

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ И ТЕЧЕНИЯ

Ветровые волны: генерация, динамика, трансформация

Г.И. Долгих 2

Особенности развития термобара и течений в глубоком водоеме весной

Н.С. Блохина, Д.И. Селин 3

Исследование эволюции длинной синусоидальной волны в рамках уравнения Гарднера

Е.А. Рувинская, О.Е. Куркина, А.А. Куркин, А.Р. Гиниятуллин 8

Уравнение Гарднера в слабодисперсионном пределе: эволюция импульса с полярностью, противоположной знаку квадратичной нелинейности

Е.А. Рувинская, О.Е. Куркина, А.А. Куркин, А.Р. Гиниятуллин 12

Внутренние волны и их влияние на распределение хлорофилла-а в заливе

Б.И. Самолюбов, И.Н. Иванова 16

Дипольное электромагнитное излучение незаряженной каплей, осциллирующей в однородном электростатическом поле

Н.Ю. Колбнева, С.О. Ширяева 20

О волновых движениях в двухслойной жидкости с поверхностно-активным веществом и поверхностным электрическим зарядом на верхней границе

А.В. Кондратьева, Д.Ф. Белоножко 23

Генерация ветровых волн вихрями в тормозящихся потоках воздуха

О.Н. Мельникова, К.В. Показеев, М.Н. Шабров 26

О поведении жидких частиц, участвующих в волновом движении границы раздела двух движущихся несмешивающихся жидкостей

Д.Ф. Белоножко, А.А. Очиров 30

О нелинейных поправках к частотам волн на поверхности заряженной струи, движущейся относительно внешней материальной среды

Н.А. Петрушов 34

О пространственной неустойчивости заряженной струи, движущейся относительно внешней материальной среды

Н.А. Петрушов 38

«Волны — убийцы» в морях, океанах и на берегу

Н.К. Шелковников 40

Ветровые волны: генерация, динамика, трансформация

Г.И. Долгих

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичёва
Дальневосточного отделения Российской академии наук
dolgikh@poi.dvo.ru

В начальной части доклада рассматриваются классические представления вопросов генерации, динамики и трансформации морских ветровых волн в условиях глубокого и мелкого моря. Рассматривается начальное уравнение движения, которое затем упрощается до момента возможности его аналитического решения. Приводятся стандартные решения поставленных задач. Всё заканчивается стандартным дисперсионным уравнением. Полученные классические выводы проверяются на большом массиве экспериментальных данных. Делается вывод о невозможности применения результатов классических решений к описанию натуральных экспериментальных данных.

В ходе анализа многочисленных экспериментальных данных, полученных при регистрации морских ветровых волн лазерными измерителями вариаций давления гидросферы, установленными в различных точках шельфа Японского моря, выявлено, что периоды ветровых волн (зыбь) в точках наблюдений изменяются по закону

$$T(t) = K^* \times \frac{\Delta T}{\Delta t} \times t + T_0$$
, где $K^* = -2.753 \times 10^{-4}$, Δt - длительность участка в часах, ΔT –

изменение периода на всем участке, T_0 – период в начальный момент времени t_0 выбранного участка. Выведенное эмпирическое уравнение изменения периодов ветровых волн в точке регистрации позволяет вычислить период ветровых волн в любом направлении временной шкалы.

Кроме того, установлено, что по мере распространения по шельфу монотонно убывающей глубины ветровая волна при взаимодействии с дном теряет часть своей энергии (передает дну), что приводит к трансформации её спектра, и энергия в нём перераспределяется в более высокочастотную область. Величины данных изменений зависят не только от длин ветровых волн и степени уменьшения глубины, но и от их амплитуд. Процент изменения периодов ветрового волнения варьируется, так как в разные промежутки времени кроме ветрового волнения в анализируемом диапазоне частот присутствуют другие возмущения атмосферного и гидросферного происхождения, что влияет на точность определения основного периода ветрового волнения. Тем не менее, при распространении ветровых волн по исследуемому участку средний процент изменения периодов ветрового волнения в диапазоне 5-6 с составляет около 6%, а средний процент изменения периодов ветрового волнения в диапазоне 6-7 с составляет около 7%. Понятно, что данное изменение периодов ветрового волнения связано не только с длиной ветровой волны, но и с её амплитудой. Данные результаты противоречат классическим представлениям и указывают на сильное нелинейное поведение ветровых волн, распространяющихся по шельфу убывающей глубины.

В заключении выводится уравнение на основе полученных экспериментальных данных, учитывающих пространственно-временное изменение периодов и амплитуд ветровых волн при их движении по наклонному шельфу.

Особенности развития термобара и течений в глубоком водоеме весной

Н.С. Блохина, Д.И. Селин

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, физический факультет, кафедра физики моря и вод суши. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

blokhinans@gmail.com

В период весеннего прогрева или осеннего охлаждения в пресных и слабосоленых водоемах формируется термобар (ТБ) - зона фронтального раздела с температурой 4°C (в пресных водоемах) от поверхности до дна, где сходятся прибрежные и глубинные воды. 4°C – это температура, при которой вода имеет максимальную плотность. Достигая ее, поверхностные воды становятся наиболее плотными и опускаются ко дну водоема, формируя термобар. Ограничивая обмен между прибрежными и глубинными водами, он оказывает огромное влияние на тепловые и динамические процессы в водоеме, его экологическое состояние, распределение минеральных веществ, планктона и др..

Явление термобара развивается в водоемах при различных гидрометеорологических условиях. Особый интерес представляет исследование формирования термобара в водоемах еще полностью не освободившихся ото льда, так как такая ситуация типична весной в озерах северных широт [1,2]. Настоящая работа посвящена изучению особенностей развития термобара и течений в глубоких водоемах в период таяния ледового покрова в условиях наличия и отсутствия воздействия ветра на его поверхность. Она является продолжением исследований [3-5].

Рассматриваются термогидродинамические процессы в водоеме с наклонным дном глубиной $H = 50$ м и длиной $L = 750$ м (половина водоема) (Рис.1). Движение в нем описывается нелинейной системой уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска, уравнением теплопроводности и уравнением состояния пресной воды, учитывающим наличие максимума плотности в районе температуры 4°C. Центральная часть водоема свободна ото льда или им покрыта (толщина $H_i = 1$ см, длина $L_i = 50$ м). Процесс его таяния описывается уравнением баланса льда. Верхняя граница льда нагревается за счет потока тепла от солнца $Q_R = 450$ Вт/м², а остужается за счет длинноволнового излучения. К нижней и правой кромкам льда поступают потоки тепла от воды. На границу раздела вода-атмосфера поступает радиационный поток Q_R . Вычисляются потоки длинноволнового излучения (охлаждают водную поверхность), потоки явного и скрытого тепла (в зависимости от метеорологических условий могут, как нагревать, так и охлаждать поверхность водоема). На дне водоема и боковой границе ставятся условия прилипания и непротекания для скорости и отсутствие теплового потока. Подо льдом задаются те же условия для скоростей и нулевое значение температуры. На поверхности водоема, свободной ото льда учитывается напряжение трения ветра и условие непротекания для скорости.

Расчеты проводились для водоема свободного ото льда (а) и частично им покрытого в начальный момент времени (б). Начальные поля распределения температуры (T), функции тока (Ψ) и поле вихря (φ) были заданы одинаковыми. В случае (б) в центральной части водоема присутствовало ледовое покрытие. Температура атмосферы принималась равной $T_a = 8^\circ\text{C}$, относительная влажность воздуха $f = 60\%$. Скорость ветра V изменялась от 1 до 13 м/с. Задача решалась численно на сетке 16x75.

Расчеты показали [3], что в первые часы прогрева водоема месторасположение термобара в этих двух случаях остается одинаковым (Рис.1а, 1б; $t=1.25$ ч).

Распределение изотерм в прибрежной области водоема схоже. Отличие лишь в их наклоне. Ближе к центру водоема (случай б) наблюдается значительный градиент температуры по горизонтали. Здесь внутри антициклонического вихря, охватывающего водоем от центра до термобара, около кромки льда существует интенсивный глубинный вихрь (ИГВ). По мере прогрева водоема в случае (а) термобар постепенно перемещался к его центру и исчезал при достижении температуры поверхностных вод больше 4°C (Рис. 1а).

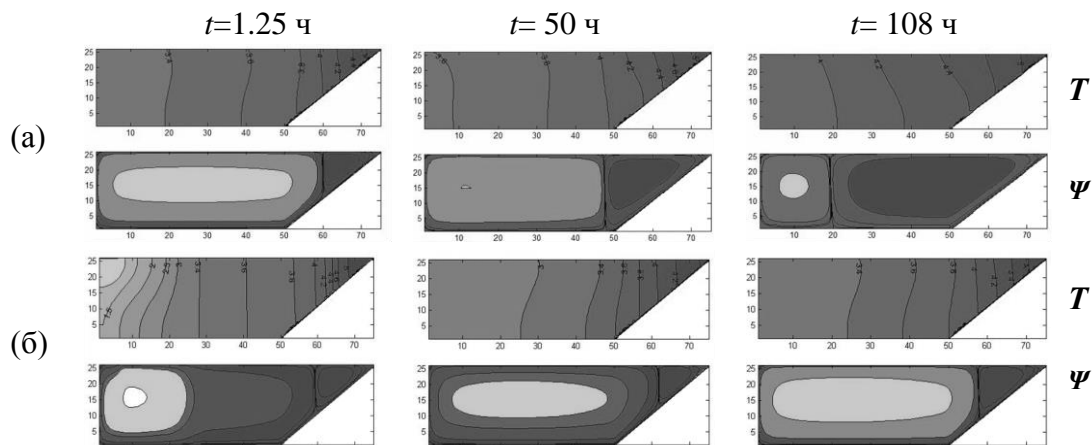


Рис.1 Поля распределения температуры (T) и функции тока (Ψ) в разные моменты времени (t) после начала прогрева водоема. Водоем свободен ото льда (а) и покрыт льдом в центральной части (б) в начальный момент времени.

В случае водоема, частично покрытого льдом (Рис.1б), картина развития термобара и формирования течений в нем по мере прогрева водоема отлична от случая (а) и зависит от интенсивности и размера ИГВ. Наблюдается несколько стадий перемещения термобара. 1. До момента таяния ледового покрова ТБ распространяется к центру водоема. 2. После таяния льда, происходит его остановка и смена направления перемещения от центра к берегу. 3. Остановка распространения ТБ и возобновление его перемещения к центру водоема. Наши оценки показали, что термобар проходит весь водоем от начального его месторасположения в случае (а) примерно за 5.5 суток, а в случае (б) – за 9.5 суток. Образовавшийся у кромки льда интенсивный глубинный вихрь почти в два раза увеличивает время существования ТБ в водоеме.

Такое развитие ТБ в период таяния льда объясняется наличием у воды максимума плотности при 4°C (Рис.2а). От 0°C до 4°C плотность воды увеличивается, а от 4°C до 8°C уменьшается по одинаковому закону. Таким образом, при 0°C и 8°C, 1°C и 7°C и т.д. плотность одинакова. В этом интервале температур увеличение плотности воды с изменением температуры происходит тем быстрее, чем дальше ее значение от 4°C.

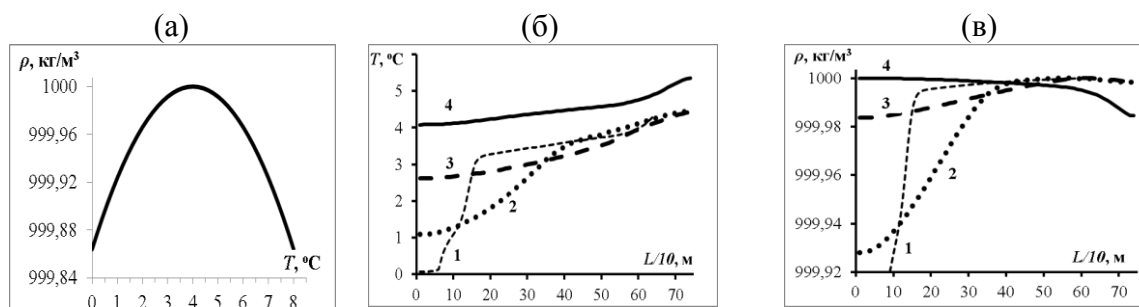


Рис. 2. (а) - зависимость плотности воды ρ от температуры T в районе 4°C. (б) - распределение температуры T и (в) - плотности воды ρ по поверхности водоема в различные моменты времени t после начала прогрева водоема. 1 - $t=0.22$ час; 2 - $t=5.7$ час; 3 - $t=44$ час; 4 - $t=216$ час.

Прогрев водоема приводит к тому, что поверхностные воды становятся теплее (Рис.2б). Когда на поверхности водоема лед еще полностью не растаял (Рис.2б, 1), резко увеличивается температура в освободившейся ото льда воде. Так же резко наблюдается увеличение ее плотности в этой области водоема (Рис.2в, 1). Справа от кромки льда вплоть до ТБ в последующие моменты времени в одних и тех же местах температура воды увеличивается, но еще не достигает 4°C. При этом, чем выше её температура (до 4°C), тем больше и её плотность (Рис.2в). Это приводит к опусканию поверхностных вод ко дну, что увеличивает интенсивность и размер ИГВ. В диапазоне наблюдаемых температур увеличивается и интенсивность прибрежной циркуляции. В это время ИГВ еще находится далеко от ТБ и его влияние на прибрежную циркуляцию мало. При этом термобар перемещается к центру водоема (первая стадия развития ТБ).

После таяния льда (Рис.2б, 2) вся поверхность воды слева от термобара начинает прогреваться, что приводит к увеличению неустойчивости воды в глубинной части водоема на большей площади. В этот период времени увеличение температуры поверхностных вод происходит медленнее. Слева от ТБ ее значение увеличивается, приближаясь к 4°C (плотность воды увеличивается), а справа от него температура воды все больше превышает 4°C (плотность уменьшается) (Рис.2в, 2). Вследствие этого размер и интенсивность прибрежного вихря увеличиваются медленнее, чем глубинного, что способствует еще большему увеличению интенсивности конвективного вихря слева от ТБ. Этот глубинный вихрь «запирает» и даже вытесняет прибрежную циркуляцию к берегу. (Рис.1б, $t=50$ час) (вторая стадия развития ТБ).

Ситуация меняется, когда в результате прогрева водоема в прибрежной области формируются более неустойчивые слои жидкости, чем в глубинной (Рис.2б,в, 3). Прибрежный вихрь начинает увеличиваться в размере, постепенно захватывая глубинные воды, что изменяет направление движения термобара (Рис.1б, $t=108$ ч) (третья стадия развития ТБ). Термическое состояние водоема забывает свое первоначальное состояние и дальнейшее распространение термобара соответствует ситуации (Рис.1а), когда лед первоначально отсутствовал на поверхности воды.

Исследование влияния ветра на формирование течений весной в период таяния ледового покрова проводилось для двух его направлений – к берегу и от берега.

При ветре, направленном к берегу, поглощение прибрежной циркуляции глубинной происходит приблизительно одинаковым образом в двух случаях: при большой скорости ветра и небольшом времени его воздействии на водную гладь (Рис.3а) или наоборот (Рис.3б). В первом случае на его исчезновение большее влияние оказывает дрейфовое течение. Во втором – длительность прогрева водоема. Как было показано выше, в этом случае из-за аномального свойства пресной воды происходит увеличение ИГВ. Приближаясь к берегу, он подавляет прибрежный вихрь.

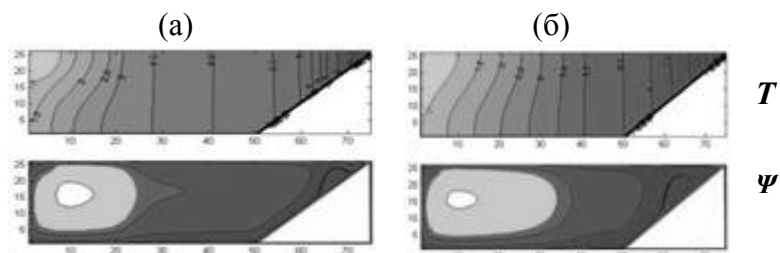


Рис.3. Поля распределения температуры (T) и функции тока (Ψ) при: (а) - $V=7$ м/с, $t=1$ ч; (б) - $V=3$ м/с, $t=6$ ч.

В случае ветра, направленного от берега, при одинаковой его продолжительности и увеличении скорости увеличивается и скорость перемещения

зоны схождения вихрей к центру водоема. Это вполне естественно, так как и ветровое воздействие, и прогрев водоёма способствуют перемещению прибрежной циркуляции от берега. Интерес представляет сравнение результатов расчётов для одинаковой скорости ветра и разных времён его воздействия на водоем (Рис.4). Во временном интервале расчетов, представленных на этом рисунке, показано, что чем дольше дует ветер, тем медленнее перемещается прибрежный вихрь в центральную область водоёма. Как и в случае отсутствия ветрового воздействия, объясняется это аномальными свойствами воды при температуре 4°C. При этом следует учитывать, что с изменением скорости ветра меняется энергообмен между водоемом и атмосферой. При рассмотренной гидрометеорологической ситуации с одной стороны увеличивается поток скрытого тепла из водоема за счет испарений (в большей степени в теплой прибрежной области). С другой стороны, увеличивается поток явного тепла, направленный в водоем (в большей степени в холодной центральной части водоема). Это изменяет температуру поверхностных вод, а, следовательно, поток длинноволнового излучения, который способствует охлаждению водоема. Совместное действие этих факторов приводит к более быстрому прогреву глубинных вод и медленному - прибрежных. В этой ситуации увеличивается неустойчивость водных масс слева от ТБ в большей степени, чем у берега. Это замедляет развитие прибрежной циркуляции. Со временем ситуация меняется. Длительный прогрев водоема за счет потока солнечной радиации изменяет как температуру поверхности воды, так и энергообмен между водоемом и атмосферой. Постепенно температура поверхностных вод становится такой, что большую неустойчивость приобретают воды вблизи берега и прибрежная циркуляция начинает перемещаться к центру водоема.

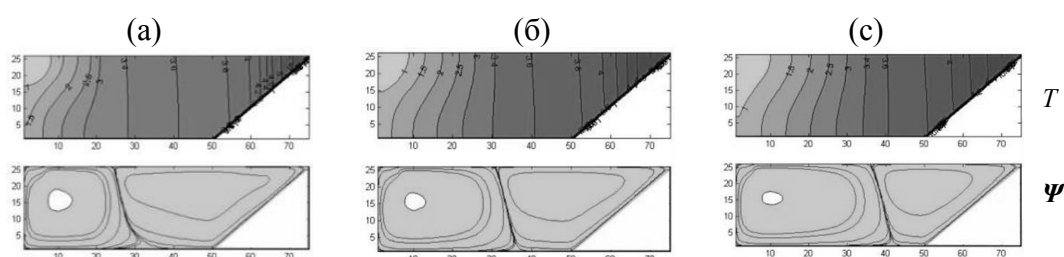


Рис.4. Поля распределения температуры (T) и функции тока (Ψ) при $V=5$ м/с через (а) - $t=1$ ч, (б) - $t=3$ ч, (с) - $t=6$ ч после начала расчетов.

Проведенные исследования показали, что развитие термобара и течений в пресных водоемах весной существенным образом зависит от ледовой обстановки и воздействия ветра на водную поверхность. Наличие у воды температуры, при которой ее плотность максимальна, приводит к двум гидродинамическим эффектам. С одной стороны, наблюдается усиление прибрежной циркуляции из-за прогрева прибрежных вод до температуры максимальной плотности воды и перемещение термобара от берега. С другой стороны, это же аномальное свойство воды способствует формированию интенсивного глубинного вихря около кромки льда и его усилению по мере прогрева водоема и таяния льда. Это приводит к торможению перемещения термобара к центру водоема и даже к изменению направления его движения, что ослабевает интенсивность перемешивания прибрежных вод. Направление ветра, его длительность и сила существенным образом изменяют формирование течений, сопутствующих развитию термобара весной.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 14-05-00822, 15-01-6363).

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Salonen, M.Pulkkanen, P. Salmi, R.W. Griffiths. // *Limnol.Oceanogr.* 2014. V.59. No 6. P. 2121.
2. P. Salmi, K. Salonen. // *Limnol.Oceanogr.* 2016. V.61. No1. P.240.
3. Блохина Н.С., Орданович А.Е. // *Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия.* 2012. № 1. С. 113. doi: 10.3103/S0027134912010031.
4. Блохина Н.С. // *Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия.* 2013. № 4. С. 59. doi: 10.3103/S0027134913040048.
5. Блохина Н.С. // *Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия.* 2015. № 4. С. 102. doi: 10.3103/S0027134915040050.

Исследование эволюции длинной синусоидальной волны в рамках уравнения Гарднера

Е.А. Рувинская, О.Е. Куркина, А.А. Куркин, А.Р. Гиниятуллин
Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
aakurkin@gmail.com

В настоящей работе рассматривается процесс эволюции длинной синусоидальной волны в рамках безразмерного уравнения Гарднера с различными знаками коэффициента кубической нелинейности. Прикладной интерес к этой задаче связан с тем, что интенсивные волнообразные боры, часто наблюдающиеся в устьях и эстуариях рек, обязаны своим появлением дегенерации длинной приливной волны. Такие боры встречаются и в шельфовой зоне океанов во время цунами. Иногда волнообразные боры называют солиборами [1], поскольку в процессе их эволюции на укрупненном фронте генерируется последовательность солитонов. Хотя первоначально термин «солибор» был связан с дегенерацией внутренних приливных волн на океанском шельфе, подобные явления характерны и для озер [2]. С точки зрения практических приложений изучение солиборов, заключающих в себе огромную энергию, важно, поскольку они являются одним из основных источников транспорта наносов, ресуспендирования, способствуют турбулентному перемешиванию в толще воды, а также существенно влияют на распространения звука в толще воды и на формирование придонного звукового канала. Еще одним интересным аспектом при изучении солиборов является тот факт, что при определенных условиях в процессе их эволюции могут генерироваться импульсы экстремальной амплитуды.

Для исследования дегенерации длинной синусоидальной волны в общем случае использовалась каноническая форма уравнения Гарднера с положительным или отрицательным коэффициентом кубической нелинейности

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + 6\eta(1 \pm \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0, \quad (1)$$

для которого решалась начальная задача с периодическими граничными условиями:

$$\eta(x, 0) = A \cos\left(\frac{2\pi}{L} x\right), \quad \eta(x + L, t) = \eta(x, t), \quad (2)$$

где L – длина расчетной области, а амплитуда волны A варьировалась от 0.1 до 3 безразмерных единиц.

Для решения задачи (1), (2) использовался численный код, основанный на неявном псевдо-спектральном методе [3], который позволяет сохранять интегралы, определенные формулами (в рамках численной задачи пределами интегрирования служат границы расчетной области):

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \eta dx, \quad E = \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 dx. \quad (3)$$

Используемый численный код неоднократно верифицировался при моделировании волновых процессов различной природы (см., например, [4; 5]).

При малых амплитудах гармонической волны (2), например, при $A = 0.1$ безразмерных единиц (предельная амплитуда гарднеровского солитона составляет одну безразмерную единицу) сценарий ее эволюции как в случае отрицательного, так и в случае положительного параметра кубической нелинейности, одинаков и имеет много

общих особенностей с процессом дегенерации такого начального возмущения в рамках уравнения Кортевега-де Вриза [6; 7]. С течением времени один из фронтов укручается, и на нем генерируются кноидальные волны переменной, убывающей по линейному закону, амплитуды. Эти волны взаимодействуют между собой в силу периодичности граничного условия. При этом наблюдается отрицательный «сдвиг фазы», как и в случае двух-солитонного взаимодействия типа обгон, но амплитуда результирующего импульса в сам момент столкновения меньше, чем амплитуда кноидальной волны с большей амплитудой. Спектры Фурье для моментов времени, когда еще не началось активное взаимодействие генерируемых волн, имеют асимптотику $k^{-4/3}$ (где k – волновое число) для порядка двадцати первых гармоник, что является общей чертой для нелинейных гиперболических систем со слабой дисперсией. Более подробно процесс эволюции синусоидальных волн малой амплитуды проанализирован в работе [8].

При увеличении амплитуды до 0.5 безразмерных единиц эффект влияния кубической нелинейности на волновую динамику становится существенным. Так, при отрицательном кубическом члене сдвигается точка «опрокидывания», генерируется один «широкий» гарднеровский солитон и группа малоамплитудных солитообразных волн, которые «пробегают» по его вершине (этот процесс продемонстрирован в работе [8]).

При положительном значении коэффициента кубической нелинейности и достижении амплитуды $A = 1.5$ появляется вторая точка «опрокидывания», и генерируются импульсы как положительной, так и отрицательной полярности [8]. Этот случай интересен тем, что при взаимодействии волн противоположных полярностей происходит увеличение максимальной амплитуды результирующего поля.

Поэтому для изучения возможных механизмов генерации волн экстремальных амплитуд в рамках канонического уравнения Гарднера с положительным коэффициентом кубической нелинейности был выбран синусоидальный импульс достаточно большой длины (такой, чтобы генерировалось порядка ста солитонов) с амплитудой $A = 3$ безразмерным единицам. В этом случае акцент ставился не на изучении самого процесса дегенерации синусоидальной волны, а на исследование возникающих волновых режимов в долгосрочной перспективе.

На рис. 1 представлен процесс образования волнового поля, являющегося результатом взаимодействия ансамбля солитонов положительной и отрицательной полярности. Для этого поля выполнен статистический анализ, а именно: построены функции вероятности превышения уровня для высот волн (рис. 2) и вычислены значения асимметрии и эксцесса (рис. 3) для всех моментов времени, проведено сравнение с известными статистическими законами распределения на основе полученных гистограмм.

Из графика функции вероятности превышения уровня видно, что после момента времени $t=1.5$, когда начинаются парные взаимодействия солитонов положительной и отрицательной полярности, возникают существенные «выбросы», амплитуды которых более, чем в четыре раза превышают амплитуду начального возмущения. Графики асимметрии и эксцесса также характеризуются наличием «пиков» в зонах выбросов. Таким образом, дегенерация длинной синусоидальной волны с амплитудой, достаточной для генерации солитонов положительной и отрицательной полярности, в природных условиях, соответствующих уравнению Гарднера с положительным коэффициентом кубической нелинейности может являться важным механизмом генерации аномально высоких волн.

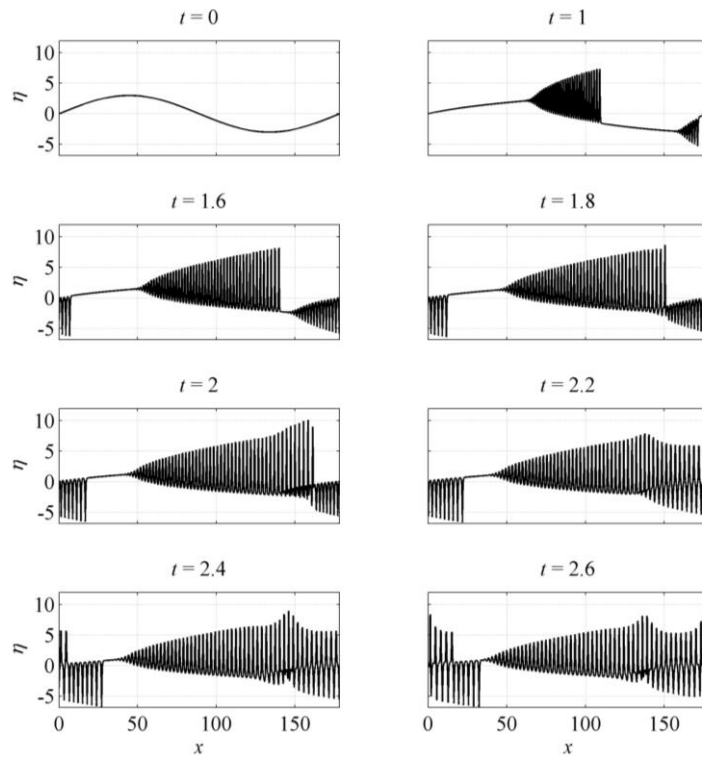


Рис.1. Эволюция синусоидального импульса с амплитудой 3 безразмерные единицы в рамках канонического уравнения Гарднера с положительным коэффициентом кубической нелинейности

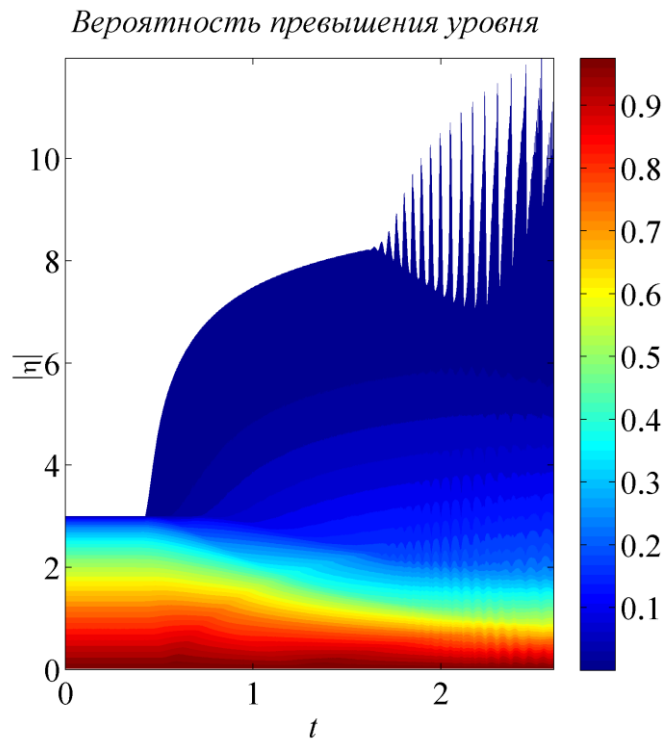


Рис.2. Вероятность превышения уровня для разных моментов времени при эволюции синусоидального импульса с амплитудой 3 безразмерные единицы в рамках канонического уравнения Гарднера с положительным коэффициентом кубической нелинейности

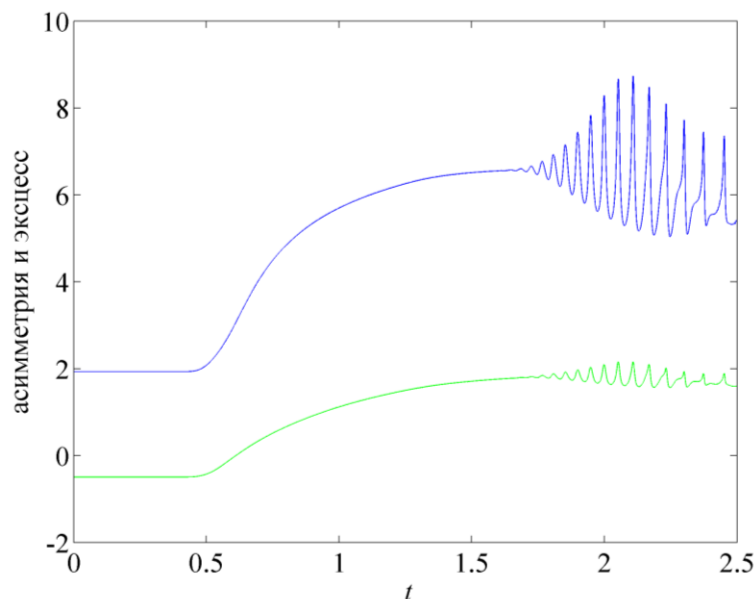


Рис.3. Асимметрия (зеленая линия) и эксцесс (синяя линия) для разных моментов времени при эволюции синусоидального импульса с амплитудой 3 безразмерные единицы в рамках канонического уравнения Гарднера с положительным коэффициентом кубической нелинейности

Представленные результаты научно-исследовательской работы получены при поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых (МК-5208.2016.5).

ЛИТЕРАТУРА

1. J.R. Apel // J. Phys. Oceanogr. 2003. V. 33. P. 2247.
2. K. Hutter “Nonlinear Internal Waves in Lakes” Springer, 2012.
3. B.A Fornberg “Practical Guide to Pseudospectral Methods” Cambridge University Press, 1998.
4. А.А. Куркин, О.Е. Полухина // Известия Академии инженерных наук РФ. Прикладная математика и механика 2003. Т. 4. С. 99.
5. E. Pelinovsky et al. Chapter 4 in the book “Solitary Waves in Fluids” Boston: WIT Press. Southampton, 2007.
6. A. Salupere et al. // Chaos, Solitons and Fractals 2002. V. 14. P.1413.
7. A. Salupere et al. // Chaos, Solitons and Fractals 2003. V. 15. P.29.
8. О.Е. Kurkina et al. // Physica D: Nonlinear Phenomena 2015. doi:10.1016/j.physd.2015.12.007.

Уравнение Гарднера в слабодисперсионном пределе: эволюция импульса с полярностью, противоположной знаку квадратичной нелинейности

Е.А. Рувинская, О.Е. Куркина, А.А. Куркин, А.Р. Гиниятуллин
Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
aakurkin@gmail.com

Уравнение Гарднера является фундаментальной математической моделью, используемой во многих областях физики для описания слабонелинейных слабодисперсионных волн, когда необходимо учитывать влияние нелинейности более высокого порядка – кубической. При этом коэффициенты квадратичной и кубической нелинейностей могут быть как положительными, так и отрицательными, в зависимости от контекста физической задачи [1; 2; 3; 4].

Для исследования слабодисперсионного режима в рамках безразмерного уравнения Гарднера с положительным и отрицательным коэффициентом кубической нелинейности

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + 6\eta(1 \pm \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \quad (1)$$

была проведена серия численных экспериментов по эволюции длинного колоколообразного импульса отрицательной полярности

$$\eta(x, t = 0) = -a \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x}{x_0} \right) \quad (2)$$

у которого варьировалась амплитуда и ширина. Подобная начальная задача решалась в работе [5] для уравнения КдВ, а для уравнения Гарднера с различными знаками кубической нелинейности рассматривалось начальное условие в виде комбинации прямоугольных импульсов [6;7].

Для моделирования эволюции широкого колоколообразного импульса использовался численный код для интегрирования уравнения (1), основанный на неявном псевдо-спектральном методе [8], который позволяет сохранять интегралы, определенные формулами (в рамках численной задачи пределами интегрирования служат границы расчетной области):

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \eta dx, \quad E = \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 dx. \quad (3)$$

Начальное условие (2) дополняется периодическими граничными условиями. Используемый численный код неоднократно верифицировался при моделировании волновых процессов различной природы (см., например, [9; 10]).

Как известно [10], уравнение Гарднера с отрицательным коэффициентом кубической нелинейности обладает классическими солитонными решениями только положительной полярности, имеющими предельную амплитуду (ограничение сверху), равную одной безразмерной единице. Поэтому эволюция импульсов (2) отрицательной полярности (амплитуды которых варьировались от 0.1 до 3 безразмерных единиц, а ширины по уровню $\frac{1}{2} a$ были равны утроенным ширинам солитонов Гарднера положительной полярности соответствующей амплитуды (для $a > 1$ – предельной)) проходила по единому сценарию с образованием нелинейной волны Эйри (рис. 1).

Спектр эволюционирующего волнового поля в этом случае имеет качественно такую же структуру, как и спектр волны Эйри, полученной в рамках слабодисперсионного предела для уравнения Кортевега-де Вриза при дезинтеграции импульса (2) (см. работу [11]) и в полулогарифмической шкале имеет асимптотику в виде прямой линии. Статистический анализ волнового поля (а именно, функция вероятности превышения уровня для каждого момента времени) позволяет сделать вывод об отсутствии механизмов образования волн экстремальной амплитуды, хотя взаимодействие генерируемых волн в редких случаях порождает несущественные «выбросы». С течением времени наблюдаемая высота волн становится значительно меньшей по сравнению с высотой первоначального импульса.

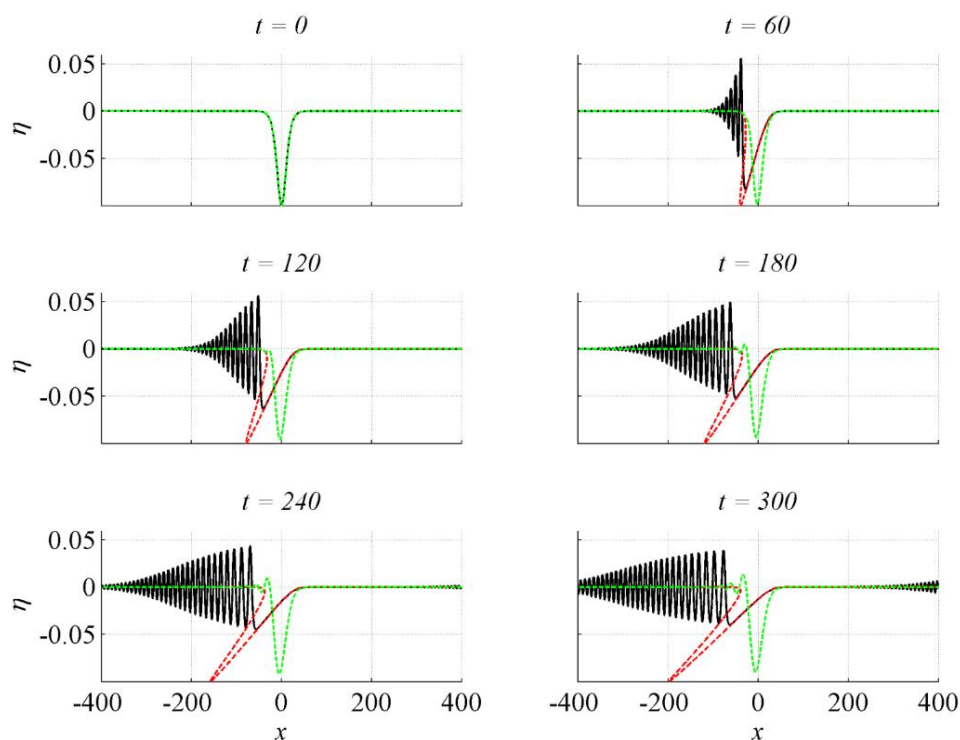


Рис.1. Эволюция импульса (2) с амплитудой 0.1 и шириной, в три раза большей, чем у солитона Гарднера такой же амплитуды ($x_0=14$). Черная линия – решение уравнения Гарднера с отрицательной кубической нелинейностью, зеленая – линейное решение, красная – нелинейное решение

Для уравнения Гарднера с положительным коэффициентом кубической нелинейности могут существовать солитоны положительной полярности, бризеры (нелинейные осцилляторные волновые пакеты), а также солитоны отрицательной полярности, но с ограничением по амплитуде: она должна быть не менее двух безразмерных единиц (что равно амплитуде алгебраического солитона).

В этом случае амплитуды импульсов (2) выбирались равными одной, двум и трем безразмерным единицам (то есть меньше, равными и больше амплитуды алгебраического солитона), а ширины – одной ($x_0=0.46$), пяти ($x_0=2.33$) ширинам алгебраического солитона, либо трем ширинам гарднеровского платообразного солитона с амплитудой 0.9999 безразмерных единиц ($x_0=35$).

Для самой маленькой ширины при амплитуде, равной одной безразмерной единице, наблюдается образование нелинейной волны Эйри; при амплитуде, равной двум, – генерация бризера малой амплитуды с большой шириной огибающей на фоне дисперсионного волнового цуга, а при амплитуде, равной трем, – узкого бризера с амплитудой, почти совпадающей с высотой исходного начального возмущения (рис. 2).

Генерация бризеров приводит к качественному изменению вида спектральных графиков – появлению «полочек» на плавно спадающей спектральной кривой.

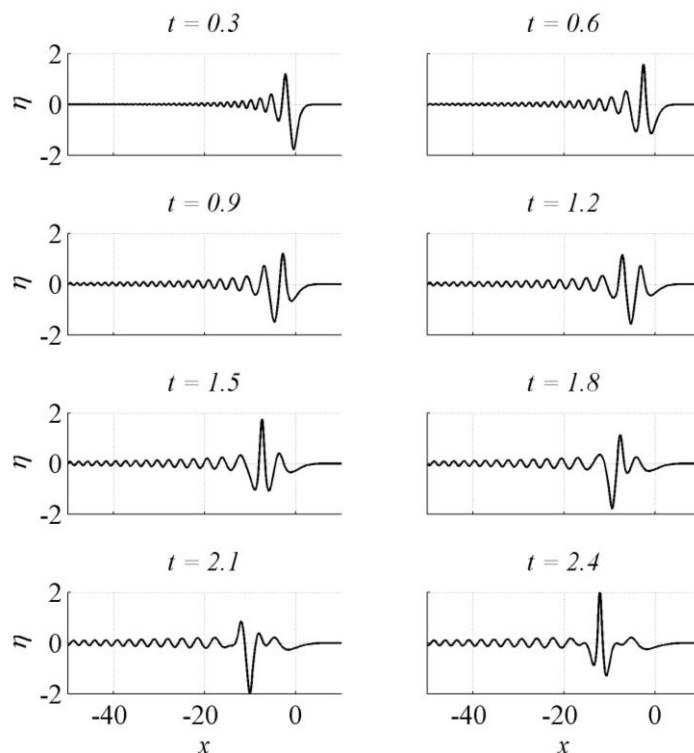


Рис.2. Эволюция импульса (2) с амплитудой, равной трем безразмерным единицам, и шириной, равной ширине алгебраического солитона, в уравнении Гарднера с положительной кубической нелинейностью

При ширине, равной пяти ширинам алгебраического солитона, и амплитуде, равной единице, образуется бризер; при амплитуде, равной двум, – бризер и солитон; а при амплитуде, равной трем, – алгебраический солитон и два солитона, близких к семейству солитонов модифицированного уравнения Кортевега-де Вриза.

Наиболее интересная динамика наблюдается при эволюции самых широких из рассматриваемых импульсов, так как при всех выбранных амплитудах генерируются бризеры и солитоны отрицательной полярности, часть из которых находится на пьедестале, взаимодействующие в силу периодичности граничного условия (рис. 3). Во всех рассмотренных случаях появляются уединенные волны, амплитуды которых в два раза превышают высоту начального возмущения. При набегании солитонов на осцилляторный волновой пакет происходит кратковременное увеличение ее амплитуды, которое, однако не приводит к появлению существенных выбросов в волновом поле, как в случае взаимодействий солитонов разной полярности, генерируемых при эволюции длинной синусоидальной волны [4].

Таким образом, в настоящей работе для всех рассмотренных случаев проведен статистический анализ волнового поля: построена функция вероятности превышения уровня для каждого момента времени, проведено сравнение с известными статистическими законами распределения, проанализирована возможность возникновения волн экстремальной амплитуды. Также выполнен спектральный анализ решения, проанализирована эволюция спектра Фурье во времени.

Представленные результаты научно-исследовательской работы получены при поддержке стипендии президента РФ для молодых ученых и аспирантов на 2016-2018 года (СП-2311.2016.5).

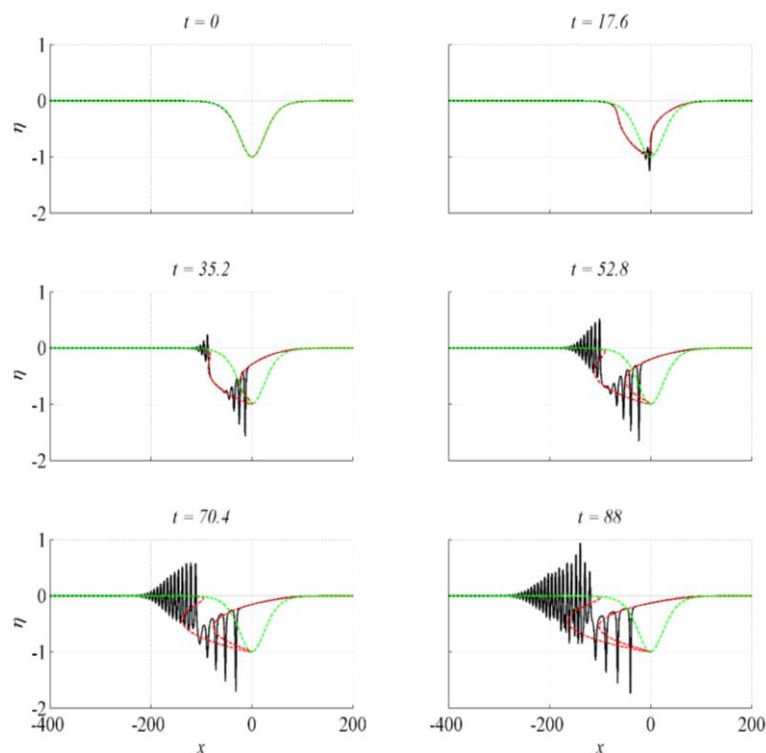


Рис.3. Эволюция импульса (2) с амплитудой 1 и шириной, в три раза большей, чем у солитона Гарднера с амплитудой 0.9999. Черная линия – решение уравнения Гарднера с положительной кубической нелинейностью, зеленая – линейное решение, красная – нелинейное решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е.А. Рувинская “Динамика нелинейных внутренних гравитационных волн в трехслойной жидкости”: дисс. канд. ф.-м. н.: 01.02.05. Нижний Новгород, 2012.
2. Е.А. Рувинская и др. “Динамика нелинейных внутренних гравитационных волн в слоистых жидкостях” Н.Новгород: НГТУ им.Р.Е.Алексеева, 2014.
3. О.Е. Kurkina et al. // *Physics of Fluids* 2011. V. 23. No 11. P.116602.
4. О.Е. Kurkina et al. // *Physica D: Nonlinear Phenomena* 2015. doi:10.1016/j.physd.2015.12.007.
5. S. Trillo et al. // *Physica D: Nonlinear Phenomena* 2016. doi: 10.1016/j.physd.2016.01.007.
6. R. Grimshaw et al. // *Chaos* 2002. V.12. No 4. P.1070.
7. R. Grimshaw et al. // *Chaos* 2010. V.20. No 4. P.013102.
8. В.А. Fornberg “Practical Guide to Pseudospectral Methods” Cambridge University Press, 1998.
9. А.А. Куркин, О.Е. Полухина // *Известия Академии инженерных наук РФ. Прикладная математика и механика* 2003. Т. 4. С. 99.
10. E. Pelinovsky et al. Chapter 4 in the book “Solitary Waves in Fluids” Boston: WIT Press. Southampton, 2007.
11. T. Grava, C. Klein // *Physica D* 2016. doi:10.1016/j.physd.2012.04.001.

Внутренние волны и их влияние на распределение хлорофилла-а в заливе

Б.И. Самолюбов, И.Н. Иванова

Физический факультет МГУ им М.В. Ломоносова, Москва, Россия

e-mail: ivair@yandex.ru

Процессы развития внутренних волн в стратифицированных водохранилищах, озерах и морях представляют особый интерес для разработки методов прогноза энерго-массообмена и переноса примесей. С гидроэкологической точки зрения исключительно важен учет влияния гидрофизических эффектов, и прежде всего волновых, на перенос хлорофилла-а и, соответственно, фитопланктона. Расшифровка механизмов развития внутренних волн, стратифицированных струй и придонных плотностных потоков требует применения современных методов измерений, комплексного анализа результатов и специальных подходов при математическом моделировании потоков и переноса примесей. Таким исследованиям посвящена данная работа, цель которой - выявление механизмов и разработка методов учета влияния внутренних волн на перенос хлорофилла-а.

Объект, аппаратура и методика исследований

Анализируемые результаты получены экспедициями физического факультета МГУ в Петрозаводской губе Онежского озера 16.09.2007 и 8-10.07.2015 гг. Выполнялись исследования структур полей скорости течения, температуры воды, концентраций взвеси, хлорофилла-а и растворенных солей на разрезах и срочных станциях. Измерения велись с борта НИС «Эколог» ИВПС Кар НЦ РАН. Комплекс аппаратуры включал следующие приборы. Мультипараметрический зонд RCM 9 LW (Aanderaa) с доплеровским регистратором вектора скорости течения, датчиками температуры, электропроводности воды, концентраций кислорода и взвеси. Зонд использовался для получения профилей указанных характеристик с шагом 1 м. Зонд STD90M (Sea-Sun), применявшийся для подробных регистраций профилей температуры воды, мутности, электропроводности и концентрации хлорофилла-а. Дискретность профильных измерений 0,1 м. Зонд YSI 600OMS (YSI Incorporated) с датчиками температуры, электропроводности и мутности воды. Дискретность та же. Одновременно с зондированиями (по всей глубине) измерялись метеорологические параметры.

Преобразования полей скорости, температуры и концентраций примесей

На первом разрезе (2007) вдоль по губе от ее верхней части до выхода в открытое озеро зарегистрированы плотностной поток у дна, промежуточная струя и приповерхностное течение. На первой вертикали все потоки направлены к открытому озеру (рис.1а), но лишь плотностное течение распространялось без существенных изменений направления на 13 км. На выходе из залива этот поток отрывался от дна и сливался с промежуточной струей. Скорость ветра не превышала 2,5 м/с при среднем значении 1,6 м/с. В поле температуры (рис.1б), наблюдается холодный придонный слой с задним фронтом примерно в 1 км от начала разреза. Такое распределение температуры вызывает появление плотностного потока, сформированного, преимущественно, водами открытого озера, поступившими в губу ранее под влиянием циркуляций, вызванных ветром. Концентрация взвеси (рис.1в) максимальна в этом потоке, из которого выбрасываются облака мутности к поверхности, что приводит к загрязнению

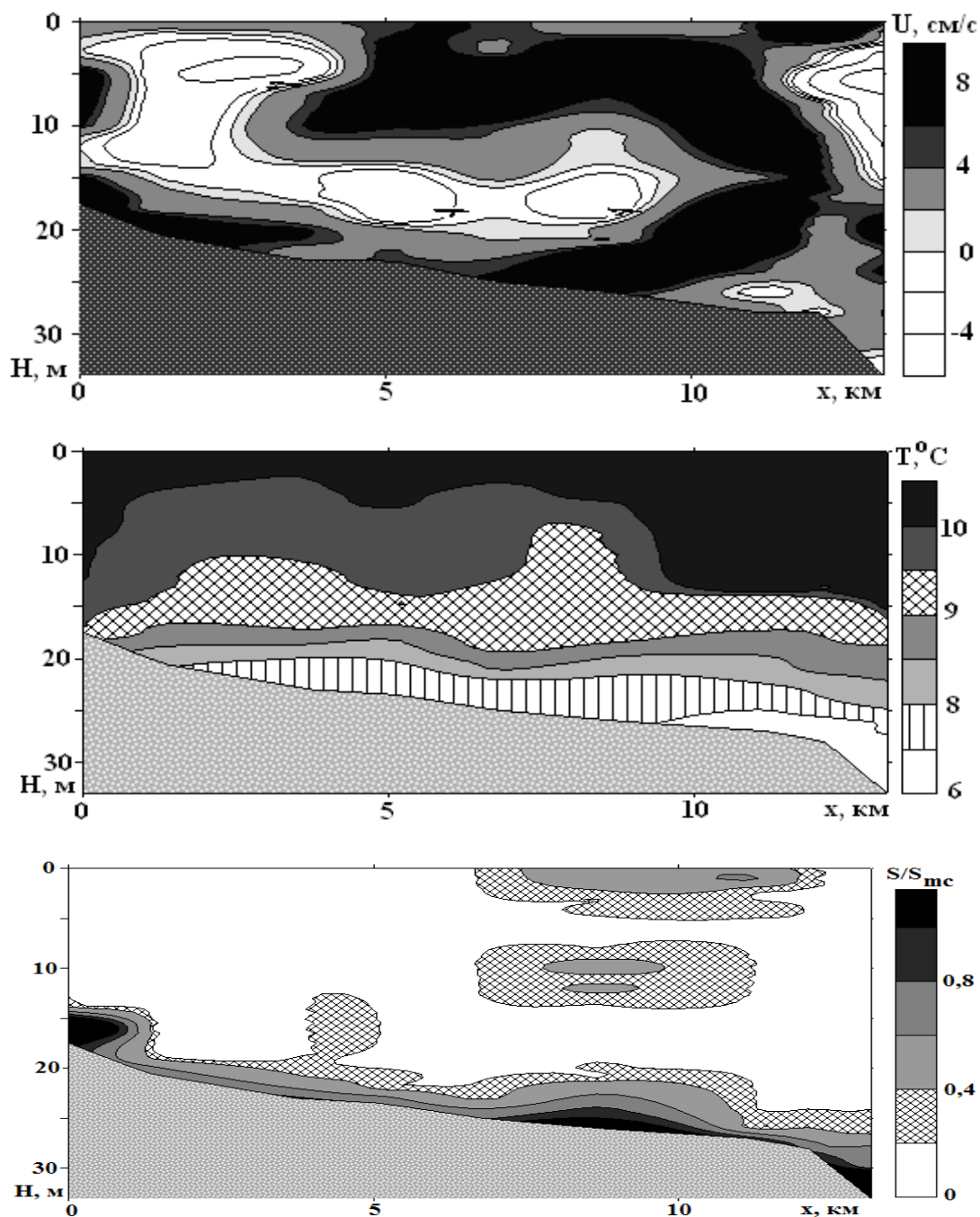


Рис. 1. Распределения скорости течения U , температуры T и мутности воды S/S_{mc} по глубине и вдоль по разрезу в Петрозаводской губе Онежского озера 16.09. 2007г.

вод в деятельном слое озера [1]. В облаках **мутности** отмечено повышение концентрации хлорофилла-а. Этот эффект по-видимому связан с поступлением в облаках питательных веществ (фосфора и др.) из придонного слоя в деятельный слой, **которое сопровождается ростом продуктивности фитопланктона.**

Вертикальные распределения скорости течения на рис.2 построены по методике, предложенной в данной работе. Методика базируется на сочетании подходов, разработанных в [2] для внутренних волн сейшевого типа и в [3] для плотностного потока и струи.

Как и в [5, 6] применяется композиция профилей скорости для трёх мод внутренних сейш. Этим модам соответствуют периоды основных продольных

внутренних сейш озера и губы. Для каждой моды распределение скорости по глубине, во времени и вдоль по потоку находилось по аналитическому решению из [2]. Фазовая скорость оценивалась по известной формуле для двухслойной жидкости по заданным толщинам слоев и разности плотностей вод в них [2]. Как следует из профилей U на рис. 2, такое аналитическое представление согласуется с данными измерений.

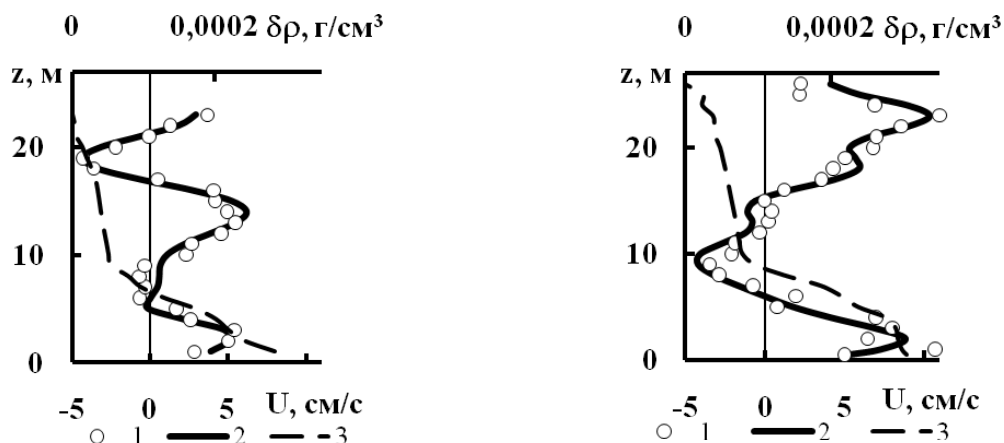


Рис. 2. Профили скорости течения U (измеренные - 1 и теоретические - 2) и изменения плотности воды с глубиной $\delta\rho$ - 3 (дискретность 0,5 м) при $x=3,7$ км - а и 8,7 км - б при разных знаках скорости струи над придонным плотностным потоком (Петрозаводская губа, 16.09. 2007).

На втором разрезе (2015) структура поля скорости также определялась главным образом течениями, вызванными внутренними волнами сейшевой природы, струей в термоклине, дрейфовым течением и плотностным потоком. Скорость ветра изменялась от 6 до 8 м/с. Скорость струи на уровне ее максимума составляла 5 -20 см/с. Глубина, соответствующая этому максимуму, - 6 – 20 м. Толщина струи составляла 6 – 20 м. Число Ричардсона для струи изменялось от 11 в зоне ее формирования до 0,1 (до потери гидродинамической устойчивости) в конце разреза. Фазовая скорость основной моды внутренних волн составляла 0,15 – 0, 2 м/с, высоты волн 1 – 5 м, период $11,4 \pm 1$ ч. Концентрация хлорофилла-а убывала почти на порядок по глубине при переходе из эпилимниона в гипolimнион и примерно вдвое вдоль по разрезу в 10 км от его начала (рис. 3). Отдельные вспышки удельного содержания хлорофилла-а у дна в первой половине разреза, по-видимому, обусловлены влиянием течений волновой природы переносящих воды из мелководной области в глубинные слои.

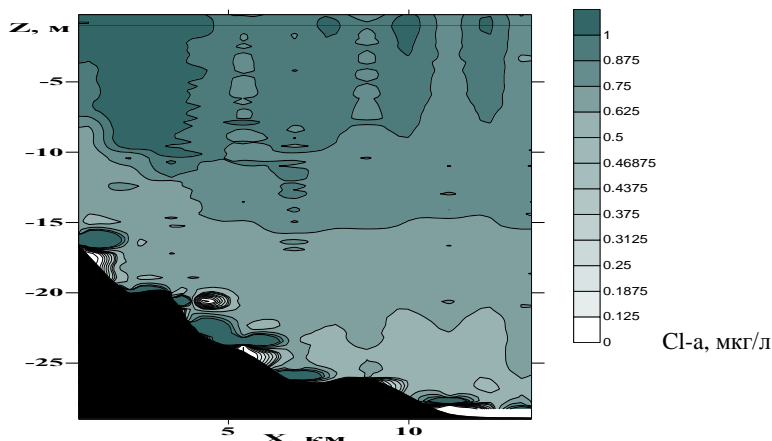


Рис. 3. Распределения концентрации хлорофилла-а по глубине и вдоль по разрезу в Петрозаводской губе Онежского озера 9.07. 2015 г.

Концентрация хлорофилла-а в деятельном слое (в термоклине и над ним) пропорциональна высоте волны в первой половине дня и обратно пропорциональна во второй (рис. 4). Эффект нарастания по-видимому связан с усилением фотосинтеза при волновых подъемах вод в первой половине дня. Обратный эффект в вечерний и ночной периоды обусловлен убыванием и выравниванием концентрации по глубине. Практический интерес для разработки методов прогноза распределения хлорофилла-а представляет обнаруженная линейная зависимость его концентрации от произведения концентрации взвеси на фазовую скорость внутренней волны.

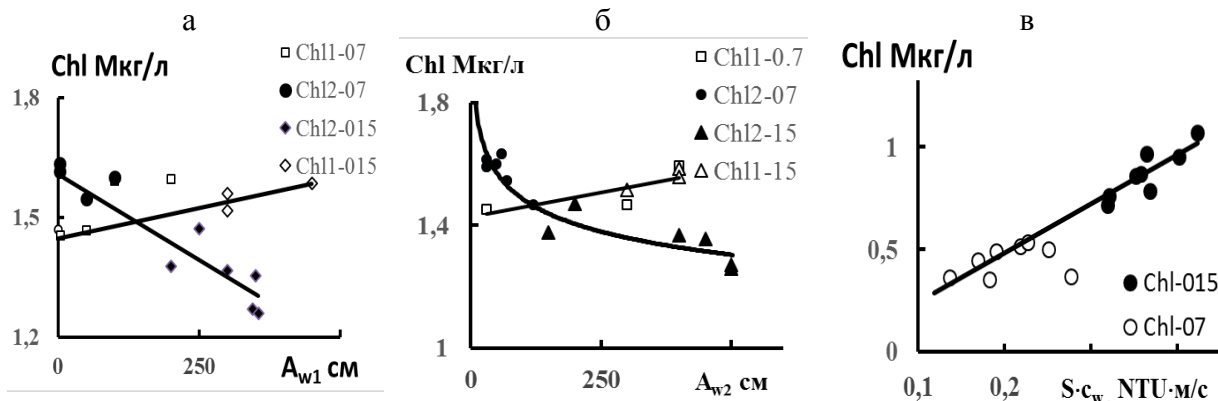


Рис. 4. Зависимости средней по глубине деятельного слоя концентрации хлорофилла-а Chl от высоты внутренней волны а - A_{w1} с вертикальной длиной, определяющейся полной глубиной (от поверхности до дна), б - A_{w2} с вертикальной длиной, определяющейся глубиной термоклина, в – от произведения концентрации взвеси S (мутности в универсальных международных единицах NTU) на фазовую скорость внутренней волны c_w . Обозначения Chl1, Chl2 на рис. 4 а, б соответствуют первой и второй половине дня.

Заключение

Выявлена структура поля скорости при наличии внутренних волн, взаимодействующих со струей в термоклине, дрейфовым течением и плотностным потоком.

Выявлены закономерности влияния внутренних волн на распределение хлорофилла.

Получены зависимости концентрации хлорофилла-а в деятельном слое от высоты внутренней волны.

Обнаружена и представлена аналитически зависимость концентрации хлорофилла от фазовой скорости внутренней волны и концентрации взвеси.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 14-05-00822).

ЛИТЕРАТУРА

1. К. В. Показеев, Б. И. Самолюбов, Н. Н. Филатов. Метеорология и гидрология. 2012, с. 83-88
2. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. // Москва – Ижевск, 2000. 572 с.
3. Самолюбов Б. И. Плотностные течения и диффузия примесей. // М.: Изд. URSS. 2007. 352 с.
4. Dorostkar A., Voegman L. Internal hydraulic jumps in a long narrow lake. // Limnol. Oceanogr. 58(1), 2013, 153-172
5. Gomes-Giraldo A., Imberger J., Antenucci J.P., Yates P.S. Wind-shear-generated high-frequency internal waves as precursors to mixing in a stratified lake. // Limnol. Oceanogr. 53(1), 2008, 354-367.
6. Umlauf L., Lemmin U. Interbasin exchange and mixing in the hypolimnion of a large lake: The role of long internal waves. // Limnol. Oceanogr. 50(5), 2005, 1601-1611.

Дипольное электромагнитное излучение незаряженной каплей, осциллирующей в однородном электростатическом поле

Н.Ю. Колбнева, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова

shir@uniyar.ac.ru

Вопросы, связанные с наличием электромагнитного излучения от осциллирующих облачных и дождевых капель, представляют интерес в связи с проблемами радиопомех радиолокационного зондирования метеорологических объектов.

Целью работы являлись исследование и анализ дипольного электромагнитного излучения незаряженной каплей, осциллирующей в однородном электростатическом поле. Для достижения заданной цели были поставлены следующие задачи: 1) вывод эволюционного уравнения для осцилляций незаряженной каплей проводящей жидкости в однородном электростатическом поле; 2) нахождение спектра капиллярных колебаний поверхности капли; 3) проведение оценки интенсивности электромагнитного излучения для отдельной капли и облака.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о дипольном электромагнитном излучении незаряженной капли идеальной, несжимаемой, идеально проводящей жидкости с плотностью ρ , коэффициентом поверхностного натяжения σ , осциллирующей в однородном электростатическом поле напряженностью \vec{E}_0 . Примем, что капля находится в вакууме, её объем определяется объемом сферы с радиусом R .

Под действием внешнего электрического поля происходит вытягивание капли в сфероид. Носители зарядов приходят в движение, перераспределяются, и на полюсах капли возникают разноименные индуцированные заряды. Заряды распределяются по возмущённой капиллярным волновым движением поверхности капли. Каплю будем моделировать в виде диполя с эффективными точечными зарядами, разнесенными друг от друга на расстояние, осциллирующее со временем. Смоделированные разноименные заряды осциллируют со временем и излучают электромагнитные волны.

Основная часть. Все расчёты задачи будем проводить в сферической системе координат с началом в центре масс капли. В начальный момент времени равновесная форма капли претерпевает виртуальное осесимметричное возмущение $\xi(\theta, t)$ фиксированной амплитуды ε . Задача решается, полагая, что поля скоростей течения жидкости в капле $V(\vec{r}, t) = \nabla\psi(\vec{r}, t)$ имеют порядок малости, что и волновое искажение капли $\psi(\vec{r}, t) \sim \xi(\theta, t) \sim \varepsilon$. Математическая постановка задачи состоит из уравнений Лапласа для гидродинамического и электрического потенциалов, естественных граничных условий, кинематического и динамического граничных условий и условия постоянства поверхностного потенциала. Для замыкания выписанной системы введены условия сохранения полного объема капли, условие неподвижности центра масс и условие незаряженности капли. Начальные условия заданы в виде начальной деформации равновесной поверхности капли и равенства нулю скорости движения поверхности капли. Искомые величины разложены по порядкам малости безразмерной амплитуды осцилляций ε . Таким образом, выделим задачу нулевого порядка малости по ε для нахождения равновесной поверхности капли и электрического потенциала в окрестности равновесного незаряженного сфероида во внешнем электрическом поле и задачу первого порядка малости по ε для определения формы возмущенной поверхности капли и электрического потенциала в окрестности возмущенной поверхности незаряженного сфероида.

Решив задачу нулевого порядка малости, получили форму равновесной поверхности капли с точностью до квадрата эксцентриситета e^2 , совпадающую с уравнением вытянутого сфероида. Равновесный электрический потенциал содержит добавку в окрестности незаряженной сферы во внешнем электрическом поле и добавку, связанную с вытянутостью капли.

В задаче имеются два малых параметра: эксцентриситет равновесной поверхности капли e и безразмерная амплитуда осцилляций ε . Задача решается в линейном приближении по ε и в квадратичном приближении по e . В разложениях необходимо сохранять слагаемые порядка $\sim \varepsilon$, учитывающие возмущение равновесной поверхности капли, $\sim e\varepsilon \sim E_0\varepsilon$, учитывающие взаимодействие возмущения и напряженности электростатического поля и $\sim e^2\varepsilon$, учитывающие взаимодействие капиллярного волнового возмущения и отклонения сфероида от сферы.

Решив электрическую часть задачи первого порядка малости по безразмерной амплитуде осцилляций ε , получили добавку для электрического потенциала в окрестности возмущенной поверхности капли.

Из граничных условий в первом приближении по амплитуде осцилляций ε , получена система связанных неоднородных дифференциальных уравнений. Решив эволюционное уравнение методом приближений по e^2 , подставив начальные условия, получили выражение для частоты собственных колебаний незаряженной сфероидальной капли и аналитическое выражение для возмущенной формы поверхности капли.

В силу симметрии капли достаточно определить величину положительного индуцированного заряда и вектор смещения центра положительно индуцированного заряда. Определив вторую производную проекции смещения центра положительно индуцированного заряда вдоль распространения электрического поля, взяв максимальное значение от этого выражения и максимальное значение величины смещения заряда, получено выражение для интенсивности дипольного электромагнитного излучения.

Для численных оценок электромагнитного излучения приведены параметры для капли, осциллирующей в сильном электростатическом поле напряженностью $E_0 = 10 \text{ kV/cm}$. Возможны два наиболее вероятных источника электромагнитного излучения капель в грозном облаке. Первый источник связан с осцилляциями низких мод мелких капель от 3 до 30 μm . Концентрация n таких капель в облаке $\sim 10^3 \text{ см}^{-3}$. Интенсивность фонового электромагнитного излучения мелких капелек связана с движением центров индуцированных зарядов при возбуждении колебаний поверхности за счет микрофизических внутриоблачных процессов (коагуляции, испарения, конденсации, гидродинамического и электрического взаимодействия с соседними каплями). Вторым источником связан с осцилляциями высоких мод гидрометеоров размером $R = 100 \mu\text{m}$ и концентрацией $\sim 10^3 \text{ м}^{-3}$, коагулирующими с более мелкими капельками. Для первого источника на основной (второй) моде при $R = 30 \mu\text{m}$ получим интенсивность излучения $I \sim 5 \cdot 10^{-27} \mu\text{W}$ на частоте $\approx 100 \text{ kHz}$ для единичной капли и $I_{in} \sim 3 \cdot 10^{-6} \mu\text{W}$ для облака диаметром 10 km. Для второго источника для 20-ой моды получим интенсивность электромагнитного излучения $I \sim 2 \cdot 10^{-27} \mu\text{W}$ на частоте $\approx 800 \text{ kHz}$ и $I_{in} \sim 1 \cdot 10^{-12} \mu\text{W}$.

В итоге, интенсивность дипольного электромагнитного излучения единичной крупной капли сопоставима с интенсивностью излучения единичной мелкой капли. Если рассматривать излучение от облака диаметром 10 km , то концентрация крупных капель на 6 порядков меньше концентрации мелких капелек, поэтому интегральная интенсивность излучения будет определена мелкими капельками.

Основные результаты работы: 1) с увеличением размера облачных капель интенсивность излучения увеличивается крайне слабо; 2) с увеличением напряженности электростатического поля интенсивность излучения быстро увеличивается: при увеличении напряженности поля в 3 раза интенсивность излучения увеличивается на порядок; 3) с увеличением размера внутриоблачной капли частота излучения быстро снижается по примерно гиперболическому закону: с увеличением радиуса капли на порядок (от $R = 3\ \mu\text{m}$ до $R = 30\ \mu\text{m}$) частота колебаний уменьшается в тридцать раз; 4) частота осцилляций мелких капелек приходится на полосу частот от $\sim 100\text{ kHz}$ до $\sim 5\text{ MHz}$; 5) интегральная интенсивность дипольного электромагнитного излучения из облака диаметром 10 km может быть зафиксирована радиоприемной аппаратурой, чувствительность которой составляет $1 \cdot 10^{-13}\text{ W}$.

О волновых движениях в двухслойной жидкости с поверхностно-активным веществом и поверхностным электрическим зарядом на верхней границе

А.В. Кондратьева, Д.Ф. Белоножко

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

KondratievaAV@gmail.com, Belonozhko@mail.ru

Исследовано волновое движение в двухслойной идеально проводящей жидкости, несущей на своей внешней поверхности электрический заряд и нерастворимую пленку поверхностно-активного вещества (ПАВ). Верхний слой характеризуется толщиной h , плотностью ρ_1 и коэффициентом кинематической вязкости ν_1 . Равновесная концентрация ПАВ Γ_0 и соответствующее ей равновесное значение поверхностного натяжения γ_1 на его поверхности полагается известной. Эффективность перераспределения величины поверхностного натяжения вдоль возбужденной волновым движением поверхности определяется параметром упругости пленки $\varepsilon = \Gamma_0(d\gamma_1/d\Gamma) < 0$, который пропорционален тангенсу угла наклона изотермы, изображающей зависимость поверхностного натяжения от концентрации ПАВ [1]. Считается, что обе жидкости являются идеальными проводниками. Внешняя поверхность верхнего слоя несет электрический заряд, который в равновесном состоянии распределяется с постоянной поверхностной плотностью σ_0 . Бесконечно глубокий нижний слой имеет плотность ρ_2 и коэффициент кинематической вязкости ν_2 . Коэффициент поверхностного натяжения между слоями γ_2 тоже считается известным. Задача рассматривается декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$, ось Oz которой направлена вертикально вверх, против направления действия поля силы тяжести \vec{g} . Ось Ox направлена горизонтально вдоль границы между слоями. Для простоты течение жидкости считается независимым от горизонтальной координаты Oy .

В работе рассмотрены закономерности влияния ПАВ, электрического заряда и изменения межслойного поверхностного натяжения γ_2 на различные виды волновых движений, реализующихся в описанной системе. Рассмотрено взаимное влияние волновых движений друг на друга.

Полная математическая формулировка задачи расчета поля скоростей, давления, концентрации ПАВ и электрического потенциала в верхнем полупространстве состоит из уравнений электро-гидродинамики вязкой проводящей жидкости, дополненного стандартными граничными условиями, включающими закон сохранения ПАВ на деформирующейся в процессе волнового движения внешней поверхности. Задача линейризовалась по амплитуде волнового движения и решалась в первом приближении по отношению амплитуды волны к ее длине. Неизвестные функции задачи первого порядка малости искались в виде бегущей волны.

В безразмерных переменных $\rho_1 = g = \gamma_1 = 1$ дисперсионное уравнение, связывающее комплексную частоту s с волновым числом k и другими параметрами задачи, имеет вид $Det[(A_{i,j})] = 0$, где

$$A_{1,1} = -Ch(hk); \quad A_{1,2} = -Sh(hk); \quad A_{1,3} = -Ch(hq_1); \quad A_{1,4} = -Sh(hq_1); \quad A_{1,5} = s; \quad A_{1,6} = 0;$$

$$A_{1,7} = 0; \quad A_{1,8} = 0; \quad A_{2,1} = -\frac{ik^2 \varepsilon Sh(hk)}{s} + 2ikCh(hk)\nu_1; \quad A_{2,2} = -ik \varepsilon Ch(hk) + 2ik Sh(hk)\nu_1;$$

$$\begin{aligned}
 A_{2,3} &= -\frac{ik\varepsilon Sh(hq_1)q_1}{s} + ikCh(hq_1)v_1 + \frac{iCh(hq_1)q_1^2 v_1}{k}; \\
 A_{2,4} &= -\frac{ik\varepsilon Ch(hq_1)q_1}{s} + ikSh(hq_1)v_1 + \frac{iSh(hq_1)q_1^2 v_1}{k}; \quad A_{2,5} = 0; \quad A_{2,6} = 0; \quad A_{2,7} = 0; \quad A_{2,8} = 0; \\
 A_{3,1} &= -\frac{sSh(hk)}{k} + 2kSh(hk)v_1; \quad A_{3,2} = -\frac{sCh(hk)}{k} + 2kCh(hk)v_1; \quad A_{3,3} = -2Sh(hq_1)q_1 v_1; \\
 A_{3,4} &= -2Ch(hq_1)q_1 v_1; \quad A_{3,5} = -\frac{\omega_0^2}{k}; \quad A_{3,6} = 0; \quad A_{3,7} = 0; \quad A_{3,8} = 0; \quad A_{4,1} = 0; \quad A_{4,2} = -i; \quad A_{4,3} = 0; \\
 A_{4,4} &= -\frac{iq_1}{k}; \quad A_{4,5} = 0; \quad A_{4,6} = -1; \quad A_{4,7} = -1; \quad A_{4,8} = 0; \quad A_{5,1} = -1; \quad A_{5,2} = 0; \quad A_{5,3} = -1; \quad A_{5,4} = 0; \\
 A_{5,5} &= 0; \quad A_{5,6} = 0; \quad A_{5,7} = 0; \quad A_{5,8} = s; \quad A_{6,1} = 0; \quad A_{6,2} = 0; \quad A_{6,3} = 0; \quad A_{6,4} = 0; \quad A_{6,5} = 0; \quad A_{6,6} = -i; \\
 A_{6,7} &= -\frac{ik}{q_2}; \quad A_{6,8} = s; \quad A_{7,1} = -2ikv_1; \quad A_{7,2} = 0; \quad A_{7,3} = -ikv_1 - \frac{iq_1^2 v_1}{k}; \quad A_{7,4} = 0; \quad A_{7,5} = 0; \\
 A_{7,6} &= -2kv_2\rho_2; \quad A_{7,7} = -\frac{k^2 v_2 \rho_2}{q_2} - q_2 v_2 \rho_2; \quad A_{7,8} = 0; \quad A_{8,1} = 0; \quad A_{8,2} = \frac{s}{k} + 2kv_1; \quad A_{8,3} = 0; \\
 A_{8,4} &= 2q_1 v_1; \quad A_{8,5} = 0; \quad A_{8,6} = -\frac{is\rho_2}{k} - 2ikv_2\rho_2; \quad A_{8,7} = -2ikv_2\rho_2; \quad A_{8,8} = 1 - k^2\gamma_2 - \rho_2.
 \end{aligned}$$

Здесь $\omega_0^2 = k + k^3 - k^2W$ - безразмерная круговая частота волнового движения, реализующегося при тех же условиях в сплошной идеальной бесконечно глубокой жидкости без пленки ПАВ на поверхности. Безразмерная величина $W = 4\pi\sigma_0^2$ - параметр Тонкса-Френкеля, характеризующий отношение электрических и лапласовских сил на гребнях волн.

Дисперсионное уравнение задачи трансцендентно, его решения могут быть найдены только численными методами. Решений дисперсионного уравнения бесконечно много. Это связано с периодичностью в комплексной плоскости гиперболических функций, входящих в уравнение. Подавляющее большинство решений имеет аперриодический быстро затухающий характер. На практике проявить себя могут только решения с минимальным по модулю декрементом затухания, или решения с нарастающей по времени амплитудой. Расчеты показывают, что таких решений не больше шести. Два из четырех корней описывают капиллярно-гравитационные волны, бегущие в разные стороны, два - распространяющиеся в противоположные стороны волны Марангони [1], возбуждаемые сжатиями и растяжениями пленки ПАВ, еще два - описывают внутренние волны, возникающие между слоями при движении жидкости.

При исследовании безразмерные коэффициенты вязкости жидкости полагались равными $\nu_1 = \nu_2 = 0.002$, что соответствует вязкости воды. Отношение плотностей жидкости $\rho_2 / \rho_1 = 1.1$. В отсутствие электрического заряда, как и в случае сплошной жидкости с пленкой ПАВ на внешней поверхности, увеличение по абсолютной величине коэффициента упругости пленки ПАВ ε приводит к сильному возрастанию модуля декремента затухания и частоты волн Марангони, возбуждаемых сжатиями и растяжениям пленки ПАВ. При этом частота капиллярно-гравитационных и внутренних волн меняется весьма слабо. Существует значение упругости пленки ПАВ, при котором частоты капиллярно-гравитационных и внутренних волн совпадают с частотой волн Марангони. В этом случае пленка ПАВ оказывает особенно ярко выраженное демпфирующее влияние на капиллярно-гравитационные волны,

распространяющиеся по поверхности верхнего слоя. Расчеты показали, что уменьшение толщины h верхнего жидкого слоя усиливает этот эффект.

При увеличении межслойного безразмерного поверхностного натяжения γ_2 в диапазоне $0 \leq \gamma_2 \leq 1$, эффект демпфирования капиллярно-гравитационных волн пленкой ПАВ ослабевает, а значение коэффициента упругости пленки ПАВ ε , соответствующее максимальному гашению волны пленкой, сохраняется неизменным. На частоту капиллярно-гравитационных волн изменение γ_2 практически не влияет. В то же время, с увеличением межслойного поверхностного натяжения γ_2 в незначительном диапазоне $0 \leq \gamma_2 \leq 0.05$ сильно увеличивается эффект гашения внутренних волн. Значение коэффициента упругости пленки ПАВ ε , соответствующее максимуму гашения, смещается в область больших по модулю значений. Частота внутренних волн увеличивается.

Выяснилось, что увеличение электрического заряда на поверхности жидкого слоя наиболее сильно сказывается лишь на свойствах капиллярно-гравитационных волн. Именно они претерпевают неустойчивость по отношению к избытку электрического заряда, которая называется неустойчивостью Тонкса-Френкеля [2, 3]. Тогда как декремент и частота волн Марангони даже при значительных изменениях величины поверхностной плотности электрического заряда изменяются весьма слабо. Для каждого волнового числа k существует свое пороговое значение параметра W , при превышении которого амплитуда волнового движения начинает неограниченно расти во времени - режим волнового затухающего движения сменяется режимом апериодически нарастающего движения. Наиболее неустойчивым волновым числом является $k = 1$, для которого пороговое значение начала развития неустойчивости $W = 2$.

Кроме влияния пленки ПАВ на капиллярно-гравитационные и внутренние волны в системе наблюдается влияние слойного строения жидкости на свойства волнового движения. Расчеты показали, что при увеличении волнового числа k частоты поверхностных и внутренних волн могут только сближаться, но не пересекаться. В этих условиях внутренние волны начинают затухать особенно сильно. Выяснилось, что при закритической (в смысле инициации неустойчивости по отношению к избытку заряда) плотности электрического заряда $W > 2$, неустойчивость претерпевает только один тип волнового движения – тот, для которого отношение амплитуды волны на внешней поверхности к амплитуде внутренних волн существенно больше единицы. Это означает, что, по крайней мере, на начальном этапе неустойчивость развивается именно в виде сильной деформации внешней поверхности, но не внутренней. При докритических значениях поверхностной плотности электрический заряд особенно сильно влияет только на частоту волнового движения, в котором амплитуда поверхностной волны превышает амплитуду внутренней.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ролдугин В.И. «Физико-химия поверхности: учебник-монография». Долгопрудный: изд. дом «Интеллект», 2008.
2. Френкель Я.И. // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. №4. С. 348-350.
3. Tonks L. // Phys. Rev. 1935. V. 48. P. 562-568.

Генерация ветровых волн вихрями в тормозящихся потоках воздуха

О.Н. Мельникова, К.В. Показеев, М.Н. Шабров

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, физический факультет, кафедра физики моря и вод суши. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

olamel@yandex.ru

Генерация коротких волн на воде наблюдается в зоне торможения горизонтального потока воздуха о подстилающую поверхность. Прандтль [1] предположил, что для таких потоков действие силы трения на нижней поверхности вязкого слоя воздуха и обратного градиента давления на верхней границе могут привести к остановке тонкого вязкого слоя потока. Экспериментальные исследования [2-3] установили, что такая остановка действительно происходит периодически, что при торможении в вязком слое образуются цилиндрические вихри, ось которых направлена горизонтально и перпендикулярно направлению движения потока, причем, вихри расположены на одинаковом расстоянии друг от друга. В момент остановки слоя объемные вихри вылетают вверх под действием модифицированной силы Жуковского. В момент вылета происходит резкое увеличение скорости фоновго потока и снижение давления под вихрями [4], что приводит к деформации водной поверхности – возникают предпосылки к вынужденной генерации ветровых волн [3], длина которых совпадает с расстоянием между вихрями, а период – с периодом вылета вихрей. В работах [2-3] получены полуэмпирические выражения для расчета параметров процесса, однако в них не обсуждается вопрос соответствия характеристик вынужденных колебаний водной поверхности дисперсионному соотношению для свободных волн на воде. Этому вопросу посвящена настоящая работа, в задачу которой включен поиск условий резонанса и экспериментальная проверка этих условий на установке, описанной в [2-3].

Оценка деформации поверхности воды одиночным слабым точечным вихрем, полученная в [5], справедлива, если возмущение поверхности мало по сравнению с расстоянием от вихря до поверхности воды. В вязком слое воздушного потока при скорости ветра $u > 3 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$ на поверхность воды воздействуют интенсивные массовые вихри, которые поднимаются вверх под действием обобщенной силы Жуковского и вызывают деформацию, превышающую толщину вязкого слоя. Воздействие таких вихрей на поверхность воды исследовано экспериментально.

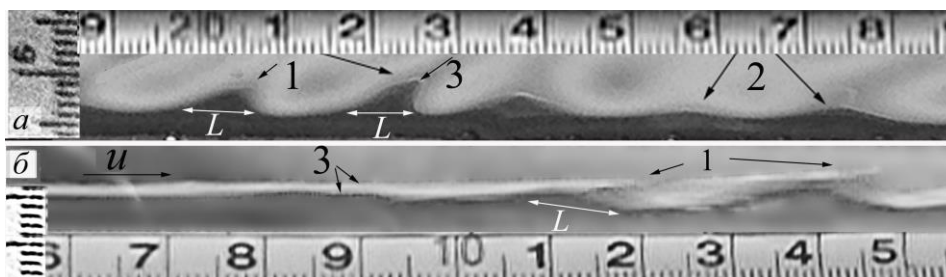


Рис.1 Деформация поверхности воды вихрями (1-3)

На верхнем кадре рис. 1а показана деформация поверхности воды ветровым потоком в начале разгона. Первые круглые узкие гребешки появляются на поверхности воды на участке $19 < x < 23 \text{ см}$ (x – продольная координата, начало координат на поверхности воды на входе в канал), расстояние между гребнями $\lambda = 1.8 \text{ см}$, высота второго гребешка больше первого. Такая форма гребешков наблюдается только в момент вылета вихрей, который фиксируется по смещению легких частиц пенопласта,

захваченных вихрями с поверхности воды (рис. 1б). Ниже по течению $x > 24$ см (рис. 1а) амплитуда возмущений быстро падает – на поверхности воды остаются гармонические волны малой амплитуды, длина которых близка расстоянию между гребнями на верхнем участке. Средняя скорость ветра на верхнем участке, где наблюдаются крутые короткие гребни, $u = 415 \text{ см}\cdot\text{с}^{-1}$, она убывает линейно с продольной координатой: $u_x = \partial u / \partial x \approx -4.8 \text{ с}^{-1}$. В соответствии с [2] в этой зоне торможения воздушного потока, обусловленного трением о стенки, должны образовываться вихри в вязком слое воздуха. Период вылета вихрей и расстояние между вихрями определяются следующими выражениями [3]:

$$s = T_{ed} u_s - \frac{\delta}{2C_f} \ln \left(1 + u_s \frac{2C_f}{5|u_x|\delta} \right) \quad (1)$$

$$T_{ed} = \left(\frac{2\delta}{5u_s|u_x|C_f} \right)^{1/2} \arctg \left(\sqrt{\frac{2u_s C_f}{5|u_x|\delta}} \right), \quad (2)$$

где u_s – средняя по времени скорость воздушного потока на нижней границе вязкого слоя, δ – толщина вязкого слоя (линейный вертикальный профиль скорости), C_f – коэффициент трения скольжения воздуха по поверхности воды (безразмерный, численно равный кинематической вязкости воды для 20°C $C_f = 0.01$). Если скорость потока вне пограничного слоя $u > 1 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$, то $u_s \approx u/10$, скорость на верхней границе вязкого слоя близка $u/2$, а толщина вязкого слоя $\delta = 0.05 \text{ см}$ [2]. Расчет расстояния между вихрями на участке с крутыми гребнями (рис. 1а) дает: $s = 1.8 \text{ см}$. Расстояние между вихрями равно расстоянию между гребнями возмущений водной поверхности $s = \lambda$ на этом участке. Ниже – на участке $24 < x < 29 \text{ см}$ – значение $u_x = \partial u / \partial x \geq -1 \text{ с}^{-1}$. Расчет по (1-2) дает значение $s > 6.3 \text{ см}$, которое превышает длину участка. Это объясняет отсутствие вылета вихрей и крутых гребней на нижнем участке. Если определить площадь продольного вертикального сечения первого гребня на верхнем участке длиной L и высотой h_{max} , то получим $S_{\text{per}} = 0.12 \text{ см}^2$. Площадь сечения второго гребня почти вдвое больше, что можно объяснить последовательным воздействием двух вихрей. Эксперименты показали, что площадь сечения первого гребня и его ширина L у основания начального возмущения возрастают с увеличением длины волны, а максимальная высота h_{max} – убывает. Для сравнения на нижнем кадре рис.1б показана поверхность воды в зоне генерации волн воздушным потоком ($u = 330 \text{ см}\cdot\text{с}^{-1}$, $u_x = -2 \text{ с}^{-1}$) в момент вылета вихрей над первым и вторым гребнем.

Для того, чтобы приблизительно оценить возможное отклонение поверхности воды $h(t, x)$, (t – время) под воздействием отрицательного скачка давления при вылете вихря из вязкого слоя, запишем условие баланса давления на поверхности раздела:

$$p_a = p + T_s K, \quad K = h_{xx} (1 + h_x^2)^{-3/2}, \quad h_x = \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3)$$

где p_a, p – давление на поверхности раздела в воздухе и воде соответственно, T_s – коэффициент поверхностного натяжения, K – кривизна поверхности. Будем считать, что при вылете вихрей из вязкого слоя после его остановки происходит резкое увеличение скорости жидкости в вязком слое от 0 до значения $u = 3u_s$, полученного при усреднении скорости по вертикали в вязком слое невозмущенного фонового потока. Движение жидкости фонового потока в этом случае потенциально, а для давления на

среднем уровне можно записать, пренебрегая скоростью дрейфового течения в воде в самом начале разгона:

$$p_a = -\rho_a \left[\varphi_t + gz + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 \right], \quad p = -\rho g z, \quad (4)$$

где ρ, ρ_a – плотность воды и воздуха соответственно, g – ускорение силы тяжести, $\varphi = u_s x$ – потенциал скорости потока воздуха, записанный для замороженной поверхности воды на участке длиной L , подверженной действию отрицательного скачка давления. В [6] показано, что время, за которое вихрь покидает вязкий слой под действием модифицированной силы Жуковского можно оценить как $\tau \approx \delta / u_s$, тогда, полагая $x = L$, получаем:

$$\varphi_t = \dot{u}_s x \approx \frac{3u_s}{\tau} L = 3u_s^2 \frac{L}{\delta} \quad (5)$$

Учитывая малую толщину вязкого слоя и пренебрегая квадратами малых величин, из (4-5) получаем приблизительную оценку для максимального возвышения поверхности воды под действием отрицательного скачка давления:

$$h_{\max} \approx \frac{\rho_a}{\rho} \frac{3u_s^2}{g} \frac{L}{\delta} \quad (6)$$

Для скорости ветра $u = 415 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ (6) дает для возвышения длиной $L = 0.9 \text{ см}$ (рис.1а): $h_{\max} \approx 0.15 \text{ см}$. Этот результат хорошо согласуется по порядку величины с экспериментальными данными: $h_{\max} \approx 0.2 \text{ см}$, что подтверждает предложенную физическую модель деформации поверхности воды вихрями, образующимися в вязком слое тормозящегося ветрового потока.

На рис. 1 показан момент вылета вихрей в зоне генерации: вихри вылетают как над плоской поверхностью, деформируя ее (первое возвышение на участке), так и над гребнями, возникшими выше по потоку при предыдущем вылете вихрей. Амплитуда гребней волны увеличивается вдоль по потоку, а площадь возвышения поверхности под вторым гребнем в 2 раза больше площади первого. Это возможно, если первый гребень, перемещаясь вдоль по потоку, оказывается в зоне вылета второго вихря в момент его вылета. В таком «резонансном» случае появляются условия для максимального роста амплитуды волны в начале зоны генерации. Вынужденные колебания водной поверхности будут устойчивы, если волновой пакет за период вылета вихрей T_{ed} окажется под следующим вихрем в цепочке. Для этого должно выполняться условие: $s = UT_{ed}$, где $U = c - dc/d\lambda$ – групповая скорость волны, а c – ее фазовая скорость. Для волн малой амплитуды на глубокой воде [7]:

$$U = \frac{c}{2} \frac{1 + (3T_s / \rho g) k^2}{1 + (T_s / \rho g) k^2}, \quad c = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{2\pi T_s}{\lambda \rho}} \quad (7)$$

где $k = 2\pi / \lambda$. Таким образом, условия резонанса обусловлены равенствами

$$s \approx \lambda, \quad T_{ed} = T, \quad (8)$$

где $T = \lambda / U$ – время прохождения пакетом волн участка длиной $s = \lambda$.

Для того, чтобы получить условия резонанса, надо найти пересечения зависимостей $T_{ed}(\lambda)$ и $T(\lambda)$. Были проведены расчеты для скорости ветра 250, 300, 500 и 700 $\text{см} \cdot \text{с}^{-1}$. Для заданной скорости ветра длина устойчивой волны определяется

параметром u_x . При скорости ветра $300 \text{ см}\cdot\text{с}^{-1}$ условия (8) выполняются в диапазоне длин волн $5 \leq \lambda \leq 8 \text{ см}$, для $u = 290 \text{ см}\cdot\text{с}^{-1}$ существует только одна резонансная волна $\lambda_0 = 4 \text{ см}$, для $u < 290 \text{ см}\cdot\text{с}^{-1}$ функции $T_{ed}(\lambda)$ и $T(\lambda)$ не имеют пересечений: резонанс невозможен. Это значит, что генерации устойчивых волн не возникает, что совпадает с натурными наблюдениями: в этом случае возникает лишь рябь, которая быстро затухает. При скорости $u > 320 \text{ см}\cdot\text{с}^{-1}$ существует только одна резонансная волна, причем с ростом скорости ветра длина резонансной волны λ_0 уменьшается, что также совпадает с натурными данными.

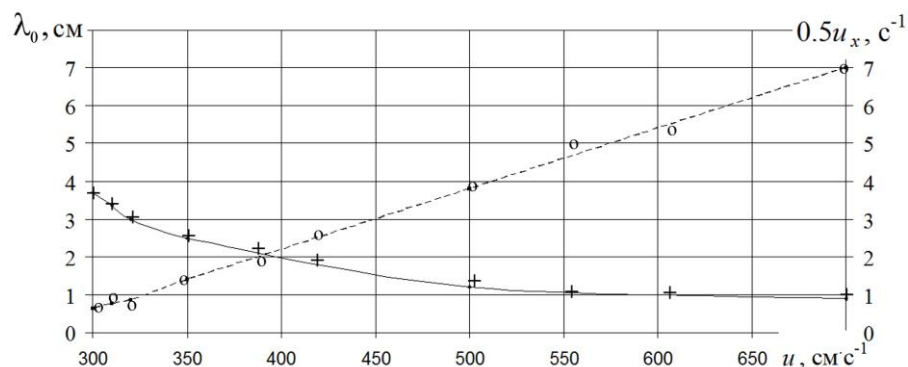


Рис.2 Зависимость длины резонансной волны от скорости ветра

Зависимость минимальных значений $\lambda_0(u)$ для чистой воды приведена на рис. 2 сплошной линией, соответствующая резонансу зависимость $u_x(u)$ дана штриховой линией. Значками показаны данные экспериментов, выполненных в лаборатории по методике описанной выше. Отличие экспериментальных и расчетных данных не превышают доверительного интервала, рассчитанного для вероятности 0.67 и составляющего примерно 10% от измеряемой величины для длины волны и 15% для параметра u_x .

Хорошее соответствие расчетных и экспериментальных данных показывает, что предложенная модель генерации ветровых волн вихрями, периодически возникающими и покидающими вязкий слой тормозящегося стационарного (в среднем) потока воздуха, справедлива.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Прандтль «Гидроаэромеханика» М.-И.: РХД. 2000.
2. П.Ю. Волков. // Изв. АН, Физика атмосферы и океана. 2001. Т. 37. № 6. С.834.
3. О.Н. Мельникова, Т.А. Нивина. // Изв. РАН. Сер. Физическая. 2008. Т. 72. № 12. С. 1789.
4. О.Н. Мельникова, К.В. Показеев. // Вестник Московского Университета. Серия 3. Физика. Астрономия, 2015. Т. 70. №5. С. 94.
5. Е.А. Новиков. // Изв. АН, Физика атмосферы и океана. 1981. Т. 17. № 9. С. 956.
6. О.Н. Мельникова «Динамика руслового потока». М.:Макс Пресс. 2006.
7. Дж. Лайтхилл «Волны в жидкости» М.:Мир. 1981.

О поведении жидких частиц, участвующих в волновом движении границы раздела двух движущихся несмешивающихся жидкостей

Д.Ф. Белоножко, А.А. Очиров

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

belonozhko@mail.ru

Введение. Общеизвестно, что распространение бегущей волны по свободной поверхности жидкости инициирует циклическое движение индивидуальных жидких частиц. В учебной литературе обычно упоминается лишь о самой простой ситуации, когда частички тяжелой несжимаемой жидкости, участвующие в волновом движении, совершают круговые движения в вертикальной плоскости. В специализированной литературе предметом исследования неоднократно становилось не только циклическое, но и дрейфовое движение жидких частиц в направлении распространения волны. Этот феномен называется «Дрейф Стокса». Скорость этого дрейфа пропорциональна квадрату амплитуды волны и экспоненциально убывает с глубиной. Даже в незначительно усложненном случае, когда над идеальной жидкостью располагается другая менее плотная идеальная жидкость взаимоотношение движений различных жидких частиц примыкающих с разных сторон к возмущенной волновым движением границе раздела остается вне поля зрения общепринятых представлений. Еще менее освещенным оказывается вопрос описания движений индивидуальных жидких вблизи границы раздела жидкостей, движущихся друг относительно друг друга. Само поле скоростей в задачах подобного рода неоднократно рассчитывалось и аналитическими и численными методами, как правило, в связи с интересом исследователей к явлению неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. Но все эти исследования в подавляющей части имеют дело с эйлеровым полем скоростей, которое не дает непосредственного описания движения индивидуальных жидких частиц. В настоящем исследовании предпринята попытка заполнить описанный пробел в задачах подобного рода и предложить аналитическое построение, позволяющее сосредоточиться на выяснении закономерностей движения именно индивидуальных жидких частиц.

Математическая формулировка задачи. Рассматривались две тяжелые идеальные несжимаемые несмешивающиеся жидкости, движущие друг относительно друга с постоянной горизонтальной скоростью U_0 в декартовой системе координат, в которой ось Oz направлена вертикально вверх против направления действия силы поля силы тяжести g . А плоскость Oxy совпадает с уровнем, по которому распространяется плоская капиллярно-гравитационная волна $z = \xi(x, t)$ с волновым числом k и амплитудой A . Полагалось, что нижняя жидкость с плотностью ρ^w занимает полупространство $z < 0$, а верхняя менее плотная верхняя жидкость плотности $\rho^a < \rho^w$ – полупространство $z > 0$. Коэффициент поверхностного натяжения γ на поверхности раздела полагался известным. Без уменьшения общности можно считать нижнюю жидкость покоящейся, верхнюю – движущейся в положительном направлении оси Ox . Для простоты движение жидкости полагалось независимым от горизонтальной координаты y .

Задача решалась методом разложения по малому параметру $\varepsilon = Ak$, пропорциональному отношению амплитуды волнового движения к длине волны. В дальнейшем изложении для краткости будут употребляться слова «порядок малости по амплитуде». Задача стандартным образом разбивалась на задачи различных порядков малости [1], которые последовательно решались до определения главных лидирующих

слагаемых в циклической и дрейфовой компонентах движения жидких частиц. Решение задачи первого порядка малости для отклонения ξ_1 , гидродинамического потенциала верхней жидкости φ_1 и гидродинамического потенциала нижней жидкости ψ_1 имеет вид:

$$\xi_1 = A \cos(kx - \omega t); \quad \psi_1 = A\Lambda \exp(kz) \sin(kx - \omega t); \quad \varphi_1 = A\Theta \exp(-kz) \sin(kx - \omega t) \quad (1)$$

Константы $\Lambda = \omega/k$ и $\Theta = -\omega/k + U_0$ определяются волновым числом и скоростью движения верхней жидкости. Циклическая частота волнового движения ω связана с волновым числом и другими параметрами задачи дисперсионным уравнением:

$$\omega = \left(kU_0\rho^a + \sqrt{k(-kU_0^2\rho^w\rho^a + k^2\gamma(\rho^w + \rho^a) + g(\rho^w - \rho^a)(\rho^w + \rho^a))} \right) / (\rho^w + \rho^a) \quad (2)$$

Переход к лагранжевым переменным. Для математического описания движения индивидуальных жидких частиц необходимо перейти от эйлерового представления задачи (1) к полю скоростей в переменных Лагранжа. В работе [2] можно найти способ такого перехода, который с точностью до слагаемых второго порядка малости по амплитуде волны сводится к применению формул:

$$\begin{aligned} u_L &= u_1 + u_2 + \left(\int_0^t u_1 d\tau \right) \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x} + \left(\int_0^t v_1 d\tau \right) \cdot \frac{\partial u_1}{\partial z}; \\ v_L &= v_1 + v_2 + \left(\int_0^t u_1 d\tau \right) \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x} + \left(\int_0^t v_1 d\tau \right) \cdot \frac{\partial v_1}{\partial z} \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $u = u(x, z, t)$ и $v = v(x, z, t)$ - горизонтальная и вертикальная составляющие эйлеровой скорости, а $u_L = u_L(x, z, t)$ и $v_L = v_L(x, z, t)$ - горизонтальная и вертикальная компоненты лагранжевой скорости жидкой частички. Нижним индексом обозначена принадлежность к задаче соответствующего порядка малости по амплитуде волны в эйлеровом представлении. Формулы (3) подразумевают, что в начальный момент времени $t=0$ эйлерова и лагранжевы скорости равны, а после интегрирования координаты x, z приобретают смысл координат $x = a, z = b$ материальной частички в начальный момент времени $t=0$. Важно отметить, формулы (3) можно применять только при перемещениях жидкой частички на величину порядка амплитуды волны. При выводе этих формул использовалось разложение по степеням смещения частички жидкости. Это позволяет без дополнительных усилий рассчитать лагранжево поле скоростей только в нижней жидкости. После интегрирования по времени получаются искомые соотношения, описывающие траектории движения частичек нижней жидкости:

$$X^w = x - Ae^{kz} \sin(kx - \omega t) + A^2 kt \omega e^{2kz}; \quad Z^w = z + Ae^{kz} \cos(kx - \omega t). \quad (4)$$

В выражениях (4) учтено, что в циклическом движении жидкой частички лидирующими слагаемыми являются слагаемые первого порядка малости по амплитуде волны, а в дрейфовом - компоненты второго порядка малости, возникающие из интегральных слагаемых в формулах (3). В формулах (4) как раз и выписаны только главные слагаемые, характеризующие циклические и дрейфовые свойства движения жидкой частички.

Чтобы корректно применить формулы (3) для расчета лагранжевой скорости частичек верхней движущейся жидкости, необходимо сначала преобразовать эйлерово описание поля ее скоростей в эйлерово же описание, связанное с системой отсчета, движущейся со скоростью U_0 вдоль оси Ox . Без уменьшения общности полагалось, что оси старой и новой систем координат параллельны, а при $t=0$ начала обеих координатных систем совпадают. При пересчете свойств волнового движения в новую систему отсчета принципиально важно учесть эффекта Доплера и изменить частоту волнового движения на новое значение $\omega = \omega - kU_0$. В новой системе отсчета применение формул (3) и интегрирование по времени приводит к выражениям для траекторий жидкой частички верхней жидкости (в движущейся со скоростью U_0 вдоль оси Ox системе отсчета):

$$X^a = x + Ae^{-kz} \sin(kx - \omega t) + A^2 kt \omega e^{-2kz}; \quad Z^a = z + Ae^{-kz} \cos(kx - \omega t). \quad (5)$$

Также, как и в случае с соотношениями (4) для циклических и дрейфовых слагаемых оставлены только лидирующие составляющие полного выражения. Координаты x и z , входящие в эти формулы, имеют смысл констант. Они описывают «среднее» положение частицы при $t=0$ и являются одинаковыми в обеих рассмотренных системах отсчета. В этой связи, формулы (5) описывают не волновой, а циклический процесс (аналогичный колебаниям часового маятника), который в рамках преобразований Галилея при переходе в любую другую инерциальную систему отсчета сохраняет частоту своего повторения. В связи со сказанным, при обратном переходе в неподвижную систему отсчета частоту изменять не нужно. Таким образом, для получения вида траекторий частичек верхней жидкости в неподвижной системе отсчета отнесенной к нижней жидкости достаточно изменить лишь правую часть первого соотношения (5) – добавить в нее слагаемое $U_0 t$.

Результаты. В рассматриваемой модели волновое движение с длиной волны $\lambda = 2\pi/k$ является бегущей волной постоянной амплитуды, только если тангенциальный скачок скорости на поверхности раздела жидкостей, измеряемый значением U_0 , не превышает критического значения:

$$U_0 \leq U_* = \frac{k^2 \gamma (\rho^a + \rho^w) + g (\rho^a - \rho^w)}{k \rho^a \rho^w}$$

Если $U_0 > U_*$ решением задачи является бегущая волна с экспоненциально нарастающей во времени амплитудой и описывает начальную стадию развития неустойчивости тангенциального разрыва скорости.

Анализ выражений (4) и (5) показал, что характер движения индивидуальных жидких частичек, примыкающих к поверхности раздела жидкостей с разных сторон, не настолько самоочевиден, чтобы оказаться простым следствием неких заранее высказанных качественных рассуждений.

Для определенности, рассматривались волновые движения, описывающие распространение волны вдоль направления горизонтальной оси Ox (слева направо для стороннего наблюдателя). В неподвижной системе отсчета, связанной с нижней жидкостью, частички этой жидкости совершают циклические движения по часовой стрелке с небольшим смещением вправо, после каждого цикла. Частички же верхней жидкости при $U_0 = 0$ циклически петляют с той же частотой против часовой стрелки, с каждым периодом также несколько смещаясь вправо. С увеличением U_0 период

циклических движений частиц верхней жидкости увеличивается вместе с дрейфовым сдвигом за период. Петли траекторий частичек верхней жидкости с ростом U_0 растягиваются до тех пор, пока не трансформируются в плавные периодические линии без самопересечений. Эти линии продолжают «распрямляться» и, при достижении скорости верхней жидкости значения $U_0 = \omega/k$, полностью вытягиваются в горизонтальные прямые. Условие $U_0 = \omega/k$ означает, что скорость верхней жидкости сравнялась с фазовой скоростью, распространяющейся по границе раздела волны. В этих условиях частички нижней жидкости продолжают совершать петлеобразные движения со сдвигом вправо, а частички верхней жидкости участвуют лишь в общем поступательном движении со скоростью $U_0 = \omega/k$. При дальнейшем увеличении скорости $U_0 > \omega/k$ траектории частичек нижней жидкости снова выгибаются в периодические волнообразные кривые. При переходе к неустойчивому режиму $U_0 > U_*$ амплитуда этих волнообразных движений начинает расти со временем. Для частичек нижней жидкости будет наблюдаться нарастание амплитуды циклических движений, как и прежде, совершаемых по часовой стрелке. Дрейфовая компонента движения нижней жидкости тоже начнет увеличиваться со временем.

В системе отсчета, движущейся вместе с верхней жидкостью, со скоростью U_0 движение частичек верхней жидкости будет выглядеть иначе. При увеличении U_0 от нуля до значения ω/k наблюдатель будет «догонять» убегающие от него гребни волн и регистрировать увеличение периода циклического движения частиц верхней жидкости, сопровождаемого уменьшением дрейфовой скорости вдоль направления распространения волны. При $U_0 = \omega/k$ и циклическое и дрейфовое движения полностью прекратятся, верхняя жидкость превратится в покоящуюся, а волновой рельеф поверхности раздела «застынет» во времени. С дальнейшим увеличением скорости $U_0 > \omega/k$ движущейся с верхней жидкостью наблюдатель зафиксирует движение гребней волн влево и возобновление циклических движений жидких частичек, но уже по часовой стрелке. При этом появится нарастающее с увеличением U_0 среднее дрейфовое движение влево – по движению гребней волн (в выбранной системе отсчета). При переходе к неустойчивому режиму $U_0 > U_*$ амплитуда циклического и скорость дрейфового движения начнут расти со временем.

Выводы. Характер движения индивидуальных жидких частиц вблизи возмущенной волновым движением горизонтальной поверхности раздела двух несмешивающихся жидкостей существенно зависит от скорости относительного движения контактирующих сред. Частички, относящиеся к разным жидкостям, могут совершать как противоположенные так и сонаправленные циклические движения с различным периодом. При определенных условиях движение частичек одной из жидкостей вырождается в простое прямолинейное движение с постоянной скоростью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д.Ф. Белоножко, С.О. Ширяева, А.И. Григорьев “Нелинейные волны на заряженной поверхности жидкости” Ярославль: ЯрГУ, 2006 – 288с.
2. П. Ле Блон, Л. Майсек “Волны в океане Ч.1.” М.: Мир, 1981.

О нелинейных поправках к частотам волн на поверхности заряженной струи, движущейся относительно внешней материальной среды

Н.А. Петрушов

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
mikola_imba@mail.ru

Феномен капиллярного распада на отдельные капли струй жидкости и в частности ее электродиспергирования широко используется в технике и технологии [1,2]. Само явление заключено в экспоненциальном росте амплитуд неустойчивых волн, которых на свободной поверхности или границе раздела сред может быть бесконечное множество. Впервые проблема устойчивости бесконечной струи идеальной жидкости по отношению к капиллярным осесимметричным волнам малой амплитуды была сформулирована и решена Рэлеем в линейном приближении в конце позапрошлого века. В асимптотических расчетах третьего порядка малости [3] становится возможным определить нелинейную поправку к частотам капиллярных волн на поверхности струи. В последнее время выполнено много теоретических аналитических исследований физических закономерностей распада на капли струй, проведенных как в линейных, так и в нелинейных расчетах по амплитуде волн, однако, подобные исследования исключительно редко проводятся с учетом нелинейной поправки к частоте. Наличие нелинейной поправки может повлиять на область неустойчивости капиллярных волн, а также отразиться на инкременте неустойчивости, поэтому учет нелинейной поправки играет важную роль при исследовании капиллярного распада струй.

Рассматривается задача о расчете капиллярных волн на поверхности струи радиусом R и плотностью ρ_1 , движущуюся в радиальном электростатическом поле со скоростью \vec{U}_0 относительно внешней среды с плотностью ρ_2 . Коэффициент поверхностного натяжения равен σ . Радиальное электростатическое поле \vec{E} будет создавать индуцированный заряд на поверхности струи плотностью χ . Задача решается в безразмерных переменных, где R , σ и ρ_1 выбраны в качестве характерных масштабов. Полная математическая постановка задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{u}_1 + (\vec{u}_1, \nabla) \vec{u}_1 &= -\nabla p_1; & \partial_t \vec{u}_2 + (\vec{u}_2, \nabla) \vec{u}_2 &= -\frac{1}{\rho} \nabla p_2 \\ \operatorname{div} \vec{u}_1 &= 0; & \operatorname{div} \vec{u}_2 &= 0; & \operatorname{div} \vec{E} &= 0 \\ r \rightarrow \infty: \vec{E} &\rightarrow 0; & \vec{u}_2 &\rightarrow -\vec{U}_0; & r \rightarrow 0: \vec{u}_1 &\rightarrow 0 \\ r = 1 + \xi(\varphi, z, t), \quad |\xi| &= 1: & \frac{dF}{dt} &= 0, & F &\equiv r - 1 - \xi(\varphi, z, t) \\ (\vec{n}, \vec{u}_1) &= (\vec{n}, \vec{u}_2) = u_n; & \Phi(r, \varphi, z, t) &= \Phi_s(t); & p_1 - p_2 + p_E - p_\sigma &= 0 \\ p_E &= \frac{E_0^2}{4\pi}; & p_\sigma &= \operatorname{div} \vec{n}; & \vec{n} &= \frac{\nabla F}{|\nabla F|}; & \rho &\equiv \frac{\rho_2}{\rho_1} \\ \int_V dV &= \pi\lambda; & V &\equiv \{0, r, 1 + \xi(\varphi, z, t); 0, \varphi, 2\pi; z_0, z, z_0 + \lambda\} \\ \int_S \frac{E_n}{4\pi} dS &= 2\pi\chi\lambda; & S &\equiv \{r = 1 + \xi(\varphi, z, t); 0, \varphi, 2\pi; z_0, z, z_0 + \lambda\} \end{aligned}$$

где $\xi(\varphi, z, t)$ – возмущение на поверхности струи, $\chi = E_n / 4\pi$ – поверхностная плотность заряда, $\Phi(r, \varphi, z, t)$ – электростатический потенциал, \vec{u}_1 и \vec{u}_2 – поле скоростей в струе и внешней среде соответственно.

Решение задачи находится асимптотическим методом путем разложения неизвестных функций (возмущение на свободной поверхности, гидродинамические потенциалы поля скоростей в струе и внешней среде, электростатический потенциал во внешней среде) с точностью до слагаемых пропорциональных третьей степени малой амплитуды начального возмущения ε на поверхности струи.

В задаче третьего порядка малости становится возможным найти нелинейные поправки к частотам капиллярных волн, которые имеют второй порядок малости, при чем для каждой частоты определена своя нелинейная поправка:

$$\omega_1 \equiv s_{m,k}^{(1)} + \varepsilon^2 \delta_1 + O(\varepsilon^3); \quad \omega_2 \equiv s_{m,k}^{(2)} + \varepsilon^2 \delta_2 + O(\varepsilon^3), \quad (1)$$

где ω_j – полная частота волны, бегущей по поверхности струи, δ_j – нелинейная поправка к частоте $s_{m,k}^{(j)}$, $s_{m,k}^{(j)}$ – частота, определяемая дисперсионным уравнением, полученным в первом порядке малости:

$$s^2 \mp \frac{2\delta_m}{\beta_m} s - \frac{\kappa_m}{\beta_m} = 0 \quad (2)$$

$$\beta_m(k) \equiv \rho h_m^{-1} - g_m^{-1} = \frac{\rho g_m - h_m}{g_m h_m}; \quad \delta_m(k, We, \rho) \equiv k \sqrt{\rho We h_m^{-1}}$$

$$\kappa_m(k, \chi, We) \equiv 1 - m^2 - k^2 - w(1 + h_m) - We \cdot k^2 h_m^{-1}$$

$$h_m(k) \equiv \frac{k K'_m(k)}{K_m(k)} = m - \frac{k K_{m+1}(k)}{K_m(k)}; \quad g_m(k) \equiv \frac{k I'_m(k)}{I_m(k)} = m + \frac{k I_{m+1}(k)}{I_m(k)}$$

$$w \equiv 4\pi\chi^2; \quad We \equiv \rho U_0^2$$

где $I_m(k)$ и $K_m(k)$ – модифицированные функции Бесселя. Выражения нелинейных поправок δ_j к частотам капиллярных волн неприводятся ввиду большой громоздкости. Исследуем влияние скорости движения струи (параметр We) и поверхностной плотности заряда (параметр w) на нелинейную поправку δ_1 . Для нелинейной поправки δ_2 будет справедливо всё тоже самое, но с противоположным значением.

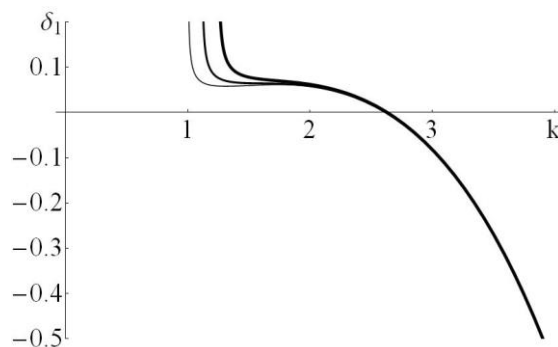


Рис. 1. Зависимость нелинейной поправки δ_1 от волнового числа k при $m = 0$, $\rho = 0.001$, $w = 0$ и различных значениях параметра We : $We = 0$ (тонкая линия), $We = 0.3$ (толстая линия), $We = 0.6$ (жирная линия)

На рис. 1 представлена зависимость нелинейной поправки δ_1 к частоте $s_{m,k}^{(1)}$ от волнового числа k в отсутствие заряда на поверхности струи ($w=0$) при $m=0$, $\rho=0.001$ и различных значениях параметра We . Из рис. 1 видно, что зависимость нелинейной поправки δ_1 от волнового числа носит знакопеременный характер, о чем говорит наличие перехода из положительной области значений в отрицательную для некоторого значения волнового числа $k \approx 2.63$. Из этого следует, что частоту волн с волновыми числами $1 < k < 2.63$ нелинейная поправка увеличивает (но уменьшает по модулю, так как $s_{m,k}^{(1)} < 0$), а частоту волн с волновыми числами $k > 2.63$ нелинейная поправка уменьшает (но увеличивает по модулю, так как $s_{m,k}^{(1)} < 0$). Интересный факт, что на частоту волны с волновым числом $k \approx 2.63$ нелинейная поправка не оказывает влияния. Отметим, что наблюдается явно выраженная тенденция увеличения модуля нелинейной поправки δ_1 с увеличением волнового числа. Резкий рост нелинейной поправки δ_1 при стремлении волнового числа к единице объясняется приближением к области неустойчивости. Как видно из рисунка, резкий рост нелинейной поправки δ_1 сдвигается в область больших волновых чисел при увеличении параметра We , ровно как при увеличении параметра We область неустойчивости сдвигается в область больших волновых чисел. В целом зависимость нелинейной поправки δ_1 от We в области устойчивости отсутствует или слабо выражена. Аналогичная ситуация в отсутствие относительного движения струи и внешней среды ($We=0$) и при $m=0$, $\rho=0.001$ и отличных значениях полевого параметра w .

На рис. 2 представлена зависимости нелинейной поправки δ_1 к частоте $s_{m,k}^{(1)}$ от волнового числа k для изгибных волн ($m=1$) при $\rho=0.001$, $We=0$ и различных значениях полевого параметра w .

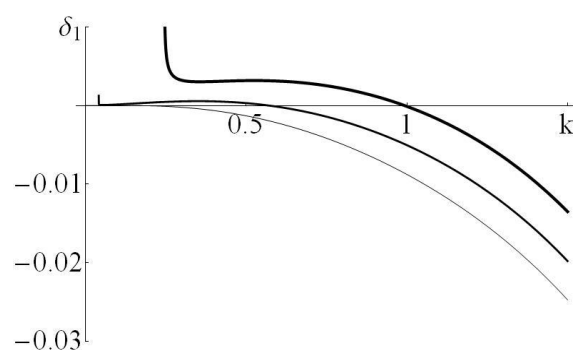


Рис. 2. Зависимость нелинейной поправки δ_1 от волнового числа k при $m=1$, $\rho=0.001$, $We=0$ и различных значениях параметра w : $w=0$ (тонкая линия), $w=0.3$ (толстая линия), $w=0.6$ (жирная линия)

Нелинейная поправка δ_1 к частотам изгибных волн ($m=1$) обладает знакопостоянством, если волны для всех волновых чисел будут устойчивы. Однако при появлении области неустойчивости нелинейная поправка δ_1 к частотам становится знакопеременной. При увеличении параметров We и w нелинейная поправка δ_1 к частоте увеличивается.

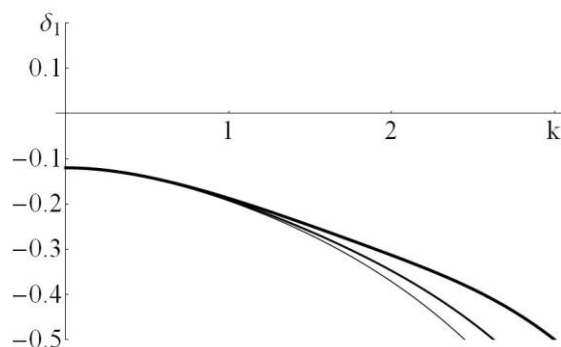


Рис. 3. Зависимость нелинейной поправки δ_1 от волнового числа k при $m = 2$, $\rho = 0.001$, $w = 0$ и различных значениях параметра We : $We = 0$ (тонкая линия), $We = 3$ (толстая линия), $We = 4$ (жирная линия).

На рис. 3 представлена зависимость нелинейной поправки δ_1 от волнового числа k для изгибно-деформационных волн ($m = 2$) при $\rho = 0.001$, $w = 0$ и различных значениях параметра We . График описывает нелинейные поправки в области устойчивости, когда все длины волн устойчивы. Для изгибно-деформационных волн нелинейные поправки к частотам носят пороговый характер и обладают наименьшим по модулю значением (максимумом для отрицательной поправки δ_1). Увеличение значений параметра We слабо влияет на нелинейную поправку в области больших длин волн ($k < 1$), но в области коротких длин волн ($k > 1$) приводит к увеличению нелинейной поправки δ_1 . Увеличение же зарядового параметра w приводит к увеличению нелинейной поправки δ_1 во всем диапазоне волновых чисел.

Полученные асимптотические разложения частот (1) будут равномерно пригодными [3] пока поправки второго порядка малости остаются пренебрежимо малыми по сравнению с основной частотой волны. Условия неустойчивости волны определяются появлением мнимой части у частот (1). Отметим, что выражения для нелинейных поправок к частотам волн были получены в третьем порядке малости, следовательно они зависят от решений нулевого, первого и второго порядков малости, а также от основных частот $s_{m,k}^{(j)}$, определяемых соотношением (3). Так как единственный радикал, от которого зависят нелинейные поправки, заключен в выражении основных частот $s_{m,k}^{(j)}$, то появление мнимой части у нелинейной поправки к частоте будет происходить при тех же условиях что и у основной частоты. Таким образом, нелинейные поправки к частотам капиллярных волн, полученные асимптотическим методом многих временных масштабов, не влияют на область неустойчивости волн на поверхности бесконечной цилиндрической струи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аметистов Е., Блаженков В., Городов А. «Монодиспергирование вещества: принципы и применение» М.: Энергоатомиздат, 1991. 336 с.
2. Ентов В., Ярин А. // ВИНТИ. Итоги науки и техники. Сер. "Механика жидкости и газа". 1984. Т. 17. С. 112—197.
3. Найфэ А. «Введение в методы возмущений» М.: Мир, 1984. 535 с.

О пространственной неустойчивости заряженной струи, движущейся относительно внешней материальной среды

Н.А. Петрушов

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

mikola_imba@mail.ru

Впервые проблема корректного теоретического аналитического исследования устойчивости бесконечной струи идеальной жидкости по отношению к капиллярным осесимметричным волнам малой амплитуды была сформулирована и решена Рэлеем [1] в конце позапрошлого века. В своих работах он опирался на результаты экспериментальных исследований Савара, Магнуса, Плато, Бидона. Рассматривая амплитуды цилиндрических капиллярных осесимметричных волн бесконечно малой амплитуды в качестве нормальных (главных) координат колебательной системы с бесконечно большим количеством степеней свободы, он составил функцию Лагранжа колебательной системы и выписал систему независимых уравнений Лагранжа для различных волновых чисел. Анализ полученной системы уравнений Лагранжа позволил исследовать устойчивость струи по отношению к капиллярным волнам различной длины. Рэлей получил соотношение, связывающее скорость роста амплитуды волнового возмущения и его длину волны. Время от момента возникновения синусоидального возмущения до момента распада струи на капли, вычисленное при помощи теории Рэя, хорошо согласовывалось с результатами опытов.

Рэлей решил полученную им систему относительно частоты ω капиллярных волн:

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{\rho a^3} \frac{ka \cdot J'_m(ka)}{J_m(ka)} \cdot (m^2 + k^2 a^2 - 1) \quad (1)$$

где γ – коэффициент поверхностного натяжения, ρ – плотность вещества струи, a – радиус струи, k – волновое число, m – азимутальное число, $J_m(z)$ – функция Бесселя.

Из уравнения (1) следует, что ω^2 положительная при $m \geq 1$ и любых вещественных значениях волнового числа k . При $m = 0$, ω^2 принимает отрицательные значения, если $ka < 1$, и положительные значения, если $ka > 1$. Так же Рэлей получил, что максимальное значение инкремент неустойчивости достигает при $k^2 a^2 \approx 0.4858$. Это условие соответствует длине волны $\lambda \approx 9.016 \cdot a$. Волны с указанной длиной имеют максимальный инкремент неустойчивости и определяют закономерности дробления струи на отдельные капли.

Предложенная Рэлеем теория позволяет получить хорошее соответствие теоретических результатов с экспериментом, но не способна описать поведение реальных струй. Появление мнимой части у частоты ω приводит к появлению инкремента у волны на протяжении всей длины струи, даже вблизи сопла, формирующего струю, которое всегда присутствует в эксперименте. В реальности возмущение пренебрежимо мало вблизи сопла и увеличивается по мере удаления от него. Случай, когда волновое число k вещественно, а частота ω – комплексная, называется *временной* неустойчивостью. Неустойчивость, когда частота ω – вещественная, а волновое число k – комплексное, называется *пространственной* неустойчивостью [2].

В связи со сказанным проведем исследование пространственной неустойчивости капиллярных волн на поверхности заряженной струи радиусом R , плотностью ρ_1 и поверхностной плотностью заряда χ движущуюся в радиальном электростатическом поле со скоростью \vec{U}_0 относительно внешней среды с плотностью ρ_2 . Коэффициент поверхностного натяжения равен σ . Задача решается в безразмерных переменных, где R , σ и ρ_1 выбраны в качестве характерных масштабов. Полная математическая постановка задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{u}_1 + (\vec{u}_1, \nabla) \vec{u}_1 &= -\nabla p_1; \quad \partial_t \vec{u}_2 + (\vec{u}_2, \nabla) \vec{u}_2 = -\frac{1}{\rho} \nabla p_2 \\ \operatorname{div} \vec{u}_1 &= 0; \quad \operatorname{div} \vec{u}_2 = 0; \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0 \\ r \rightarrow \infty: \quad \vec{E} &\rightarrow 0; \quad \vec{u}_2 \rightarrow -\vec{U}_0; \quad r \rightarrow 0: \quad \vec{u}_1 \rightarrow 0 \\ r = 1 + \xi(\varphi, z, t), \quad |\xi| = 1: \quad \frac{dF}{dt} &= 0, \quad F \equiv r - 1 - \xi(\varphi, z, t) \\ (\vec{n}, \vec{u}_1) = (\vec{n}, \vec{u}_2) &= u_n; \quad \Phi(r, \varphi, z, t) = \Phi_s(t); \quad p_1 - p_2 + p_E - p_\sigma = 0 \\ p_E &= \frac{E_0^2}{4\pi}; \quad p_\sigma = \operatorname{div} \vec{n}; \quad \vec{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}; \quad \rho \equiv \frac{\rho_2}{\rho_1} \end{aligned}$$

где $\xi(\varphi, z, t)$ – возмущение на поверхности струи, $\chi = E_n / 4\pi$ – поверхностная плотность заряда, $\Phi(r, \varphi, z, t)$ – электростатический потенциал, \vec{u}_1 и \vec{u}_2 – поле скоростей в струе и внешней среде соответственно.

Решение задачи находится асимптотическим методом путем разложения неизвестных функций с точностью до слагаемых пропорциональных первой степени малой амплитуды начального возмущения ε на поверхности струи.

В задаче первого порядка малости получено дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned} s^2 \mp \frac{2\delta_m}{\beta_m} s - \frac{\kappa_m}{\beta_m} &= 0 \tag{2} \\ \beta_m(k) \equiv \rho h_m^{-1} - g_m^{-1} &= \frac{\rho g_m - h_m}{g_m h_m}; \quad \delta_m(k, We, \rho) \equiv k \sqrt{\rho We h_m^{-1}} \\ \kappa_m(k, \chi, We) &\equiv 1 - m^2 - k^2 - w(1 + h_m) - We \cdot k^2 h_m^{-1} \\ h_m(k) \equiv \frac{k K'_m(k)}{K_m(k)} &= m - \frac{k K_{m+1}(k)}{K_m(k)}; \quad g_m(k) \equiv \frac{k I'_m(k)}{I_m(k)} = m + \frac{k I_{m+1}(k)}{I_m(k)} \\ w &\equiv 4\pi \chi^2; \quad We \equiv \rho U_0^2 \end{aligned}$$

где $I_m(k)$ и $K_m(k)$ – модифицированные функции Бесселя. Уравнение (2) разрешено относительно волнового числа k и исследовано при различных значениях параметров системы.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 16-31-0095.

ЛИТЕРАТУРА

1. Strutt J. // Proc. of the London Math. Soc. 1878. Vol. 10. Pp. 4—13.
2. J.B. Keller, S.I. Rubinow, Y.O. Tu // Phys. Fluids. 1973. V. 16. No 12. Pp. 2052—2055.

«Волны — убийцы» в морях, океанах и на берегу

Н.К. Шелковников

МГУ

shelkovnikov@phys.msu.ru

Основными общими факторами, порождающими разнообразные волновые движения в океане, являются: сила тяжести, стратификация и сжимаемость морской воды, вращение и сферичность Земли [1]. В более конкретных случаях волновые движения в морях и океанах происходят в результате взаимодействия гидросферы, атмосферы и литосферы.

Поверхностные ветровые волны являются яркой иллюстрацией процесса взаимодействия атмосферы и гидросферы. Параметры таких волн изменчивы и определяются в основном средней скоростью ветра U и продолжительностью его действия, с увеличением которого высота волн h , их период T и длина λ растут и могут достигать значительных размеров. Отдельные районы мирового океана сильно различаются по повторяемости и интенсивности волнения как по причине различий в условиях погоды, так и из-за разных размеров акваторий. Наиболее интенсивные ветровые волны наблюдаются в умеренных южных широтах («ревущие сороковые»), где частое прохождение циклонов при практически неограниченном водном пространстве приводит к тому, что скорость ветра может достигать примерно 50 м/с, высота волн до 30 метров, а их длина — до сотен метров [1]. В умеренных широтах северного полушария в Атлантическом и Тихом океанах при тех же максимальных скоростях ветра, наибольшие высоты волн несколько меньше (20м). Кроме того, в Северной Атлантике повторяемость штормов летом может быть в 20 раз меньше, чем зимой. А в Южной Атлантике эта разница в 3-4 раза. Во всех районах мирового океана интенсивность волнения, в основном, уменьшается от умеренных широт к экватору, хотя бывают и исключения. Во время исследования волнения в океане необходимо также измерять характеристики турбулентного потока воздуха в приповерхностном слое океана. Согласно [1], проведенные оценки показывают, что ветровые волны являются очень энергоемкими образованиями, заимствующими из турбулентного пограничного слоя атмосферы значительную часть его полной энергии. Кроме того, развитие волнения приводит к перестройке всего слоя трения атмосферы.

В последние десятилетия в научной литературе появились сведения о так называемых «волнах — убийцах», обладающих необычными свойствами. Так они могут возникать «ниоткуда» и исчезать в «никуда», «блуждать» в океанских просторах в течении долгого времени. Они якобы наблюдаются в прямых каналах и на берегу при соблюдении так называемого критерия существования «волны - убийцы» в виде $h \geq 2h_s$, где h_s — значительная высота волны (среднее значение одной трети наиболее высоких волн).

Что касается экспериментальных данных, то в статье [2] был рассмотрен процесс формирования ВУ при трансформации изначально узкого спектра начальных волн. Было показано, что при распространении достаточно крутых монохроматических и бихроматических волн происходит быстрое смещение частоты максимума спектра в низкочастотную область. Это смещение является основной причиной изменчивости амплитудно-частотного состава индивидуальных волн и, как следствие, образование волн-убийц. В Гданьске были проведены эксперименты в канале длиной 64 метра и глубиной 1,4 метра, при глубине воды 60см. Гашение волн осуществлялось с помощью бетонного склона. Было показано, что изначально монохроматические волны под влиянием неустойчивости постепенно трансформировались в нерегулярное волнение.

Развитие нерегулярности приводило к образованию отдельных пиков высоких волн в 2 раза превышающих значительную высоту h_s волн, при расстоянии 38-47м. Эти аномальные волны появлялись с того момента, когда значительная часть энергии волнения передалась в низкочастотную область. Таким образом, по мнению авторов, модуляционная неустойчивость порождала частоты, нелинейные взаимодействия между которыми и основной гармоникой приводили к сдвигу частоты максимума спектра в низкочастотную область. Этот процесс характеризовался быстрым пространственным изменением спектра — в рассматриваемом случае порядка 50 длин волн. В качестве критерия ВУ авторы использовали понятие «значительная высота волны», введенное Свердрупом и Манком в рамках гранта ВМФ США, направленного на предстоящую высадку десанта в южной Африке. С этой целью они ввели понятие средней высоты и периода 1/3 наиболее высоких волн в прибрежной зоне и назвали их «значительные волны» h_s . Позже Манк при рассмотрении процессов в прибрежной зоне использовал понятие уединенных волн.

С целью понимания реальности существования «волн — убийц» в морских условиях и критериев, при которых они могут появляться, например, в прямых каналах и на берегу нами был проведен анализ многолетних наблюдений в Черном, Средиземном морях, Тихом и Атлантическом океанах. В последнем случае высота волн достигала 10 метров. Во всех этих случаях, при условии глубокой воды, имело место существование цугов волн с наличием «9 вала». В качестве примера цугообразности волн на глубокой воде в море на рисунке 1 приведена волнограмма (запись возвышения уровня в фиксированной точке).

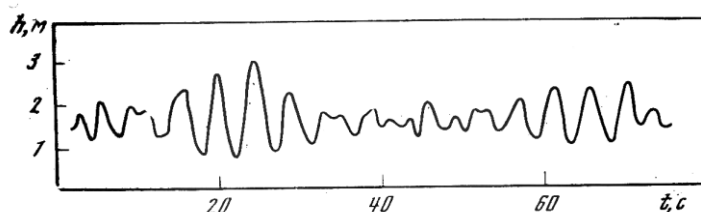


Рис 1. Пример волнограммы, иллюстрирующей цуг волн с «девятым валом».

Никаких аномалий, свидетельствующих о наличии «волн — убийц», в параметрах волн обнаружено не было. Кроме того, были проведены эксперименты в кольцевом аэрогидроканале.

На рисунке 2 приведены волнограммы формирования цугов волн с наличием «9 вала» на глубокой воде ($H > \lambda$) в кольцевом канале (рис 2 а). При дальнейшем развитии процесса, при постоянной глубине H и скорости ветра U , происходило увеличение длины волны λ , формировалось условие переходного периода (рис 2 б,в), когда $\lambda \approx H$. В дальнейшем, (при $\lambda > H$) наблюдалось возникновение уединенных волн (рис 2 г). При выключении ветра уединенная волна затухала, при этом время затухания было больше чем время развития. Так называемый критерий существования волны-убийцы на всех этих этапах не выполнялся, за исключением сформировавшейся уединенной волны.

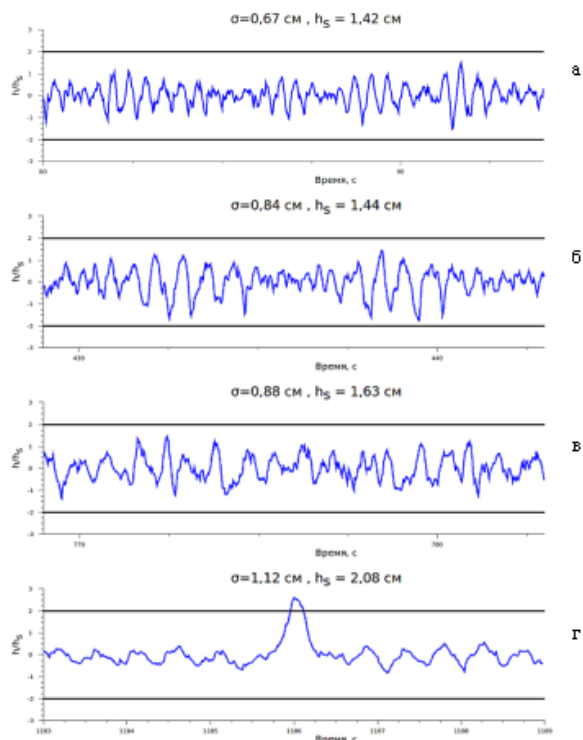


Рис 3 Процесс развития ветровых волн в кольцевом канале при постоянной глубине H и скорости ветра, на различных этапах развития: а) начальная стадия, при выполнении условий глубокой воды ($\lambda \ll H$), формируются цуги волн. б,в) переходный период ($\lambda \approx H$). г) заключительная стадия ($\lambda > H$) при котором формируется одна уединенная волна, которая существует до тех пор пока действует ветер. σ — стандартное отклонение водной поверхности.

Из выше приведенного следует, что при условии глубокой воды в океане и в кольцевом канале, имеют место цуги волн с наличием максимальной волны, а при условии мелкой воды — в кольцевом канале наблюдаются уединенные волны. Все эти процессы вполне объяснимы с точки зрения имеющихся данных о ветровых волнах. Ни при каких из перечисленных условий «волны — убийцы» не наблюдались, за исключением уединенной волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. М.М Заславский, А.С. Монин «Ветровые волны» Москва. Океанология. Физика океана. 1978 г. том 2. Гидродинамика океана.
2. С. Кузнецов, Я. Сапрыкина Экспериментальные исследования возникновения волн-убийц при эволюции узкого спектра крутых волн. Сборник трудов «Фундаментальная и прикладная гидрофизика», СПб, Научный центр РАН, 2012, том 5, №1.
3. Н.К. Шелковников «Вынужденный солитон в жидкостях» // Письма в ЖЭТФ 2005г Т.82 вып.10 720-723с.
4. Н.К. Шелковников «Экстремальные волны в океане» Известия РАН, серия физическая, 2016, том 80, №2 с 229-232.