В.И. Батшев // Прикладная физика. 2017. № 1. С. 51.
5. И.И. Пахомов, А.Б. Цибуля “Расчет оптических систем лазерных приборов” М.: Радио и связь, 1986.
6. И.И. Пахомов, О.В. Рожков, В.Н. Рождествин “Оптико-электронные квантовые приборы” М.: Радио и связь, 1982.
7. И.И. Пахомов, А.Ф. Ширанков, П.А. Носов // Оптический журнал. 2010. Т. 77, №2. С. 37.

Расчет формирующей оптической системы технологического оборудования на базе мощных волоконных лазеров

П.А. Носов
МГТУ им. Н.Э. Баумана
pan.bmstu@gmail.com

Для реализации современных лазерных технологий используют различные типы лазеров (твердотельные, газовые, полупроводниковые и др.). В последнее время активно развиваются лазеры с полупроводниковой накачкой, в т.ч. волоконные и дисковые [1-3].

В настоящее время лидирующую позицию на рынке технологического оборудования занимают установки на базе волоконных лазеров, для которых характерны высокие мощность и качество излучения, что позволяет проводить производительную и точную обработку материалов. Основными элементами технологического оборудования являются источник излучения, система транспортировки излучения и формирующая оптическая система. Во всех лазерных технологиях (т.е. везде, где инструментом является лазерное излучение) лазерная оптическая система наряду с лазером – основные блоки, определяющие параметры данной технологии!

При обработке материалов необходимо в рабочей зоне обеспечить требуемую плотность мощности лазерного излучения [1,2]. Лучевая стойкость оптических элементов лазера, возникновение различных нелинейных эффектов и др. ограничивают максимальную выходную плотность мощности излучения. При этом мощные волоконные лазеры формируют расходящийся пучок. Для большинства технологических процессов, связанных с обработкой материалов, такие значения плотности мощности оказываются недостаточными. Поэтому при использовании лазерного излучения в технологических целях, как правило, возникает необходимость его фокусировки.

Базовая компоновка оптических систем технологических установок на базе волоконных лазеров включает волоконный коннектор, коллиматор и фокусирующий узел, а также защитное окно для предохранения оптики от загрязнения пылью и продуктами обработки материала. Применение излучения высокой мощности влечет за собой поглощение и переход энергии лазерного излучения в тепло в элементах оптической системы. Последующие за нагревом процессы, такие как тепловые деформации и изменение показателя преломления материала оптических элементов, приводят к возникновению тепловой линзы [4,5]. В результате изменяются оптическая сила каждого узла, оптическая сила всей оптической системы и пространственные параметры пучка в зоне обработки материала. В конечном итоге, все это приводит к несоблюдению требуемого технологического процесса обработки.

Экспериментальные исследования нагрева оптических элементов из кварцевого стекла КС-4В при воздействии излучения непрерывного волоконного лазера различной плотности мощности дали следующие результаты. Для защитного стекла без просветляющего покрытия при плотности мощности излучения $0,64 \text{ кВт/см}^2$ максимальный нагрев зарегистрирован в центре защитного стекла. При такой плотности мощности излучения изменение температуры защитного стекла составило всего несколько градусов. В то же время, для защитного стекла с лучестойким просветляющим покрытием при плотности мощности излучения $10,6 \text{ кВт/см}^2$ защитное стекло нагрелось на $27,8 \text{ }^\circ\text{C}$ [5]. Проведенные исследования показали, что распределение плотности мощности лазерного излучения и распределение

температуры на оптическом элементе лазерной головки имеют один и тот же характер и могут быть аппроксимированы функцией Гаусса.

Исследования пространственной структуры пучка мощного волоконного лазера [2,6] показали, что она аналогична структуре гауссова пучка и описывается набором параметров, в основе которого лежат конфокальный параметр пучка z_k и параметр BPP . Причем эти параметры взаимосвязаны и удовлетворяют инварианту лазерного пучка: $BPP = h_p \theta = h_p^2 / z_k = M^2 \lambda / \pi$, где h_p – размер (полудиаметр) перетяжки, 2θ – угловая расходимость пучка, M^2 – параметр качества пучка, λ – длина волны лазерного излучения.

В работе также рассмотрены вопросы разработки лазерных оптических систем с малыми термооптическими искажениями формируемого пучка. Полученные аналитические выражения позволяют провести приближенный анализ лазерной оптической системы и рассчитать пространственные параметры формируемого лазерного пучка с учетом нагрева линз.

Анализ формирующих оптических систем, изготовленных из кварцевого стекла, показал, что дефокусировка выходной перетяжки, возникающая в таких системах, может достигать порядка нескольких конфокальных параметров выходного пучка при мощности непрерывного волоконного лазера 4-5 кВт, но является незначительной при мощности излучения меньше 1 кВт. Полученные результаты согласуются с практическими данными [7], согласно которым для линз оптической системы из кварцевого стекла за счет их нагрева выходная перетяжка смещается ближе к фокусирующей линзе, причем ее размер практически не изменяется.

Таким образом, проведенные исследования и разработанные методы позволяют проводить расчет оптических систем, характеризующиеся малыми аберрациями при формировании пучка мощного волоконного лазера.

Исследование выполнено при поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-08-00936 а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е.Д. Вакс, М.Н. Миленький, Л.Г. Сапрыкин “Практика прецизионной лазерной обработки” М.: Техносфера, 2013.
2. А.Г. Григорьянц, И.Н. Шиганов, А.И. Мисюров “Технологические процессы лазерной обработки” М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006.
3. А.Г. Григорьянц, В.В. Васильцов // Инженерный журнал: наука и инновации, 2012, № 6.
4. M. Scaggs, G. Haas // 29th International Congress on Applications of Lasers and Electro-Optics, ICALEO 2010 - Congress Proceedings. 2010. 103. P. 1511.
5. П.А. Носов и др. // Изв. вузов. Приборостроение. 2016. Т. 59, № 12. С. 1028.
6. А.Ф. Ширанков и др. // Научно-технические технологии в машиностроении. 2014. № 5. С. 37.
7. N. Harrop et al. // Proc. SPIE 9741, High-Power Laser Materials Processing: Lasers, Beam Delivery, Diagnostics, and Applications. 2016. V. 9741. art. no. 97410P.

Изучение характеристик семейства молекул с выделенными одноатомными зарядовыми центрами на основе атомов Rh, Ru, Pt для построения одноэлектронного молекулярного транзистора

А.А. Паршинцев, В.В. Шорохов, Е.С. Солдатов
Физический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова
parshincev@physics.msu.ru

Создание и исследование рабочих одноатомных одноэлектронных элементов и устройств, у которых зарядовые центры — выделенные одиночные атомы в некоторой среде [1], необходимо для создания нанoeлектронных вычислительных приборов, работающих на новых физических принципах. Молекулы, которые содержат в себе структурно и химически выделенные зарядовые центры, работающие при определенных условиях как одноатомные – один из возможных подходов для решения этой задачи.

В данной работе изучено семейство молекул с выделенными зарядовыми центрами на основе одиночных атомов Rh, Ru, Pt для целей построения одноэлектронных функциональных элементов, например одноэлектронного молекулярного транзистора (ОМТ). Путем расчета и анализа электронных энергетических спектров в различных зарядовых состояниях (от $-2e$ до $+2e$), емкостных и электрон-транспортных характеристик семейства молекул ауорофильных производных терпиридина на основе родия, рутения и платины [2] показано, что такие молекулы могут быть использованы в качестве аналога одноатомных зарядовых центров. В то же время их кулоновские свойства несколько различны, что приводит к некоторым особенностям на транспортных характеристиках элементов на их основе. Для расчета одночастичных энергетических спектров и спектров полной энергии электронов использовался метод Хартри-Фока в программе квантово-химических расчетов NWChem [3]. Для расчета транспортных характеристик ОМТ использовался подход, ранее описанный в работе [4,5], и метод имитационного моделирования Монте-Карло в режиме предельно медленной энергетической релаксации электронов [6,7].

ЛИТЕРАТУРА

1. V.V. Shorokhov et al. // *Nanoscale*. 2, 613–620 (2017).
2. E.K. Beloglazkina, A.G. Majouga, E.A. Manzhel'iy, A.A. Moiseeva et al. // *Polyhedron* 2015, 85, P. 800-808. DOI: 10.1016/j.poly.2014.09.037
3. M. Valiev et al. // *Comput. Phys. Commun.* 181, 1477 (2010).
4. D.V. Averin et al. // *Phys. Rev. B* 44, 6199–6211 (1991).
5. C.W. J. Beenakker, // *Phys. Rev. B* 44, 1646–1656 (1991).
6. J. Honerkamp // *Stochastic dynamical systems: Concepts, numerical methods, data analysis*. New York: Wiley-VCH (1994).
7. V.V. Shorokhov, Johansson P., Soldatov E.S. // *Journal of Applied Physics*, 91 (5), 3049-3053 (2002).

Моделирование модифицированных резонаторов Фабри-Перо: расчет собственных мод и изучение их устойчивости

М.В. Поплавский

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
mv.poplavskii@physics.msu.ru

Эффект параметрической колебательной неустойчивости, возникающий в гравитационно-волновых детекторах, ограничивает уровень световой энергии, рециркулирующей в резонаторах Фабри-Перо, что приводит к росту шумов и уменьшению точности измерений [1], [2]. Данное явление обусловлено наличием большого количества высокодобротных оптических мод в резонаторе со сферическими зеркалами.

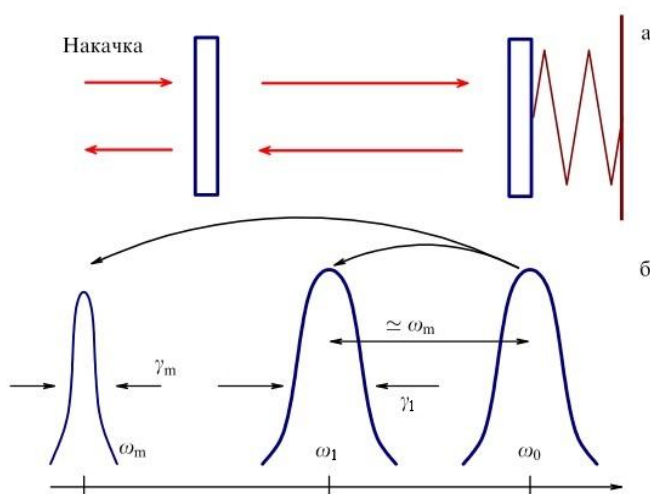


Рис. 1. а) Модель резонатора с подвижным зеркалом. б) Параметрическая колебательная неустойчивость: перекачка энергии из основной оптической моды в стоксову и упругую моду зеркала (при достижении пороговой мощности основной моды).

Для подавления негативного эффекта было предложено использовать модифицированные резонаторы Фабри-Перо с более редким спектром и высокими потерями оптическими мод высокого порядка, которые можно получить посредством оптимизации профиля отражающей поверхности зеркал, например, описываемого функцией:

$$A(r) = x_0 \cdot e^{-\eta(1 + \alpha \cdot \eta + \beta \cdot \eta^2)}, \quad \eta = \frac{r^2}{2 \cdot R_c \cdot x_0}$$

которая при $\alpha = \beta = 0$ и $x_0 \rightarrow \infty$ переходит в профиль сферического зеркала $r^2/(2 \cdot R_c)$ с радиусом кривизны R_c [3], [4] (Рис. 2). Дальнейшие расчеты и моделирование проведены для стандартных характеристик резонаторов Фабри-Перо в детекторах aLIGO: длина $L = 4000$ м, радиус кривизны зеркал $R_c = 2076$ м, длина волны $\lambda = 1.064$ мкм.

В работе использовался обобщенный на случай ненулевого азимутального индекса метод моделирования резонаторов Фабри-Перо, основанный на преобразовании Ханкеля [5], с помощью которого был проведен численный расчет потерь различных мод при варьировании параметров $\{x_0, \alpha, \beta\}$ [4]. В результате были найдены сочетания параметров, при которых:

- потери P_{00} основной моды (при прохождении от одного зеркала до другого и обратно) практически те же, что и для сферических зеркал $P_{00} = 0.42 \text{ ppm}$ ($\text{ppm} \equiv 10^{-6}$) с параметрами aLIGO;
- потери остальных мод существенно увеличены: как минимум на порядок по сравнению со сферическим профилем.

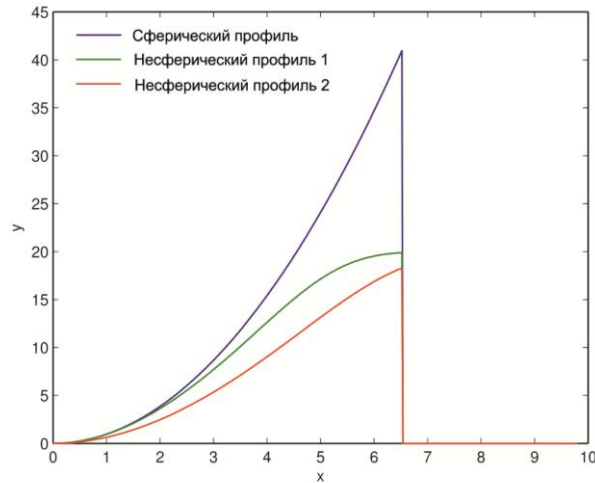


Рис. 2. Примеры несферических профилей зеркал модифицированных резонаторов Фабри-Перо в безразмерных координатах.

В процессе исследования устойчивости подобных оптических систем были изучены влияния различных факторов при изготовлении подобных зеркал и юстировки модифицированных резонаторов на рост дифракционных потерь основной моды:

- соответствие гауссовым пучкам — собственные моды модифицированных резонаторов отличаются от гауссова профиля не более, чем на 10^{-3} , что позволяет производить накачку таких резонаторов, используя гауссовы пучки (Рис.3);

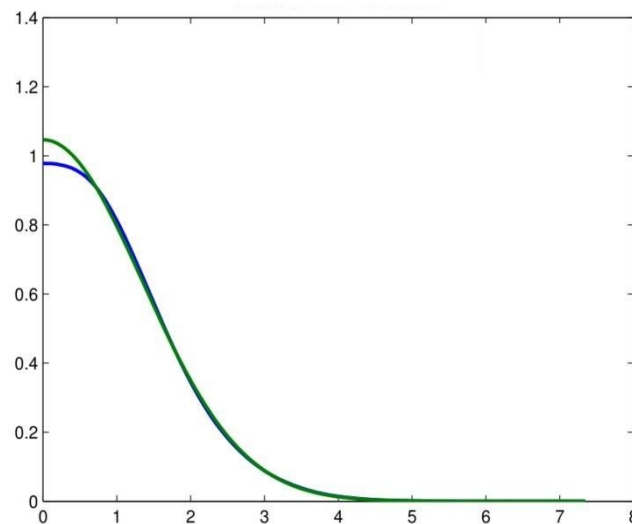


Рис.3. Соответствие основной моды модифицированного резонатора Фабри-Перо (параметры: $x_0 = 27.5$, $\alpha = 0.21$, $\beta = 0$) гауссовым пучкам. Построено в безразмерных координатах.

- допустимые малые изменения параметров $\{x_0, \alpha, \beta\}$ — при изготовлении зеркал, указанного профиля, необходимо соблюдать точность в пределах $\pm 0.25, \pm 0.005, \pm 0.005$ соответственно для каждого из параметров;
- максимально возможный угол отклонения зеркал при юстировке θ_{perm} — в случае модифицированных резонаторов Фабри-Перо $\theta_{\text{perm}} \approx 0.05 \div 0.15$ мкрад (для aLIGO интерферометра $\theta_{\text{perm}} \approx 0.6$ мкрад)
- неровности отражающей поверхности зеркал — проанализировано влияние реальной карты неровностей отражающей поверхности зеркал aLIGO на дифракционные потери основной моды, как в обычных резонаторах Фабри-Перо, так и в модифицированных, и показано, что добавка к дифракционным потерям основной моды не превышает 3 ppm для типичных карт неровностей.

Также в данной работе была решена еще одна задача: получение фазового профиля (т. е. формы зеркала) по заданному амплитудному распределению волны на краю резонатора. Применялся модифицированный алгоритм Гершберга-Сакстона [6], заключающийся в следующем: желаемое распределение поля с определенным приближением фазового профиля проходит резонатор от одного края до другого, и часть полученного распределения фазы добавляется к профилю зеркала предыдущего шага. В качестве нулевого приближения был взят стандартный профиль сферического зеркала. Таким образом на n -ом шаге происходит изменение, как амплитуды, так и фазы:

$$n: \Psi_n = A(r) \cdot e^{i\phi_n(r)} \rightarrow \Psi'_n = A'(r) \cdot e^{i\phi'_n(r)}$$

Фазовое распределение на следующем шаге можно вычислять, например, следующим образом:

$$\phi_{n+1}(r) = \phi_{n+1}(r) + \frac{\phi'_{n+1}(r) - \phi_n(r)}{2}$$

Данный итерационный алгоритм был применен к нестандартным профилям мод:

- супергауссовы моды:

$$A(r) = e^{-\left(\frac{r}{w}\right)^\gamma}, \quad \gamma > 2$$

- суперпозиция лаггер-гауссовых мод обычных резонаторов

$$A(r) = LG00 + \varepsilon LG01, \quad \varepsilon = 0 \div 0.3$$

В результате найдены такие профили зеркал, эффективный размер пятна собственных мод которых больше, а также потери оптических мод высокого порядка гораздо выше, чем у собственных мод обычных резонаторов с параметрами aLIGO.

ЛИТЕРАТУРА

1. V.B. Braginsky, S.E. Strigin and S.P. Vyatchanin. // Phys. Lett. A. 2001. V. 287. No. 5-6. P. 331-338;
2. V.B. Braginsky, S.E. Strigin and S.P. Vyatchanin. // Phys. Lett. A. 2002. V. 305. No. 3-4. P. 111-124.
3. F. Ferdous et al. // Phys. Rev. A. 2014. V. 90. 033826;
4. A.B. Matsko et al. // Phys. Rev. D. 2016. V. 93. No. 8.
5. J.Y. Vinet, P. Hello. // Journal of modern optics. 1993. V. 40 No. 10. P. 1981-1993.
6. R.W. Gerchberg, W.O. Saxton. // Optik 1972. V. 35. P. 237-246.

Моделирование полупроводниковых лазеров и оптических усилителей

А.Г. Ржанов

Физический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова
rjanov@mail.ru

Полупроводниковые лазерные диоды (ЛД) появились немногим позже твердотельных и газовых лазеров в начале 60-х годов прошлого века [1, 2]. В 1969 году, благодаря использованию двусторонних гетероструктур (ДГС), была впервые получена непрерывная генерация излучения при комнатной температуре [3, 4], и тогда же начался основной процесс развития техники ЛД. Усиление оптических сигналов рассматривалось первоначально (в 60-е годы) как сопутствующее явление, наблюдаемое при исследовании процессов в лазерных устройствах. Однако уже в начале 80-х годов в связи с развитием волоконно-оптической техники оно стало самостоятельным направлением. Наметились несколько вариантов оптических усилителей:

- оптические волноводы, легированные редкоземельными атомами (1964 год);
- оптические волноводы с использованием явлений ВКР и ВРМБ (1981 год);
- полупроводниковые оптические усилители (ПОУ) (1983 год) [5];
- параметрические усилители на сосредоточенных элементах (1982 год).

В 80-х годах появились первые работы по математическому моделированию динамических процессов в ЛД и ПОУ [6, 7]. Одна из современных конструкций мощного ЛД показана на рис. 1.

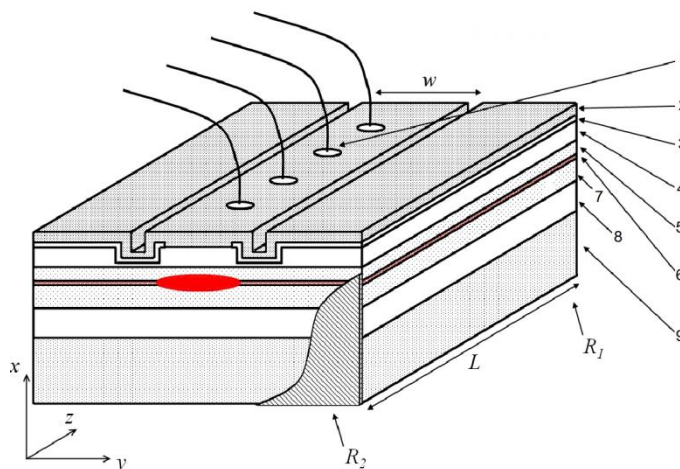


Рис. 1. Мощный инжекционный лазер. Контакты (1), контактный слой (2), изолирующий слой (3), P - эмиттер (4), волновод (5,7), квантовая яма (6), N - эмиттер (8), подложка (9), зеркала (R_1 , R_2) [8].

В основе всех самосогласованных моделей ЛД лежат кинетические (скоростные) уравнения, которые описывают баланс неравновесных носителей и фотонов в активной области лазера. В простом виде эти уравнения записывают для средних значений величин, не учитывая пространственное распределение носителей и оптического поля. В более детальной модели ЛД учтено пространственное взаимодействие между лазерным излучением и неравновесными носителями, от концентрации которых зависит эффективная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(y)$ [7]:

$$\varepsilon(y) = \varepsilon_{eff}^0 - AN(y) + j(BN(y) - F), \quad (1)$$

где y – латеральная координата, ε_{eff}^0 – усреднённое (эффективное) значение диэлектрической проницаемости активного слоя без накачки, A, B – коэффициенты, характеризующие нелинейную рефракцию и усиление в активном слое лазера, F – коэффициент резонансных потерь.

В самосогласованную модель ЛД входит система дифференциальных кинетических уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial N(y,t)}{\partial t} = \frac{J(y,t)}{ed} - \frac{N(y,t)}{\tau_{sp}} + D \cdot \frac{\partial^2 N(y,t)}{\partial y^2} - \Gamma \frac{c}{n^*} \cdot g(N) \cdot \sum_j S_j(t) |\psi_j(y,t)|^2; \quad (2)$$

$$\frac{dS_j(t)}{dt} = G_j(t)S_j(t) + \frac{\eta}{\tau_{sp}} \langle N(t) \rangle, \quad (3)$$

где $N(y,t)$ – концентрация неравновесных носителей в активном слое, $J(y,t)$ – плотность тока накачки на гетеропереходах, $S_j(t)$ – средняя плотность фотонов в j -ой латеральной (поперечной) моде, D – коэффициент амбиполярной диффузии носителей, $G_j(t)$ – модовое усиление, η – фактор спонтанного излучения, τ_{sp} – время спонтанной рекомбинации носителей, τ_{ph} – время жизни фотонов в «холодном» резонаторе, e – заряд электрона, c – скорость света в вакууме, d – толщина активного слоя, $g(N) = a^* \cdot (N(y,t) - N_{tr})$ – материальное усиление, a^* – дифференциальный коэффициент усиления, N_{tr} – концентрация прозрачности, Γ – коэффициент оптического ограничения активного слоя, n^* – эффективный показатель преломления нулевой моды, $\langle N(t) \rangle$ – среднее значение концентрации носителей, $\psi_j(y)$ – нормированные профили латеральных мод.

Количество уравнений (3) в модели соответствует числу латеральных мод, перешедших через порог генерации. Система уравнений (2)-(3) вместе с набором соотношений, описывающих связь между коэффициентами и выражением (1), образуют кинетическую часть модели.

Вторую, оптическую или резонаторную, часть модели представляет волновое уравнение, преобразованное в уравнение Гельмгольца с учётом зависимости амплитуды оптического поля от времени и аксиальной координаты z , в виде $E(\vec{r}) = \psi(y) \cdot \exp(i(\omega t - \beta z))$ [9, 10]:

$$\frac{d^2 \psi_j(y)}{dy^2} + \left(\frac{\omega_j^2}{c^2} \varepsilon(y) - \beta^2 \right) \psi_j(y) = 0, \quad (4)$$

где ω_j – частота оптического излучения, β – продольная (по оси z) постоянная распространения, $\psi_j(y)$ – амплитудные профили мод – собственные функции уравнения (СФ). Все величины в уравнении (4), кроме скорости света, считаются комплексными. Зависимость от поперечной (трансверсальной) координаты x учитывается путём применения метода эффективного показателя преломления [7].

В уравнении (4) собственными значениями (СЗ) являются в случае волноводной задачи постоянные распространения β_j , количество которых определяется структурой

волновода. В случае резонаторной задачи — это либо комплексные частоты мод ω_j , либо эффективные показатели преломления $n_{eff j} = c\beta/\omega_j$. Кроме волноводных мод, возможно существование излучательных и вытекающих мод. В некоторых конструкциях ИЛ такие моды используются. Они, за редким исключением, имеют непрерывный спектр.

Постоянная распространения β для резонаторной задачи задается номером продольной моды M , длиной резонатора L и коэффициентами отражения зеркал R_1 и R_2 :

$$\beta = \frac{M\pi}{L} + \frac{i}{2} \left(\alpha_{int} + \frac{1}{2L} \ln \left(\frac{1}{R_1 R_2} \right) \right), \quad (5)$$

где α_{int} — нерезонансные потери в лазере, R_1 и R_2 — коэффициенты отражения по мощности зеркал.

Решая задачу (4) на СЗ и СФ с учётом (1) и (5), находим усиление поперечных мод:

$$G_j(t) = -2\text{Im}(\omega_j). \quad (6)$$

Один из возможных алгоритмов решения самосогласованной задачи показан на рис. 2.

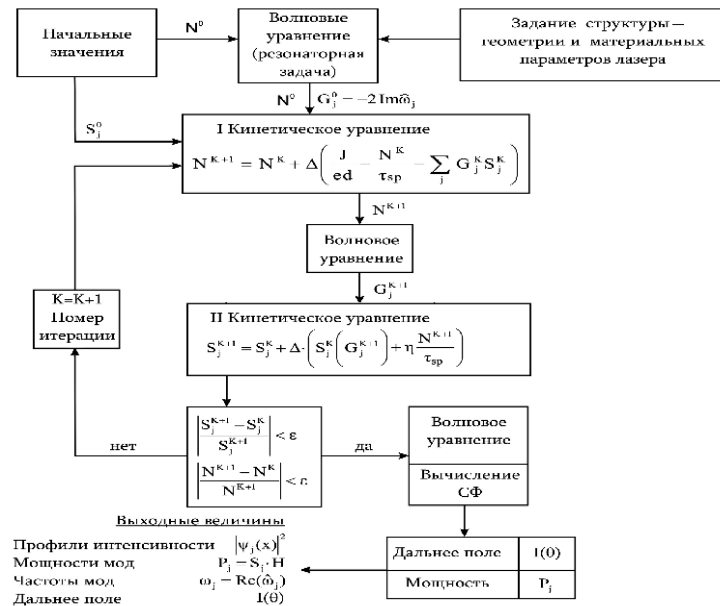


Рис. 2. Алгоритм решения самосогласованной задачи

В начале расчета выбираются начальные значения концентрации неравновесных носителей N^0 и средней плотности фотонов S^0 во всевозможных модах, а также задаётся ток накачки. Из этих начальных значений с помощью записанного в разностном виде уравнения (2) находится очередное приближение для концентрации N , от которой зависит эффективная диэлектрическая проницаемость активного слоя лазера (1). Для нового профиля диэлектрической проницаемости $\mathcal{E}(y)$ с учётом (5) решается резонаторная задача (4) и при фиксированном значении β находятся комплексные частоты резонаторных мод ω_j и модовое усиление (6). Модовое усиление далее используется для нахождения очередного приближения средней концентрации

фотонов в модах S_j , согласно записанному в разностной форме уравнению (3).

Полученные из данной процедуры значения средних концентраций фотонов используются для решения уравнения (2). Тем самым замыкается цикл итераций. Этот алгоритм может быть с успехом использован как для моделирования динамики излучения ЛД при прямой импульсной модуляции, так и для нахождения стационарного распределения интенсивности ближнего поля $|\psi_j(y)|^2$ на зеркалах.

Отдельную тему для рассмотрения представляет учёт процессов, связанных с нагревом активной области ЛД или ПОУ [10]. Для этого требуется решение уравнения теплопроводности параллельно с динамической задачей. Таких расчётов в полном объёме пока что нет в силу того, что это требует колоссальных компьютерных мощностей. При этом раздельное решение задач даёт вполне адекватные результаты.

Физическими процессами, которые не учтены в модели (1)-(6), также являются внутризонное спектральное "выжигание дыры" и термализация носителей. Перераспределение носителей по энергии внутри зон приводит, так же, как и в пространстве, к неоднородному уширению линии усиления. В обоих случаях проявляется диффузия носителей и конкуренция мод, так как источник подпитки излучения неравновесными носителями один для всех. Учёт этих процессов актуален при больших мощностях генерации (0.5 Вт и выше).

Существует ещё несколько физических механизмов, влияющих на динамику излучения ЛД и ПОУ, например, поляризационные эффекты, связанные с наличием зон лёгких и тяжёлых дырок, которые необходимо включить в модель, однако, это пока что невозможно по причине неустойчивости системы и компьютерных ограничений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ж.И. Алферов, Р.Ф. Казаринов. // Авт. свид. № 181737. Заявка № 950840 с приоритетом от 30 марта 1963.
2. H. Kroemer. // Proc. IEEE. 1963. V. 51. No. 12. P. 1782.
3. Ж.И. Алферов и др. // ФТП. 1969. Т. 3. С. 1328.
4. I. Hayashi et al. // Appl. Phys. Lett. 1970. V. 17. No. 2. P. 109.
5. В.В. Лык, В.П. Дураев, П.Г. Елисеев и др. "Оптический усилительный модуль". Препринт ФИАН. Москва. 1989.
6. J. Buus // IEEE J. Quant. Electron. 1982. V. QE-18. No. 7. P. 1083.
7. J. Buus // IEEE J. Quant. Electron. 1983. V. QE-19. No. 6. P. 953.
8. И.С. Тарасов // Квантовая электроника. 2010. Т. 40. №. 8. С. 661.
9. Т. Тамир "Волноводная оптоэлектроника" М.: Мир, 1991.
9. Х. Кейси, М. Паниш. "Лазеры на гетероструктурах". М.: Мир, 1981.
10. В.П. Дураев, А.А. Казаков, С.В. Медведев. "Полупроводниковый оптический усилитель". <http://www.photonics.su/journal/article/2489>. ФОТОНИКА. Вып. #1/2010.

Дифракция на телах с коническими точками

В.В. Ровенко, И.Е. Могилевский

МГУ им. М.В. Ломоносова, Физический факультет, кафедра математики
rovenko.vladimir@physics.msu.ru, mogilev@phys.msu.ru

В настоящее время весьма актуальны задачи дифракции на телах сложной формы, содержащих металлические и диэлектрические ребра, конические точки. Рассматривается скалярная задача дифракции наметаллическом теле, содержащем коническую точку. Известно, что наличие ребер, кромок и конических точек приводит к появлениям сингулярностей у поля в их окрестностях [3,5], что существенно усложняет применение численных методов для исследования подобных задач. Одним из весьма эффективных способов преодоления этих проблем является выделение особенности решения в явном виде, то есть построение асимптотического представления решения в окрестности особой точки границы. При этом существенно используются результаты по асимптотике решения эллиптических краевых задач, представленные в работах В.А. Кондратьева [1], а также С.А. Назарова и Б.А. Пламеневского [5].

В настоящей работе предполагается, что источники поля сосредоточены в конечной области D_0 , находящейся вне тела. На поверхности тела ставятся однородные условия Дирихле, на бесконечности — условия излучения Зоммерфельда. В окрестности конической точки ставится условие Мейснера. Следует заметить, что при указанных условиях задача имеет единственное решение [3]. Математическая постановка задачи примет вид:

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = f(M) \text{ supp } f(M) \in D_0 \\ u|_S = 0 \\ \partial u / \partial r - iku = \bar{o}\left(\frac{1}{r}\right), r \rightarrow \infty \\ u \sim r^\beta, \beta > -3/2 \end{cases} \quad (1)$$

Основная цель работы состоит в выделении сингулярной части поля в окрестности конической точки. Для детального исследования поля в этой области данная задача сначала рассматривается в случае бесконечного конуса в области D_0 вне конуса. В дальнейшем использование срезающей функции позволит исходную задачу дифракции на конечном теле свести к рассмотренной задаче в случае бесконечного конуса. Вводится сферическая система координат (r, θ, φ) с центром в конической точке (рис. 1). Данный подход позволяет существенно упростить граничные условия, что дает возможность более детально исследовать свойства искомого решения. Основное уравнение задачи (1) преобразуется следующим образом: слагаемое $k^2 u$ перенесем в правую часть, оставив слева только главную часть оператора Гельмгольца — оператор Лапласа. Для новой правой части сохраним обозначение $f(M)$. Таким образом, получим уравнение Пуассона вне бесконечного конуса, причём на его боковой поверхности остаются однородные условия Дирихле:

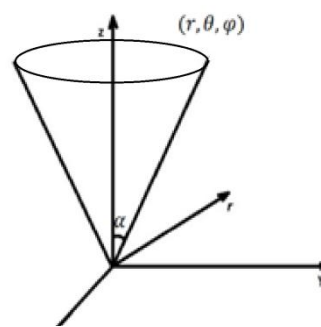


Рис.1. Конус и сферическая система координат.

$$\Delta u = f, \quad u|_S = u|_{\theta=\alpha} = 0, \quad r \in [0; +\infty) \quad (2)$$

Здесь $u = u(r, \theta, \varphi)$, $f = f(r, \theta, \varphi)$, S – боковая поверхность конуса, α – половина угла раствора конуса, Δ – оператор Лапласа.

Условия на бесконечности заменяются принадлежностью решения к функциональному пространству специального вида, впервые введённому В.А. Кондратьевым, что позволит лучше охарактеризовать решение в окрестности конической точки и на бесконечности [1]. Итак, введём пространство функций V_γ^l с нормой (x – координата, $l \geq 0$ – целое, γ – любое вещественное число) и пусть правая часть $f(M) \in V_\gamma^l$:

$$\|u\|_{V_\gamma^l}^2 = \sum_{s=0}^l \int_{D_0} r^{2\gamma-2(l-s)} \left| \frac{\partial^s u}{\partial x^s} \right|^2 dV$$

Используем выражение для оператора Лапласа в сферической системе координат и сделаем замену переменных:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \varphi} u, \quad \Delta_{\theta, \varphi} u = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

$$\tau = \ln \frac{1}{r}, r \in [0; +\infty) \Rightarrow r = e^{-\tau}, \tau \in (-\infty; +\infty)$$

Таким образом, в сферической системе координат конус D_0 переходит в бесконечный цилиндр прямоугольного сечения D . В новых переменных система (2) примет вид ($u = u(\tau, \theta, \varphi)$, $f = f(\tau, \theta, \varphi)$), проведём преобразование Фурье относительно переменной τ :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) + \Delta_{\theta, \varphi} u = e^{-2\tau} f, \quad u|_{\substack{\theta=\alpha \\ \tau \in (-\infty; +\infty)}} = 0 \quad (3)$$

$$\hat{u}(\lambda, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau, \theta, \varphi) e^{-i\lambda\tau} d\tau, \quad \hat{F}(\lambda, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau, \theta, \varphi) e^{-2\tau} e^{-i\lambda\tau} d\tau$$

Из свойств преобразования Фурье для образа правой части уравнения $\hat{F}(\lambda, \theta, \varphi)$ вытекает следующая оценка [1]:

$$\sum_{s=0}^l \int_{-\infty+i\hbar}^{\infty+i\hbar} |\lambda|^{2s} \|\hat{F}\|_{V^{2l-2s}(\tilde{D})}^2 d\lambda \leq C \|f\|_{V_\gamma^l(D_0)}^2, \quad \hbar = -\gamma + l + \frac{1}{2}$$

Подробнее о свойствах $V^{2l-2s}(\tilde{D})$ и $V_\gamma^l(D_0)$ изложено в работе [1]. Из задачи (3), используя свойства преобразования Фурье, получим задачу (4), решение которой будем искать в виде ряда по сферическим функциям (5):

$$(i - \lambda)\lambda \hat{u} + \Delta_{\theta, \varphi} \hat{u} = \hat{F}, \quad u|_{\substack{\theta=\alpha \\ \lambda \in (-\infty; +\infty)}} = 0 \quad (4)$$

$$\hat{u}(\lambda, \theta, \varphi) = \sum_{n,m} \hat{u}_n(\lambda) P_{n_m}^{(m)}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad \hat{F}(\lambda, \theta, \varphi) = \sum_{n,m} \hat{F}_n(\lambda) P_{n_m}^{(m)}(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (5)$$

Здесь $m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$, а n_m определяется из соотношений $P_{n_m}^{(m)}(\cos \alpha) = 0$. Подробно свойства решений этого уравнения исследованы в работе [4]. Из (4) и (5):

$$\hat{u}(\lambda, \theta, \varphi) = \sum_{n,m} \frac{\hat{F}_n(\lambda)}{(i-\lambda)\lambda + n_m(n_m+1)} P_{n_m}^{(m)}(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (6)$$

С помощью обратного преобразования Фурье, получим решение искомой задачи, принадлежащее пространству Кондратьева V_γ^{l+2} . Однако, пока построенное в

пространстве Фурье-образов решение (6) определено лишь на прямой $h = -\gamma + l + \frac{1}{2}$. Для построения его асимптотики, то есть представления решения в виде суммы функций, описывающих особенность, и гладкой части необходимо, чтобы функция (6) была определена в некоторой полосе $h_1 < h < h_2$, а для этого потребуется, чтобы функция $f(M) \in V_{\gamma_1}^{l_1} \cap V_{\gamma_2}^{l_2}$ с разными индексами $l_i, \gamma_i, i = 1, 2$. Тогда из (6) находим особые точки Фурье-образа решения:

$$\lambda_{n,m} = 0,5i[1 \pm (2n_m + 1)]$$

Теорема о вычетах позволяет перейти от интегрирования по прямой $\text{Im}\lambda = h_1$ к интегрированию по прямой $\text{Im}\lambda = h_2$, а находящиеся между ними полюсы $\hat{u}(\lambda, \theta, \varphi)$ из (6) позволяют получить асимптотическое представление решения:

$$u(\lambda, \theta, \varphi) = C + D + \tilde{u}(r, \theta, \varphi)$$

$$C = \sum_{h_1 < n_m < h_2} C_{n,m} r^{n_m} P_{n_m}^{(m)}(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

$$D = \sum_{h_1 < n_m + 1 < h_2} D_{n,m} r^{n_m + 1} P_{n_m}^{(m)}(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

Здесь $\tilde{u}(r, \theta, \varphi)$ есть гладкая часть решения, построенная путём интегрирования по прямой $\text{Im}\lambda = h_2$, $C_{n,m}, D_{n,m}$ – константы. Для гладкой части получена оценка в соответствующей форме.

Использование срезающей функции $\chi(r)$ (см. [5]) позволяет осуществить переход от искомой задачи к задаче на бесконечном конусе (d – некое число). Окончательное асимптотическое представление решения задачи дифракции в окрестности конической точки имеет вид:

$$u(\lambda, \theta, \varphi) = \chi C + \chi D + \tilde{u}(r, \theta, \varphi), \quad \chi(r) = \begin{cases} 1, r < d \\ 0, r > 2d \end{cases}$$

Изложенный выше метод позволяет решать задачи дифракции не только с одной, но и с несколькими коническими особенностями. Также его можно применить при решении задач маскировки, например, при исследовании вопроса о прохождении луча в маскирующей оболочке [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. В.А. Кондратьев, “Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками” // Тр. ММО 16, 209–292 (1967);
2. И.Е. Могилевский, В.В. Ровенко, “Математическое моделирование метода волнового обтекания в задачах маскировки” // ФОП, Т. 3, №. 4(13), 28-39, 2014.
3. А.Г. Свешников, И.Е. Могилевский “Избранные математические задачи теории дифракции”. Москва 2012, 239 с.
4. Н.М. Macdonald, “Zeroes of the Spherical Harmonic $P_{n_m}^{(m)}(\mu)$ considered as a Function of n ” // Proc. Lond. Math. Soc., 1899 (p. 264–281).
5. С.А. Назаров, Б.А. Пламеневский “Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей”, Москва, Наука, 1991, 334 с.

Моделирование периодических волноведущих систем сложной геометрии терагерцового диапазона

В.М. Пикунов, А.И. Ерохин, М.И. Светкин

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики

mihail-svetkin@mail.ru

Рассматривается математическая модель трехмерной идеально проводящей периодической волноведущей системы терагерцового диапазона, период которой представляет собой объединение нескольких прямоугольных волноводов с сечениями разного размера, в общем случае содержащих металлические вставки (рис. 1). Структуры с подобной геометрией возникают как в теоретических работах [1, 2], так и в прикладных, например, при создании устройств СВЧ диапазона [3].

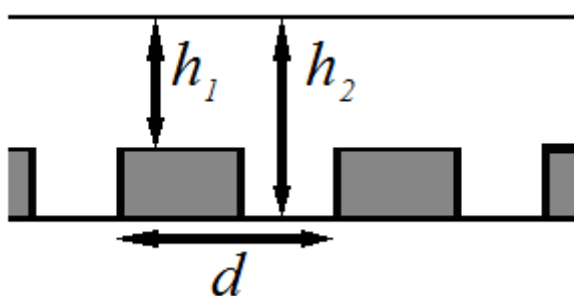


Рис. 1. Продольное сечение периодической волноведущей системы.

При численном моделировании таких систем возникают плохо обусловленные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. В рассматриваемой модели, основанной на неполном методе Галеркина и методе проекционного сшивания полей, обеспечивается непрерывность потока вектора Умова–Пойнтинга и учитываются бесконечные переотражения от скачкообразных стыков участков волновода с разными сечениями. Предложенный численный алгоритм расчета собственных мод периодической волноведущей системы приводит к задачам с хорошо обусловленными матрицами.

Корректность модели исследовалась с помощью предельного перехода к регулярному прямоугольному волноводу, дисперсионные характеристики которого могут быть получены аналитически [4]. В случае $h_1 / h_2 = 0,99$ (рис. 2) рассчитанные дисперсионные характеристики практически совпадают с дисперсионными характеристиками регулярного волновода ($h_1 / h_2 = 1$).

На рис. 3 представлены дисперсионные характеристики волновода с более сильной нерегулярностью ($h_1 / h_2 = 0,85$), что приводит к появлению зон непрозрачности в определенных диапазонах частот. Наличие таких зон было получено асимптотическими методами в работе [5].

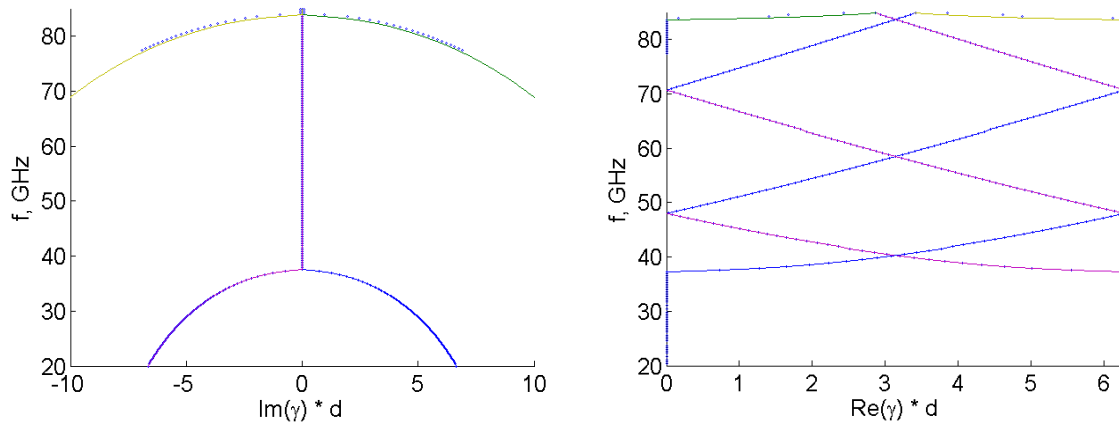


Рис. 2. Зависимость мнимой и действительной части от частоты для волновода с.

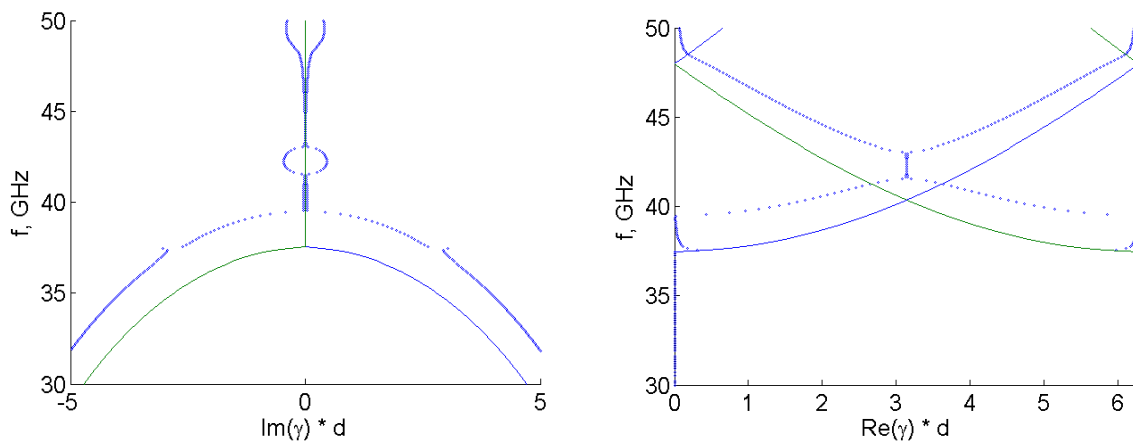


Рис. 3. Зависимость мнимой и действительной части от частоты для волновода с.

Предложенный метод является быстрым и эффективным. Построены дисперсионные характеристики для конкретных систем, работающих в терагерцовом диапазоне. Данная модель может быть применена к более сложным многозачерным структурам, возникающим при расчете систем с распределенным взаимодействием.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 16-31-60084 мол_а_дк, № 15-01-03524 и № 16-01-00690.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.С. Ильинский, Н.Б. Косич // Радиотехника и электроника, 1974, т. 19, №6, с.1171-1182.
2. А.С. Ильинский, С.В. Трубников, Н.А. Федосеева «Математические модели и оптимизация вычислительных алгоритмов» М.: Изд. Московского Университета, 1993.
3. М.Ю. Глявин и др. // Успехи физических наук, 2016. Т. 186. №. 6. с. 667-677.
4. А.Г.Свешников, И.Е. Могилевский «Математические задачи теории дифракции» М.: Физический факультет МГУ, 2010
5. С.А. Назаров // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. – 2013. – №. 2.

Моделирование сочленения прямоугольных волноводов разного размера

В.М. Пикунов, А.И. Ерохин, М.И. Светкин

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики

mihail-svetkin@mail.ru

В работе предлагается метод сшивания электромагнитного поля в области стыка волноведущих систем прямоугольных сечений различного размера с учетом особенностей полей на входящих металлических ребрах. На основе предложенных проекционных соотношений строится матрица трансформаций, связывающая комплексные амплитуды полей в различных сечениях волновода.

При создании электронных устройств терагерцового диапазона широкое распространение получили электродинамические структуры на основе отрезков прямоугольных периодических волноводов лестничного типа. Одной из проблем при численном анализе подобных устройств является выбор методов сопряжения электромагнитных полей в областях скачкообразного сочленения волноводов различных сечений, в том числе со щелями связи и трубами дрейфа.

В работе рассматривается метод проекционного сшивания, основанный на непрерывности в среднем потока вектор Умова–Пойнтинга через сечения сочленения, который широко используется в задачах сопряжения только двух волноводов [1-3]. Предложенный алгоритм может быть применен для случая сопряжения нескольких отрезков прямоугольных волноводов малых размеров с апертурой волновода большого размера.

На рис. 1 представлены продольное и поперечное сечение резонаторной структуры клистрона с геометрией лестничного типа. Здесь δ_1 , δ_2 - металлические торцы диафрагмы, номерам $s=1$ и $s=3$ соответствуют щели связи, а номеру $s=2$ – пролетный канал.

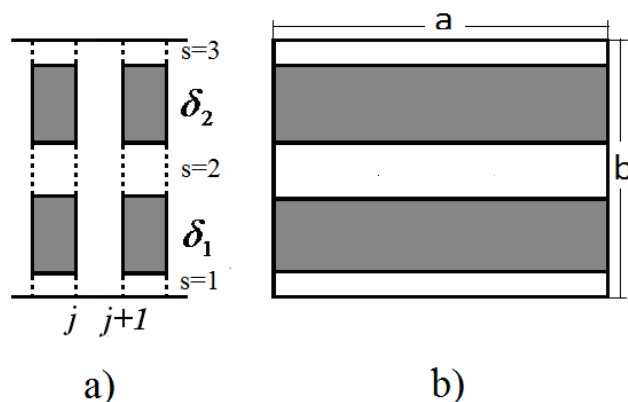


Рис. 1. Ячейка многоззорного резонатора: продольное (а) и поперечное (б) сечения.

Характерной особенностью рассматриваемого резонатора является наличие ребер в сечениях связи между отрезками волноводов. Причем в щелях связи $s=1$ и $s=3$ имеется по одному ребру, а в $s=2$ - два ребра. Наличие ребер в области сопряжения волноводов приводит к необходимости постановки дополнительного условия на входящих ребрах для выделения единственного решения системы уравнений Максвелла, а также к плохой сходимости численных методов в их окрестностях. Это

условие заключается в требовании ограниченности энергии электромагнитного поля, запасенной в любом конечном объеме в окрестности ребра [4].

Одним из возможных методов учета особенности на ребре стыка волноводов является разложение полей по полным системам базисных функций, описывающих особенность нужного вида. В данной работе используется метод, основанный на использовании для этой цели полиномов Гегенбауэра [5], обладающих следующими свойствами [6].

Система полиномов Гегенбауэра $\{C_n^{(\nu)}(z)\}$

$$C_n^{(\nu)}(z) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{\Gamma(n-k+\nu)}{\Gamma(\nu)k!(n-2k)!} (2z)^{n-2k}, \quad (1)$$

$z \in [-1, 1]$, $n = \overline{0, \infty}$ - ортогональна с весом $(1-z^2)^{\nu-1/2}$:

$$\int_{-1}^1 C_n^{(\nu)}(z) C_m^{(\nu)}(z) (1-z^2)^{\nu-1/2} dz = 0, \quad n \neq m, \quad (2)$$

$$\|C_n^{(\nu)}\|^2 = \int_{-1}^1 C_n^{(\nu)}(z) C_n^{(\nu)}(z) (1-z^2)^{\nu-1/2} dz = \frac{2^{1-2\nu} \pi \Gamma(n+2\nu)}{n!(n+\nu)\Gamma(\nu)}, \quad (3)$$

и полна в $L_2([-1, 1])$.

Полиномы Гегенбауэра $C_i^{(\nu)}(z)$ с четными i – четные, с нечетными i – нечетные. Каждая из систем $C_{2i}^{(\nu)}(z)$ и $C_{2i+1}^{(\nu)}(z)$ ортогональна с тем же весом и полны в $L_2([0, 1])$, причем $\|C_i^{(\nu)}\|_{L_2([0, 1])}^2 = \|C_i^{(\nu)}\|_{L_2([-1, 1])}^2 / 2$.

$$\int_0^c (c^2 - z^2)^{\nu-1/2} C_{2i}^{(\nu)}(z/c) \cos(az) dz = \frac{(-1)^i \pi c^\nu \Gamma(2i+2\nu)}{(2i)! \Gamma(\nu) (2a)^\nu} J_{\nu+2i}(ac), \quad (4)$$

$$\int_0^c (c^2 - z^2)^{\nu-1/2} C_{2i+1}^{(\nu)}(z/c) \sin(az) dz = \frac{(-1)^i \pi c^\nu \Gamma(2i+2\nu+1)}{(2i)! \Gamma(\nu) (2a)^\nu} J_{\nu+2i}(ac), \quad (5)$$

где $J_m(u)$ - функция Бесселя 1-го рода,

$$C_n^{(\nu)}(-z) = (-1)^n C_n^{(\nu)}(z).$$

Поперечные компоненты полей в каждом из малых сечений $s=1, 2, 3$ представляется в виде разложения по базису:

$$\mathbf{e}_\perp^{(s)} = \sum_{n=1}^{N_s} w_n^{(es)} \mathbf{g}_n^{(es)}, \quad \mathbf{h}_\perp^{(s)} = \sum_{n=1}^{N_s} w_n^{(hs)} \mathbf{g}_n^{(hs)}. \quad (6)$$

где $\mathbf{g}_n^{(as)} = t_n^{(as)}(x) \Phi_n^{(as)}(y)$, $t_n^{(as)}(x)$ - тригонометрический базис, $\Phi_n^{(as)}(y)$ - полиномы Гегенбауэра, содержащие особенности на ребрах требуемого порядка. Поскольку все рассматриваемые входящие углы – прямые, то порядок особенности в их окрестности составляет $\mathbf{e} \propto \rho^{-1/3}$, ρ - расстояние до ребра.

Для упрощения записи доопределим базисные функции $\mathbf{g}_n^{(es)}$ нулем вне их носителя и объединим в единый базис неодносвязного сечения.

$$\mathbf{e}_\perp = \sum_{n=1}^N w_n^{(e)} \mathbf{g}_n^{(e)}, \quad \mathbf{h}_\perp = \sum_{n=1}^N w_n^{(h)} \mathbf{g}_n^{(h)}. \quad (7)$$

Поле в большем сечении, не содержащем входящие ребра, раскладывается по стандартному базису [7]:

$$\mathbf{E}_\perp = \sum_{n=1}^M W_n^{(e)} \mathbf{G}_n^{(e)}, \quad \mathbf{H}_\perp = \sum_{n=1}^M W_n^{(h)} \mathbf{G}_n^{(h)}. \quad (8)$$

Условие непрерывности в среднем по сечению потока вектора Умова-Пойнтинга

$$([\mathbf{E}_\perp, \mathbf{H}_\perp]) = ([\mathbf{e}_\perp, \mathbf{h}_\perp]), \quad (9)$$

где под скобками здесь и далее понимается интеграл по полному сечению, может быть представлено в виде эквивалентных проекционных соотношений:

$$([\mathbf{E}_\perp - \mathbf{e}_\perp, \mathbf{G}_i^{(h)}]) = 0, \quad i = 1..M, \quad (10)$$

$$([\mathbf{H}_\perp - \mathbf{h}_\perp, \mathbf{g}_j^{(e)}]) = 0, \quad j = 1..N. \quad (11)$$

После подстановки разложений (7, 8) в (10, 11), получим матрицу связи между коэффициентами w и W .

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{(e)} \\ W^{(h)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^{(e)} \\ w^{(h)} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

$$P_{ij} = ([\mathbf{G}_i^{(e)}, \mathbf{G}_j^{(h)}]), \quad Q_{ij} = ([\mathbf{g}_i^{(e)}, \mathbf{G}_j^{(h)}]), \quad R_{ij} = ([\mathbf{g}_i^{(e)}, \mathbf{g}_j^{(h)}]). \quad (13)$$

Отметим, что в силу свойств полиномов Гегенбауэра все матрицы - блочно-диагональные, а все матричные элементы вычисляются аналитически. Обращая матрицы в левой или правой части (12), строится матрица трансформации мод T_\pm .

$$\begin{pmatrix} W^{(e)} \\ W^{(h)} \end{pmatrix} = T_+ \begin{pmatrix} w^{(e)} \\ w^{(h)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} w^{(e)} \\ w^{(h)} \end{pmatrix} = T_- \begin{pmatrix} W^{(e)} \\ W^{(h)} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Таким образом, построена матрица трансформации электромагнитных полей, связывающая амплитуды полей на стыке отрезков прямоугольных волноводов малых размеров и волновода большого размера и учитывающая особенности полей на ребрах.

При определенных геометрических параметрах и большом количестве базисных функций матрицы (13, 14) становятся плохо обусловленными, и для их обращения необходимо использовать специальные методы.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 16-31-60084 мол_а_дк, № 15-01-03524 и № 16-01-00690.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.С. Ильинский, Н.Б. Косич // Радиотехника и электроника, 1974, т. 19, №6, с.1171-1182.
2. А.С. Ильинский, С.В. Трубников, Н.А. Федосеева «Математические модели и оптимизация вычислительных алгоритмов» М.: Изд. Московского Университета, 1993.
3. В.В. Никольский, Т.И. Никольская «Электродинамика и распространение радиоволн» М.: Наука, 1989.
4. А.С. Ильинский, Г.Я. Слепян «Колебания и волны в электродинамических системах с потерями» М.: Изд. Московского университета, 1983.
5. Г.Ф. Заргано и др. «Линии передачи сложных сечений» Ростов-на-Дону: Издательство РГУ, 1983.
6. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик «Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений» М.: ГИФМЛ, 1963.
7. А.Г. Свешников, И.Е. Могилевский «Математические задачи теории дифракции» М.: Физический факультет МГУ, 2010.

Конечномерные Теоремы Отсчетов в моделировании вихрей

Е.Н. Терентьев¹, Н.Е. Терентьев², И.И. Фаршакова¹

¹Физический факультет МГУ

²HiQo Solutions Moscow

en.teren@physics.msu.ru

В основе методов математического моделирования лежат Конечномерные Теоремы Отсчетов (КМТО). КМТО реализуют операции математического анализа, теории поля и интерполяции в математических моделях физических процессов и явлений с точностью (мантиссы) порядка 10^{-14} без применения конечноразностных схем, интегральных сумм и т.п. Реализуются новые схемы защищенных операций. Рассматриваются примеры применения КМТО при моделировании вихревых процессов. КМТО найдут применения в широком круге областей математического моделирования.

КМТО

Известную теорему Котельникова невозможно связать с операциями анализа [1].

Если Обратное Дискретное Преобразование Фурье (ОДПФ) реализовывать через сумму ряда Фурье, а не обращением (симметрией) унитарной матрицы $H^{(0)}(x_0)$, состоящей из базисных Фурье гармоник, то дискретные операции реализуются с помощью Прямого ДПФ и Обратного ДПФ. При ПДПФ (2) вычисляем Фурье коэффициенты. При ОДПФ в сумме ряда Фурье (1) берем базисные заранее продифференцированные, проинтегрированные и оцифрованные с интерполяцией - на более плотном множестве точек $dx < 1$ (1-3). Таким образом ОДПФ дает результат математической операции. В частном случае (когда не реализуем операции) ОДПФ возвращает нам исходные данные [2-4].

Основной результат

Дан 3-х мерный массив отсчетов $D = f(x_0, y_0, z_0)$ в кубе, матрицы Фурье гармоник $H^{(0)}(x_0)$, $x_0 = 0 : N - 1$ и $H^{(n)}(x)$, $x = 0 : dx : N - dx$, тогда непрерывная функция [2-4]

$$f^{(nx, ny, nz)}(x, y, z) = \sum_{k_x k_y k_z = 1}^N c_{k_x k_y k_z} * H^{(nx)}(k_x, x) * H^{(ny)}(k_y, y) * H^{(nz)}(k_z, z) \quad (1)$$

$$c_{k_x k_y k_z} = (f(x_0, y_0, z_0), H^{(0)}(k_x, x_0) * H^{(0)}(k_y, y_0) * H^{(0)}(k_z, z_0)) = \\ = \sum_{x_0, y_0, z_0 = 1}^N f(x_0, y_0, z_0) * H^{(0)}(k_x, x_0) * H^{(0)}(k_y, y_0) * H^{(0)}(k_z, z_0), \quad k_x, k_y, k_z = 1 : N \quad (2)$$

проходит через точки отсчетов $f^{(nx, ny, nz)}(x_0, y_0, z_0)$. Скалярные произведения (2) реализует ПДПФ, а Фурье ряд (1) – ОДПФ с интерполяцией, если $dx < 1$.

Приведем пример записи интерполированного градиента от трехмерного числового массива чисел $D = f(x_0, y_0, z_0)$:

$$\text{grad } D(x, y, z) = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} D, \frac{\partial}{\partial y} D, \frac{\partial}{\partial z} D \right\} = \{ f^{(1,0,0)}(x, y, z), f^{(0,1,0)}(x, y, z), f^{(0,0,1)}(x, y, z) \} \quad (3)$$

На вычисления частных производных в выражении градиента (3) и в ряде для результирующей функции (1) указывают единички в соответствующих местах [2-4].

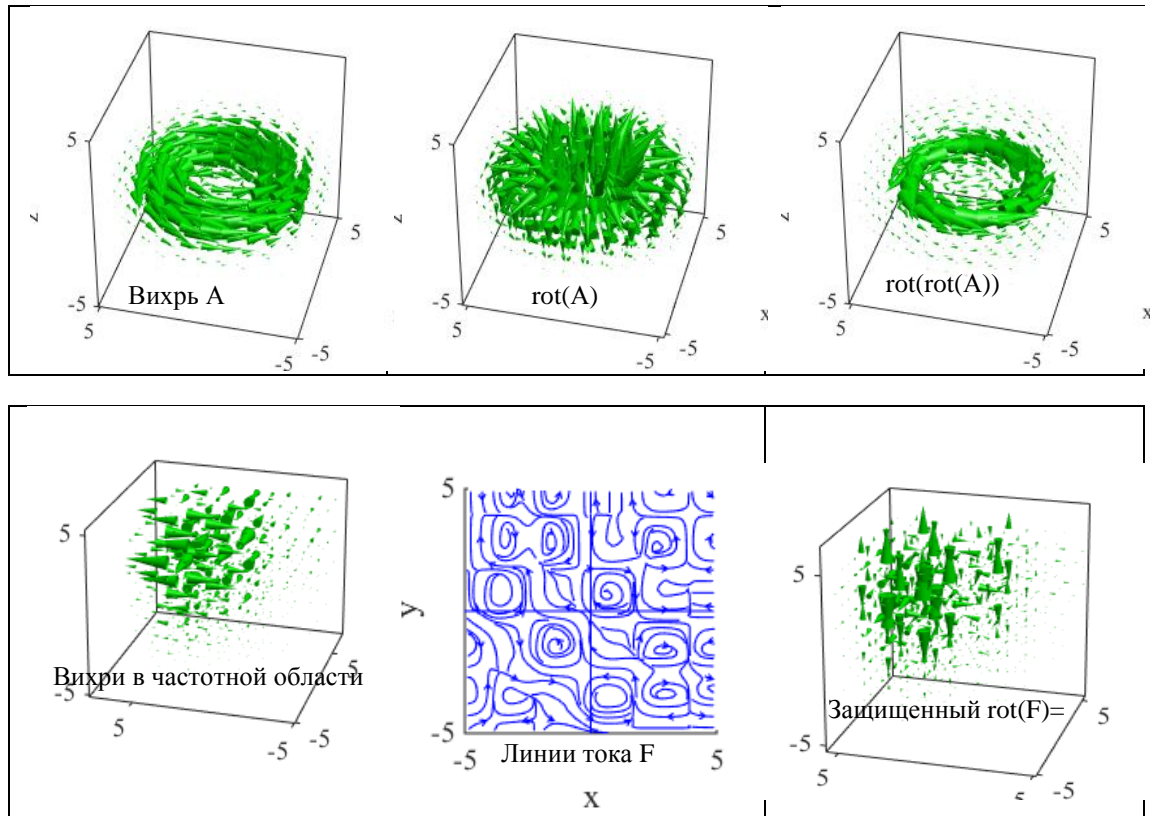


Рис. 1. Роторы и вихри в пространственной и частотной областях

Слабый боковой вихрь

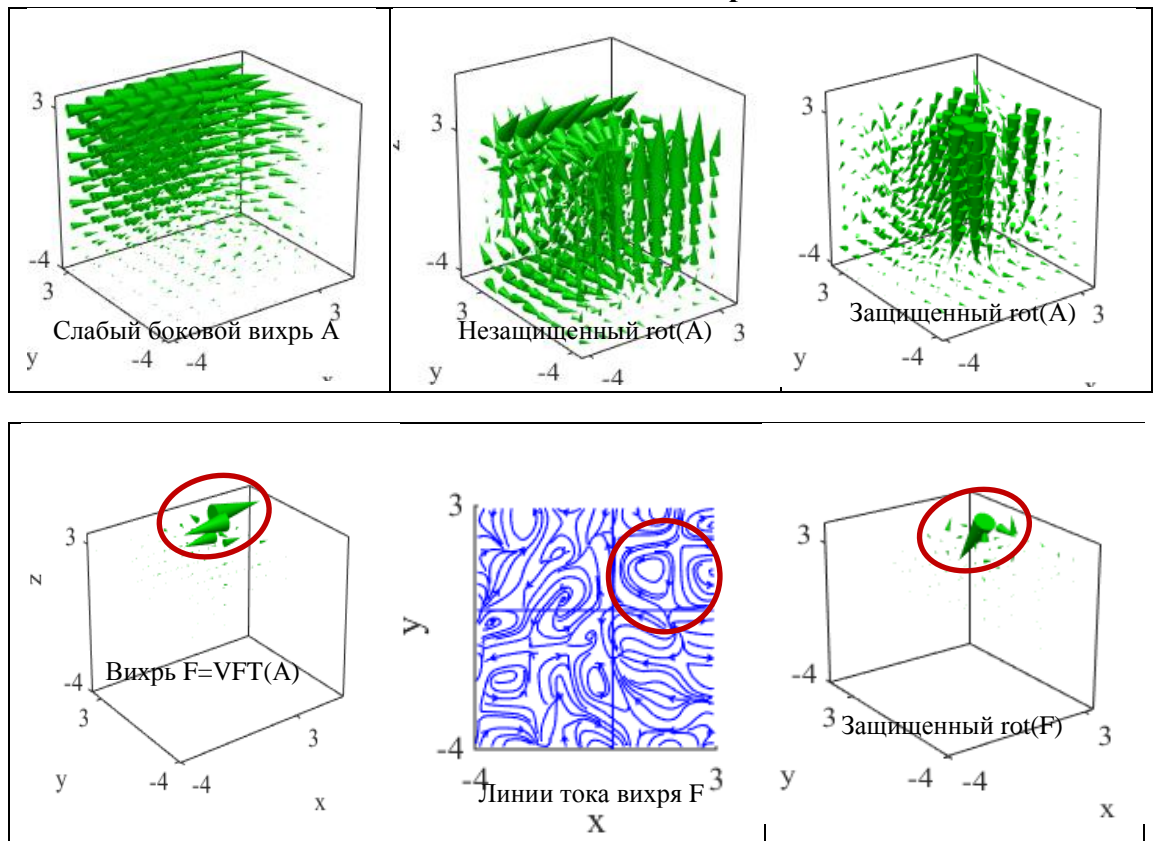


Рис. 2. Большая величина защищенного $\text{rot}(F)$ (большой конус см. Рис. 2) слабого бокового вихря определяется размером вихря.

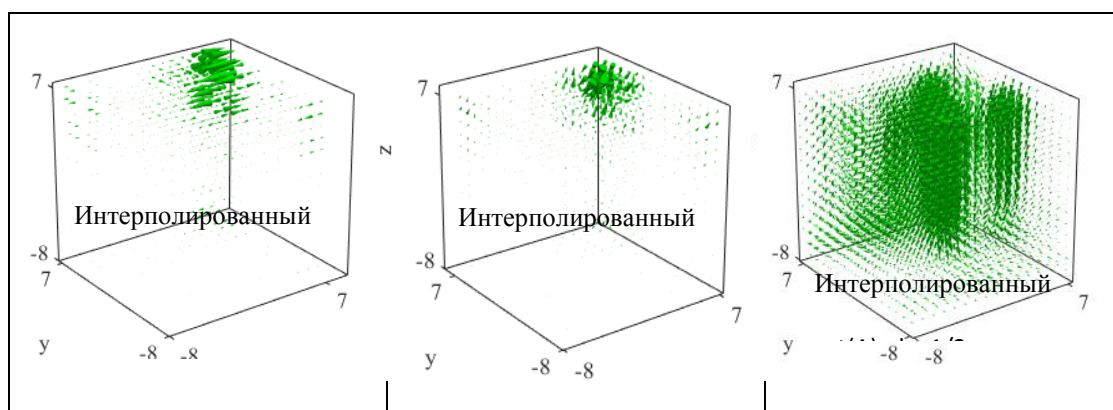


Рис. 3. Примеры использования КМТО при интерполировании.

Моделирование вихрей

В качестве примера рассматриваем кольцевой вихрь A (заданный тремя трехмерными массивами чисел), с помощью КМТО вычисляем $B = \text{rot}(A)$. Получается тороидальный вихрь B . Вычисляем $C = \text{rot}(B) = \text{rot}(\text{rot}(A))$ – кольцевой вихрь. Вычисляем Дискретное Прямое Векторное ПФ – ДПВПФ $D = \text{VFT}(C)$. Визуально убеждаемся, что имеем вихри в частотной области. Окончательно убедимся в этом, если вычислим ротор от векторного ПФ - $\text{rot}(\text{VFT}(\text{rot}(\text{rot}(A))))$, см. Рис. 1. Заметим, что все операции выполняются с точностью порядка 10^{-14} . Подчеркнем, что конечноразностные схемы вычисления частных производных при этом не используются.

У кольцевого и тороидального на Рис. 1 нет граничных эффектов, а у слабого бокового вихря (см. Рис. 2) есть. Поэтому требуется применение ротора в защищенном варианте [2-4].

Обсуждение

КМТО реализуют операции математического анализа, теории поля и интерполяции в математических моделях физических процессов и явлений с точностью мантииссы без применения конечноразностных схем.

КМТО используется при пересчете – интерполировании изображений на другие, как правило, с более мелким шагом $dx < 1$ сетки для реализации предельного сверх разрешения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.А. Кузнецов, И.Н. Сеницын "Развитие теоремы отсчётов Котельникова" // УФН, 179, p. 216–218 (2009)
2. Е.Н. Терентьев, Н.Е. Терентьев // Научная конференция ломоносовские чтения, Секция физики, сборник тезисов доклада, 18-27 апреля 2016 года, с. 124-127, Москва, 2016
3. Е.Н. Терентьев, Н.Е. Терентьев // Процессы в геосредах, стр. 355-362, №4(9), 2016.
4. Е.Н. Терентьев, Н.Е. Терентьев // Труды XX Международного Форума по проблемам науки, техники и образования, с. 11-13, Москва, 2016.

Физические Принципы Настройки и интерполяция в достижении предельного сверх разрешения

Е.Н. Терентьев¹, Н.Е. Терентьев², И.И. Фаршакова¹

¹Физический факультет МГУ

²HiQo Solutions Moscow

en.teren@physics.msu.ru

Предлагаются Физические Принципы Настройки (ФПН) Аппаратных Функций (АФ) приборов по размерам областей определения АФ O . Выбираются такие размеры области определения АФ O , что бы ее обратная разрешающая функция $R=O^{-1}$ на выбранной области имела минимальную норму. Минимум нормы R реализуется путем изменения шага оцифровки dx и изменением длины L_{oc} области определения АФ O . Кроме того мы можем огрублять АФ O до обратимой $pO=pR^{-1}$ путем увеличения ее обусловленности параметром $DIAP$ [2-5]. Множество разных длин L_{oc} областей определения АФ O с разными шагами оцифровки dx и разными параметрами $DIAP$ будем называть “Ложем АФ O ” $LO=(L_{oc}, dx, DIAP)$. Из Ложа LO берем только те АФ pO с $\min \text{Nor}(pR)$, те ФПН приборы или работоспособные приборы. Размеры исходного изображения могут быть любыми.

Обычно прибор способен оцифровывать изображения с определенным шагом. Будем считать этот шаг единичным $dx=1$. С шагом $dx=1$ оцифровывается и АФ O .

Для обращения искажений в идеальном случае прибор должен иметь возможность оцифровывать сигнал с меньшими шагами оцифровки $dx<1$.

Если такой возможности нет, то под меньший шаг $dx<1$ надо пересчитать исходное изображение. Такие пересчитанные или интерполированные изображения получаются с применением Конечномерной Теоремы Отсчетов (КМТО) [1]. В данном сборнике КМТО приводится в связи с высокоточным моделированием и интерполированием результатов операций теории поля.

В данной работе мы ограничились $dx=1/6, 1/20$, так что бы можно было бы образно говорить, что пиксел “разломали” на $(1/dx, 1/dx)$ частей. Не исследована область $1/2<dx<1$, где ожидаются ФПН без использования обусловленности $DIAP$.

До конца 2016 года мы в постановках задач компенсации искажений АФ O с $dx=1$ настраивали под размер изображения, размер изображения меняли специальными областями Windows нейтрализации и делали четное продолжение на тор, чтобы подавить граничные эффекты. При этом сохраняли возможность использования Преобразования Фурье (ПФ). В новой схеме сверх разрешения с интерполяцией использовать ПФ не всегда возможно.

Проще настраивать в пределах Ложа LO : малых размеров областей определения АФ O . От применения ПФ к решению задачи компенсации искажений АФ O по всему изображению – отказались. Объемы вычислений резко возросли, так как интерполяция по КМТО в пределах пиксела оказалась затратной из-за невозможности использования ДПФ из-за граничных эффектов. Искажения компенсируются по точкам сетки $(1/dx, 1/dx)$ внутри пикселей исходного изображения.

Постановка задачи

Основная задача по выбору АФ $pO=pR^{-1}$ ставится как задача на минимум:

$$\min_{LO} \{ \|pR\| \mid \|pO - O\| \leq err \}, \quad LO = \{L_{oc}, dx, DIAP\} \quad (1)$$

В постановке задачи (1) множество LO – Ложа АФ О содержит: Lос – множество длин областей определений, dx – множество шагов оцифровки АФ О и исходных данных прибора и множество настроек обусловленности DIAP для АФ рО [2-5].

Пример предельного сверх разрешения с интерполяцией

В примере ниже по сути реализовано разрешение внутри пиксела исходного изображения.

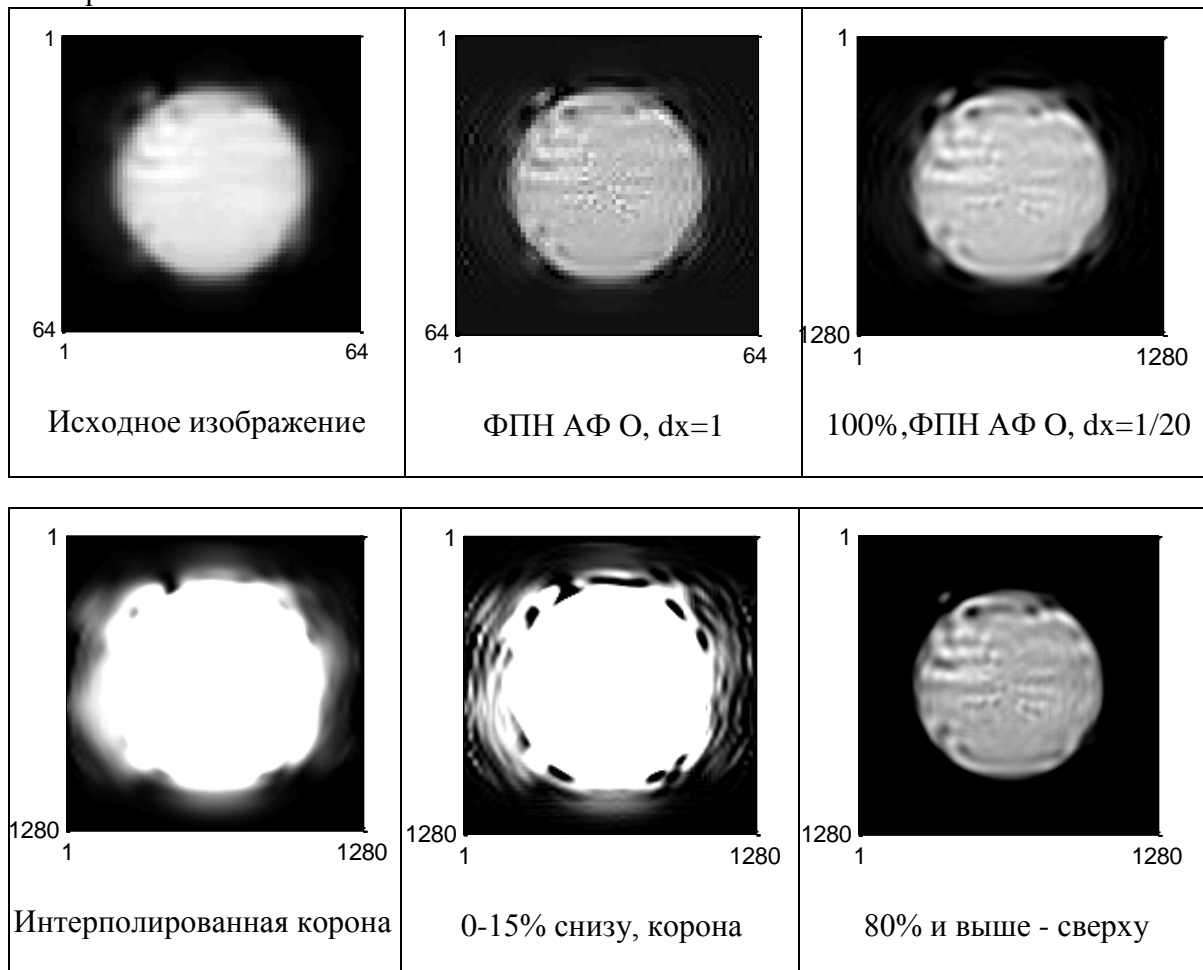


Рис. 1 Изображение с dx=1/6 не приводится, т.к. очень близко к изображению с dx=1/20.

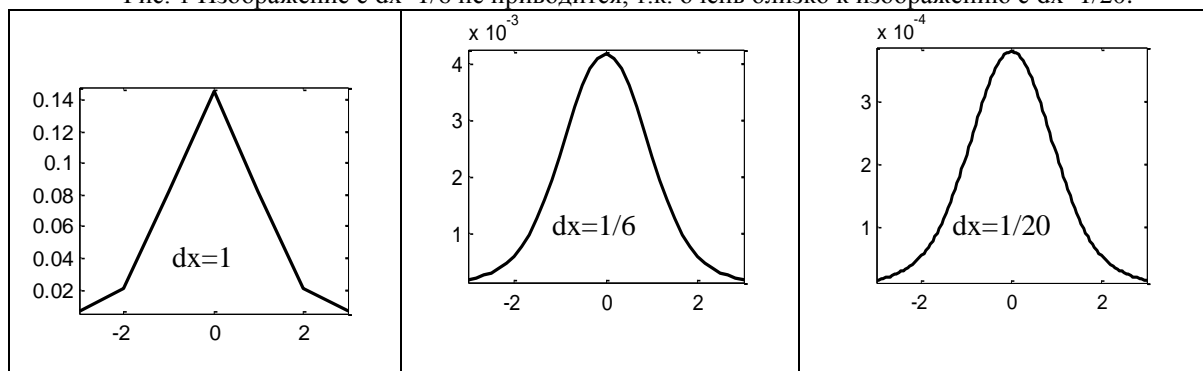


Рис. 2. Примеры оцифровок АФ О с Lос=6 соответствует отрезку области определения [-3,3] и на графиках Рис. 4 соответствует первой левой точке.

Характеристики ложа LO

Ниже приводятся две характеристики LO: реакции на шум $\text{Nor}(zR)$, $\text{Nor}(pR)$ и значения индикаторов обратимости $\Pi(zR^*O)$, $\Pi(pR^*O)$ [2-5] в зависимости от Lос и dx.

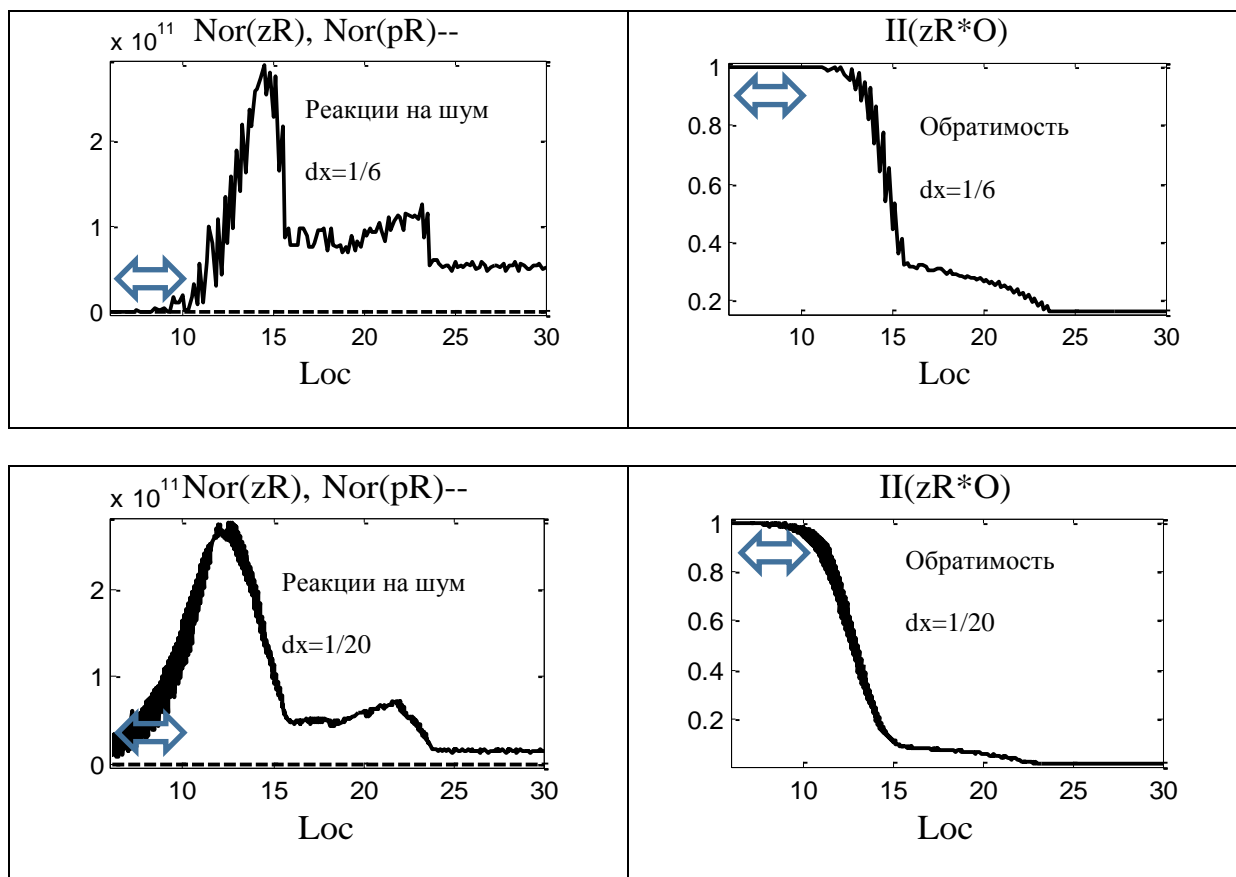


Рис. 3 Характеристики LO: Loc=6:30, dx=1/6 и 1/20.

Обсуждение

Можно говорить, что дискретная АФ O реально существует только в части ложа LO см. стрелки Loc от 6 до 10 в левых графиках на Рис. 3.

Дальше Loc=10 обращения через zR не реальны из-за слишком высоких $Nor(zR)$, а после Loc=15 понятие разрешающей zR теряет смысл по обратимости.

Во всех случаях управляемая АФ $pO=pR^{-1}$ через обусловленность $DIAP=10$ дает нам разрешающую pR с $Nor(pR)$ порядка $\sim 5-15$. А в этом вся суть проблемы ФПН и объяснение того факта что изображения предельного сверх разрешения на сетках с $dx=1/6$ и $1/20$ близки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е.Н. Терентьев, Н.Е. Терентьев // Труды XX Международного Форума по проблемам науки, техники и образования, с. 13-14, Москва, 2016, ISBN 978-5-93411-057-5.
2. Е.Н. Терентьев, Н.Е. Терентьев // Процессы в геосредах, стр. 355-362, №4(9), 2016.
3. Е.Н. Терентьев, Н.Е. Терентьев // Известия РАН, серия физическая, 2015, том 79, № 12, с. 1633-1637.
4. E.N. Terentiev and N.E. Terentiev, // Bulletin of the Russian Academy of Science. Physics, 2015, Vol.79, No 12, pp.1427-1431, ISSN 1062-8738, DOI 10.3103/S1062873815120229
5. Е.Н. Терентьев, Н.Е. Терентьев // Процессы в геосредах, стр. 92-98, №4(4), 2015.