

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
В РАДИОФИЗИКЕ И ОПТИКЕ**

<b>О волнах, распространяющихся вне одномерного фотонного кристалла с конечным числом слоев при его возбуждении полем точечного источника</b>	
<i>В.Ф. Апельцин</i> .....	4
<b>Метод гомотопии и метод проекционного сшивания для расчета направляемых мод периодической волноводно-лестничной структуры</b>	
<i>А.А. Быков</i> .....	7
<b>Применение метода Галеркина для расчета собственных волн периодических волноводов</b>	
<i>А.А. Быков</i> .....	12
<b>Математическое моделирование многослойных дифракционных решеток с самоподобным строением</b>	
<i>А.А. Петухов</i> .....	15
<b>Самоорганизация кластеров фрактальных нанодендритов</b>	
<i>П.А. Логачев, С.Б. Рыжиков, Ю.В. Рыжикова</i> .....	17
<b>Модель мягких ионов и уравнение состояния плазмы</b>	
<i>А.А. Белов, Н.Н. Калиткин, И.А. Козлитин, К.И. Луцкий</i> .....	20
<b>Моделирование волноведущих систем методом конечных элементов</b>	
<i>Н.А. Боголюбов</i> .....	23
<b>Методика высокопроизводительных вычислений в дискретном дарвинском моделировании</b>	
<i>Л.В. Бородачев</i> .....	26
<b>Задача сочленения радиальных и коаксиальных волноводов</b>	
<i>А.Л. Делицын</i> .....	29
<b>Эффект угловой аберрации на примере лазерной локации КА находящегося на геостационарной орбите</b>	
<i>М.М. Денисов, Т.С. Зиначева</i> .....	31
<b>Построение схемы FDTD высокого порядка точности методом сгущения сеток</b>	
<i>Ж.О. Домбровская, А.Н. Боголюбов</i> .....	36

<b>Математическая модель прямоугольной волноведущей системы с импедансными стенками</b>	
<i>А.И. Ерохин, И.Е. Могилевский, В.Е. Родякин, В.М. Пикунов</i> .....	38
<b>О преобразовании когерентного излучения фрактальными структурами</b>	
<i>П.В. Короленко, А.А. Красулин, А.Ю. Мишин, Р.Т. Кубанов</i> .....	42
<b>Гибридная схема метода дискретных источников в задачах дифракции электромагнитных волн на плоских наноструктурах в присутствии слоистой среды</b>	
<i>И.В. Лопушенко</i> .....	46
<b>Простые математические модели для исследования сложных видов синхронизации нелинейных автоколебательных систем</b>	
<i>М.Е. Мазуров</i> .....	50
<b>Дифракция электромагнитных волн на телах с диэлектрическими ребрами</b>	
<i>А.Н. Боголюбов, И.Е. Могилевский</i> .....	55
<b>Принципы моделирования полупроводниковых лазеров</b>	
<i>А.Г. Ржанов</i> .....	58
<b>Гибридный метод численного решения уравнения Пуассона в области с диэлектрическим углом</b>	
<i>М.И. Светкин, А.Н. Боголюбов, А.И. Ерохин, И.Е. Могилевский</i> .....	62
<b>Моделирование диэлектрических многослойных дифракционных решеток методом конечных элементов</b>	
<i>Д.А. Коняев, А.А. Петухов, А.В. Смирнов</i> .....	67
<b>Интерполяция, дифференцирование, интегрирование данных через конечномерные теоремы отсчетов</b>	
<i>Е.Н. Терентьев, Н.Е. Терентьев</i> .....	69
<b>Математические принципы настройки гребенок лучей в измерительно-вычислительных системах</b>	
<i>Е.Н. Терентьев, Н.Е. Терентьев</i> .....	72

**Использование леммы Лоренца для оценки напряжённости  
электромагнитного поля при отсутствии прямой видимости в  
лабиринтных системах**

*Б.С. Сорокин* ..... 75

**Моделирование характеристик крутильной системы по параметрам  
нити подвеса**

*В.М. Шахпаронов, Д.А. Самсонов*..... 76

## О волнах, распространяющихся вне одномерного фотонного кристалла с конечным числом слоев при его возбуждении полем точечного источника

В.Ф. Апельцин  
Московский Технический университет им. Н.Э. Баумана  
[vapeltsin@hotmail.com](mailto:vapeltsin@hotmail.com)

В работах [1-2] были исследованы свойства одномерного фотонного кристалла с конечным числом  $N$  ячеек периодичности, возбуждаемого полем плоской волны. Ввиду того, что образом Фурье плоской волны является, как известно, дельта функция, обратное преобразование Фурье от решения ОДУ для соответствующих образов Фурье отраженного структурой и прошедшего сквозь нее полей приводит к явным выражениям для них, не содержащим интегралов. Более того, при выполнении достаточно необременительных требований на соотношения толщин слоев ячейки периодичности и их диэлектрических проницаемостей:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_0 \sin^2 \alpha}}{\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_0 \sin^2 \alpha}} \quad (1)$$

( $\alpha$  - угол падения плоской волны), выражения для отраженного структурой и прошедшего сквозь нее полей приобретает наиболее простой вид

$$u_0(y, z) = \left\{ \frac{1}{1 + \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{2N}} - I \right\} e^{-ik_0(y \cos \alpha - z \sin \alpha)}. \quad (2)$$

$$u_{2N+1}(y, z) = (-I)^N \frac{e^{-ik_0(y \cos \alpha + (z + ND) \sin \alpha)}}{\left[ \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^N + \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^N \right]}. \quad (3)$$

Из (2), (3) следует, что при  $N \rightarrow \infty$  прошедшее поле  $u_{2N+1}(y, z)$  всегда стремится к нулю, а отраженное  $u_0(y, z)$ , - к нулю, или к отраженной плоской волне, в зависимости от того, какая из толщин слоев  $d_1$  или  $d_2$  больше. Тем самым, структура приобретает свойство либо волноведущей, либо свойство зеркала.

Более общая постановка задачи предполагает возбуждение такой структуры полем точечного источника. В этом случае решение существенно усложняется, Ближайший его аналог - решение задачи Зоммерфельда о возбуждении однородного диэлектрического полупространства [3]. Выражения для прошедшего и отраженного полей имеют вид интегралов Фурье:

$$u_{2N+1}(y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \sigma_1(\nu) d_1 p_2^N(\nu) p_3^{N-1}(\nu) p_4(\nu) p_1(\nu)}{\sigma_1(\nu) D_{2N+1}(\nu)} e^{-i\sigma_0(\nu)(z-z_0+ND)} e^{i\nu(y-y_0)} d\nu, \quad (4)$$

$$u_0(y, z) =$$

$$\frac{i}{4} H_0^{(1)} \left( k_0 \sqrt{(y-y_0)^2 + (z+z_0)^2} \right) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \sigma_1(\nu) d_1 D_{2N-1}^{(p_3, p_2)}(\nu) p_1(\nu)}{\sigma_1(\nu) D_{2N+1}(\nu)} e^{i\sigma_0(\nu)(z+z_0)} e^{i\nu(y-y_0)} d\nu -$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \sigma_1(\nu) d_1 p_3(\nu) p_4(\nu) D_{2N-2}^{(p_3, p_3)}(\nu) p_1(\nu)}{\sigma_1(\nu) D_{2N+1}(\nu)} e^{i\sigma_0(\nu)(z+z_0)} e^{i\nu(y-y_0)} d\nu. \quad (5)$$

Здесь использованы обозначения:  $\sigma_0(\nu) = \sqrt{k_0^2 - \nu^2}$ ;  $\sigma_{1,2}(\nu) = \sqrt{k_{1,2}^2 - \nu^2}$ ,  $p_1 = \frac{\sigma_1(\nu)}{i\sigma_0(\nu)\sin\sigma_1(\nu)d_1 - \sigma_1(\nu)\cos\sigma_1(\nu)d_1}$ ;  $p_2 = \frac{\sigma_1(\nu)}{q(\nu)\sin\sigma_1(\nu)d_1}$ ;  $p_3 = \frac{\sigma_2(\nu)}{q(\nu)\sin\sigma_2(\nu)d_2}$ ;  $p_4 = \frac{\sigma_2(\nu)}{i\sigma_0(\nu)\sin\sigma_2(\nu)d_2 - \sigma_2(\nu)\cos\sigma_2(\nu)d_2}$ ,  $q(\nu) = - \left[ \frac{\sigma_1(\nu)}{\operatorname{tg}\sigma_1(\nu)d_1} + \frac{\sigma_2(\nu)}{\operatorname{tg}\sigma_2(\nu)d_2} \right]$ .

Сомножитель  $D_{2N+1}(\nu)$  в знаменателях – определитель трехдиагональной матрицы, порядка  $2N+1$  с регулярной структурой, позволяющей исследовать расположение нулей этого определителя на плоскости комплексного переменного  $\nu$ . При этом оказывается, что у подынтегрального выражения в (4) как знаменатель, так и числитель, имеют нули одинакового порядка  $N$  в точках

$$\nu_m = \pm \sqrt{k_2^2 - \left(\frac{\pi m}{d_2}\right)^2}, \quad \nu_n = \pm \sqrt{k_1^2 - \left(\frac{\pi n}{d_1}\right)^2}, \quad (6)$$

что означает, в свою очередь, отсутствие поверхностных волн в пространстве ниже структуры. Остаются лишь точки ветвления второго порядка в  $\nu = \pm k_0$ ;  $\pm k_1$ ;  $\pm k_2$ , в интегралы по разрезам из которых преобразуется выражение (4), описывая так называемое дифракционное поле [4].

Определители  $D_{2N-1}^{(p_3, p_2)}$ ,  $D_{2N-2}^{(p_3, p_3)}$ , входящие в числители подынтегральных выражений в (5), являются определителями регулярных трехдиагональных матриц порядков  $2N-1$  и  $2N-2$ , главная диагональ которых состоит из единиц, а боковые содержат чередующиеся последовательности элементов  $p_2$ ;  $p_3$ , причем в первом случае диагональ начинается с  $p_3$  и заканчивается элементом  $p_2$ , а во втором – начинается и заканчивается элементом  $p_3$ . На этот раз оказывается, что подынтегральные выражения в (5) имеют полюса на плоскости  $\nu$ , что приводит к возбуждению выше структуры волн вида

$$A_m e^{-\sqrt{k_2^2 - k_0^2 - \left(\frac{\pi m}{d_2}\right)^2} (z+z_0)} e^{\pm i \sqrt{k_2^2 - \left(\frac{\pi m}{d_2}\right)^2} (y-y_0)}, \quad \text{или} \quad A_n e^{-\sqrt{k_1^2 - k_0^2 - \left(\frac{\pi n}{d_1}\right)^2} (z+z_0)} e^{\pm i \sqrt{k_1^2 - \left(\frac{\pi n}{d_1}\right)^2} (y-y_0)},$$

которые, в зависимости от соотношений между параметрами  $k_2$ ,  $k_1$ ,  $k_0$ , а также  $d_1$ ,  $d_2$ , и значений целочисленных параметров  $n$  и  $m$  могут содержать конечный спектр поверхностных волн, распространяющихся, или, наоборот, экспоненциально убывающих вдоль структуры, или только волноводные моды, распространяющиеся или экспоненциально убывающие вдоль неё.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Ф. Апельцин, Т.Ю. Мозжорина // Наука и инновации (электронный журнал). 2013, №9.
2. В.Ф. Апельцин, Т.Ю. Мозжорина // Математическое моделирование и численные методы; 2014 вып. 2, С. 3-27.
3. А. Зоммерфельд “Дифференциальные уравнения в частных производных физики” М. : И. Л., 1950.
4. Р. Миттра, С. Ли “Аналитические методы теории волноводов” М. : “МИР”, 1974.

## Метод гомотопии и метод проекционного сшивания для расчета направляемых мод периодической волноводно-лестничной структуры

А.А. Быков

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет  
[abkov@yandex.ru](mailto:abkov@yandex.ru)

**1. Введение.** В настоящее время активно развивается технология использования многорезонаторных клистронов для генерирования и усиления электромагнитных волн миллиметрового диапазона [1], [2]. В качестве резонаторов используются волноводные лестничные структуры (ВЛС), состоящие из нескольких цилиндрических областей, соосно соединенных между собой волноводными переходами с фланцами. Практически всегда поиск собственной моды включает два этапа,

- (1) составление и решение характеристического уравнения,
- (2) расчет профиля, фазовых и энергетических характеристик найденной моды.

В данной работе мы рассматриваем модель резонаторной структуры, состоящей из большого числа одинаковых секций, что позволяет считать систему периодической. Одна из проблем, возникающих при расчете резонатора, состоит в обеспечении нужного типа распределения поля, обеспечивающего эффективное взаимодействие с электронным пучком. В большом по сравнению с длиной волны резонаторе имеется много различных типов осцилляций, причем интересующая нас мода не является главной [3].

**2. Метод гомотопии.** В данной работе мы предлагаем новый метод расчета резонатора, основанный на идее гомотопии, т.е. погружения задачи о собственных колебаниях в семейство задач, зависящих от параметра (обозначим его  $\tau$ ). Преобразование гомотопии следует выполнить так, чтобы при значении параметра гомотопии  $\tau = 0$  получилась задача о собственных волнах однородного цилиндра, для которого мы выбираем интересующую нас моду с заданной структурой поля. Затем увеличиваем параметр гомотопии от  $\tau = 0$  до  $\tau = 1$ , чтобы при  $\tau = 1$  получить резонатор с заданной формой секции. При изменении параметра гомотопии поле собственной волны резонатора деформируется из известного поля цилиндрического волновода в поле периодического волновода сложной формы. Основные идеи применения гомотопии для краевых задач сформулированы давно [4]. Применение этого метода для решения конкретных задач расчета собственных волн развивается только в настоящее время, так как метод требует достаточно совершенного компьютерного математического инструмента для получения работоспособного кода.

Формально процесс гомотопии опишем следующим образом. Запишем интересующую нас краевую задачу на собственные значения в виде

$$L(\gamma)u = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\gamma$  есть эффективное волновое число моды,  $u(x+T) = e^{i\gamma T}u(x)$ ,  $z$  продольная координата,  $T$  есть период вдоль оси  $x$ ,  $u$  – поле собственной моды,  $L$  есть оператор краевой задачи на собственные значения [4], включающий также и граничные условия. Рассмотрим вместе с задачей (1) семейство краевых задач

$$M(\gamma, \tau)u(\tau) = 0. \quad (2)$$

Предполагаем, что  $M(\gamma, 1) = L(\gamma)$  и оператор  $M(\gamma, 0)$  таков, что задача  $M(\gamma, 0)u = 0$  имеет известное решение  $u_0$  (выражающееся аналитически) и

соответствующее известное значение спектрального параметра  $\gamma_0$ . Для того, чтобы решить задачу (1), продифференцируем равенство (2) по  $\tau$ :

$$M \frac{du}{d\tau} = -\frac{\partial M}{\partial \gamma} \frac{d\gamma}{d\tau} u - \frac{\partial M}{\partial \tau} u. \quad (3)$$

Однородное уравнение  $Mdu/d\tau = 0$ , соответствующее неоднородному уравнению (3), имеет нетривиальное решение  $u(\tau)$ . Поэтому (3) имеет решение при условии ортогональности правой части каждому из решений однородного уравнения [4], то есть при условии  $\left( \frac{\partial M}{\partial \gamma} \frac{d\gamma}{d\tau} u + \frac{\partial M}{\partial \tau} u, u \right) = 0$ . Отсюда для вычисления волнового числа  $\gamma$  получим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = -\left( \frac{\partial M}{\partial \gamma} u, u \right)^{-1} \left( \frac{\partial M}{\partial \tau} u, u \right), \quad \gamma(0) = \gamma_0. \quad (4)$$

Задача (4) должна быть решена совместно с уравнением (3), причем (3) имеет неединственное решение,  $du/d\tau = F[u] + c(\tau)u$ . Здесь  $F$  есть известный (выражающийся через  $M$ ) оператор, действующий на  $u$ ,  $c(\tau)$  произвольная достаточно гладкая функция. Неединственность связана с тем, что данная постановка задачи не определяет способ нормирования собственной функции. Если добавить условие нормировки, например,  $\|u(\tau)\| = \|u(\tau_0)\|$ , то решение будет единственным.

Мы сформулируем и обоснуем метод гомотопии для математической модели, основанной на проекционном сшивании полей в частичных областях. Мы в данной работе рассматриваем планарную геометрию резонатора. Это связано как с тем, что мы хотим пояснить идею метода гомотопии и метода проекционного сшивания на достаточно простой модели, так и с тем, что планарные резонаторы широко применяются в практике микроволновых приборов с распределенным взаимодействием [5]. Один период ВЛС представим в виде объединения нескольких прямоугольных областей (рис.1), каждая из которых является однородной вдоль оси  $x$ . В дальнейшем эти области будем называть блоками. На рис.1 приведены также основные обозначения.

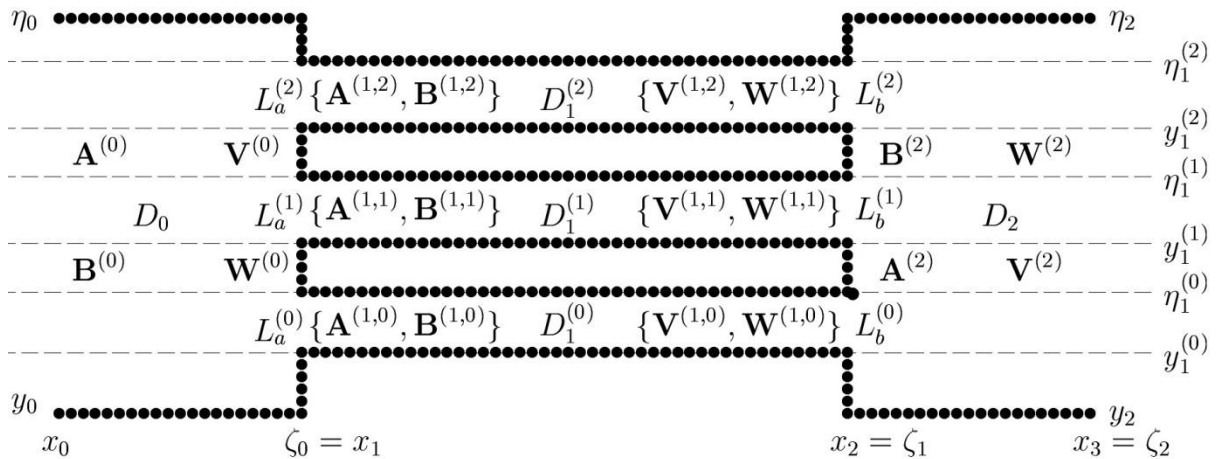


Рис. 1. Одна ячейка периодической волноводно-лестничной структуры (пример).



Блоки  $D_0$ ,  $D_2$  называем активными (в них происходит взаимодействие электронного пучка с полем), блоки  $D_1^{(j)}$  пассивными. Так как в рассматриваемой конфигурации каждый блок однороден вдоль координаты  $z$ , можно рассматривать отдельно поля двух поляризаций. Предполагаем, что поле имеет  $TE$  поляризацию,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (0, 0, E_z(x, y)), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = (H_x(x, y), H_y(x, y), 0) \quad (5)$$

Обозначим  $E_z(x, y) = u(x, y)$ . Таким образом, поле вне проводящей области находим из краевой задачи

$$u_{xx} + u_{yy} + \kappa^2 u = 0, \quad u|_{\Gamma} = 0, \quad (5)$$

где  $\kappa$  волновое число в вакууме. Граничное условие вид  $u|_{\Gamma} = 0$ , где  $\Gamma$  есть полная граница резонатора. На границах блоков  $D_0$  и  $D_2$ :  $x = \zeta_0 = x_1$ ,  $y_0 < y < \eta_0$ ,  $x = \zeta_2 = x_3$ ,  $y_2 < y < \eta_2$ , должны быть также выполнены условия квазипериодичности (Флоке)

$$u(\zeta_2 - 0, y) = e^{iyT} u(x_0 + 0, y), \quad u_x(\zeta_2 - 0, y) = e^{iyT} u_x(x_0 + 0, y). \quad (6)$$

Период в данном случае равен  $T = x_3 - x_1$ . Требуется найти все (или некоторые) значения  $\gamma$ , при которых однородная задача (6,7) со всеми дополнительными условиями имеет нетривиальное решение (и найти это решение).

Для построения решения используем метод проекционного сшивания, основанный на идеях, впервые предложенных в [6]. Внутри  $D_0$ ,  $D_2$  поле представляется в виде разложения по полной системе координатных функций поперечного сечения:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{N_j} \varphi_n^{(j)}(y) (A_n^{(j)} e^{i\gamma_n^{(j)}(x-x_j)} + B_n^{(j)} e^{-i\gamma_n^{(j)}(x-x_j)}),$$

$x \in [x_j, \zeta_j]$ ,  $y \in [y_j, \eta_j]$ , где  $\gamma_n^{(j)} = \sqrt{\kappa^2 - (\mu_n^{(j)})^2}$ , коэффициенты  $A_n^{(j)}$  определяют комплексные амплитуды парциальных волн, бегущих в области  $D_j$  слева направо,  $B_n^{(j)}$  есть амплитуды бегущих справа налево волн. Для резонатора общего вида, расположенного в полосе  $y_1 < y < y_2$ , используем полную ортонормированную систему

$$\varphi_n(y) = \sqrt{2/b} \sin \mu_n (y - y_1), \quad \mu_n = \pi(n+1)/b, \quad b = y_2 - y_1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Для симметрического резонатора (с плоскостью симметрии  $y = 0$ ) используем систему

$$\varphi_n(y) = \sqrt{2/b} \cos \mu_n y, \quad \mu_n = \pi(2n-1)/2b.$$

Внутри  $D_j$  верно также следующее представление поля:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{N_j} \varphi_n^{(j)}(y) (V_n^{(j)} e^{i\gamma_n^{(j)}(x-\zeta_j)} + W_n^{(j)} e^{-i\gamma_n^{(j)}(x-\zeta_j)}),$$

причем  $V_n^{(j)} = A_n^{(j)} e^{i\gamma_n^{(j)}(\zeta_j - x_j)}$ ,  $W_n^{(j)} = B_n^{(j)} e^{-i\gamma_n^{(j)}(\zeta_j - x_j)}$ . Внутри пассивного блока  $D_1$  поле определяется отдельно в каждой области  $D_1^{(j)}$  разложением по собственным функциям соответствующего поперечного сечения:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{N_1^{(j)}} \varphi_n^{(1,j)}(y) (A_n^{(1,j)} e^{i\gamma_n^{(1,j)}(x-x_1)} + B_n^{(1,j)} e^{-i\gamma_n^{(1,j)}(x-x_1)}), \quad (7)$$

где  $j = 0, \dots, J$ ,  $x \in [x_1, \zeta_1]$ ,  $y \in [y_1^{(j)}, \eta_1^{(j)}]$ . Координатная система определяется аналогично, опустим эти очевидные формулы. Нам потребуется также представление поля внутри  $D_1^{(j)}$  в виде

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{N_1^{(j)}} \varphi_n^{(1,j)}(y) (V_n^{(1,j)} e^{i\gamma_n^{(1,j)}(x-\zeta_1)} + W_n^{(1,j)} e^{-i\gamma_n^{(1,j)}(x-\zeta_1)}),$$

в котором для коэффициентов  $V_n^{(1,j)}$  и  $W_n^{(1,j)}$  локальное начало координат располагается в точке  $\zeta_1$ , причем  $V_n^{(1,j)} = A_n^{(1,j)} e^{i\gamma_n^{(1,j)}(\zeta_1-x_1)}$ ,  $W_n^{(1,j)} = B_n^{(1,j)} e^{-i\gamma_n^{(1,j)}(\zeta_1-x_1)}$ . Запишем условия сшивания полей на границе блоков  $D_1$  и  $D_2$ . Для краткости обозначим  $L_b^{(j)} = \{x = \zeta_1, y \in [y_1^{(j)}, \eta_1^{(j)}]\}$ ,  $j = 0, \dots, J$ , открытую границу области  $D_1^{(j)}$ , рис. 1. Запишем проекционные соотношения сшивания тангенциальной компоненты электрического поля  $E_z$  в сечении  $x = \zeta_1$ . Потребуем, чтобы невязка, т.е. разность полей в сечении  $x = \zeta_0 = x_1$  в левом и в правом (по отношению к этому сечению) отрезках сложных волноводов была ортогональна каждой из координатных функций  $\varphi_m^{(2)}(y)$ . Учтем, что на фланцах  $x = \zeta_1$ ,  $y_1^{(j)} < y < \eta_1^{(j)}$  выполнено условие  $u(\zeta_1, y) = 0$  (тангенциальная компонента электрического поля равна нулю):

$$\sum_{j=0}^J \int_{y_1^{(j)}}^{\eta_1^{(j)}} \left[ \sum_{n=1}^{N_1^{(j)}} \varphi_n^{(1,j)}(y) (V_n^{(1,j)} + W_n^{(1,j)}) \right] \varphi_m^{(2)}(y) dy = \int_{y_2}^{\eta_2} \left[ \sum_{n=1}^{N_2} \varphi_n^{(2)}(y) (A_n^{(2)} + B_n^{(2)}) \right] \varphi_m^{(2)}(y) dy,$$

То же самое сделаем для сшивания тангенциальной компоненты магнитного поля для правой границы каждой из областей  $D_1^{(j)}$ ,  $j = 0, \dots, J$ :

$$\int_{y_1^{(j)}}^{\eta_1^{(j)}} \left[ \sum_{n=1}^{N_1^{(j)}} \varphi_n^{(1,j)}(y) i\gamma_n^{(1,j)} (V_n^{(1,j)} - W_n^{(1,j)}) \right] \varphi_m^{(1,j)}(y) dy = \int_{L^{(j)}} \left[ \sum_{n=1}^{N_2} \varphi_n^{(2)}(y) i\gamma_n^{(2)} (A_n^{(2)} - B_n^{(2)}) \right] \varphi_m^{(1,j)}(y) dy,$$

Кратко запишем эти соотношения в векторно-матричной форме:

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^J \mathbf{R}^{(j)} (\mathbf{V}^{(1,j)} + \mathbf{W}^{(1,j)}) = \mathbf{A}^{(2)} + \mathbf{B}^{(2)}, & \sum_{j=0}^J \mathbf{P}^{(j)} (\mathbf{A}^{(1,j)} + \mathbf{B}^{(1,j)}) = \mathbf{V}^{(0)} + \mathbf{W}^{(0)}, \\ i\mathbf{G}_1^{(j)} (\mathbf{V}^{(1,j)} - \mathbf{W}^{(1,j)}) = \mathbf{S}^{(j)} i\mathbf{G}_2 (\mathbf{A}^{(2)} - \mathbf{B}^{(2)}), & i\mathbf{G}_1^{(j)} (\mathbf{A}^{(1,j)} - \mathbf{B}^{(1,j)}) = \mathbf{Q}^{(j,s)} i\mathbf{G}_0 (\mathbf{V}^{(0)} - \mathbf{W}^{(0)}), \end{cases}$$

$j = 1, \dots, J$ . Элементы матриц, встречающихся в этих выражениях, выражаются через интегралы от координатных функций, выписывать их не будем. Все они вычисляются аналитически. Объединив все векторные неизвестные в один неизвестный вектор и соответствующим образом расширив матрицы, получим систему

$$\begin{cases} \mathbf{P}(\mathbf{A}^{(1)} + \mathbf{B}^{(1)}) = \mathbf{V}^{(0)} + \mathbf{W}^{(0)}, & \mathbf{R}(\mathbf{V}^{(1)} + \mathbf{W}^{(1)}) = \mathbf{A}^{(2)} + \mathbf{B}^{(2)}, \\ i\mathbf{G}_1(\mathbf{A}^{(1)} - \mathbf{B}^{(1)}) = \mathbf{Q}i\mathbf{G}_0(\mathbf{V}^{(0)} - \mathbf{W}^{(0)}), & i\mathbf{G}_1(\mathbf{V}^{(1)} - \mathbf{W}^{(1)}) = \mathbf{S}i\mathbf{G}_2(\mathbf{A}^{(2)} - \mathbf{B}^{(2)}). \end{cases}$$

Условия квазипериодичности (Флоке) дадут  $\mathbf{V}^{(2)} = e^{i\gamma T} \mathbf{A}^{(0)}$ ,  $\mathbf{W}^{(2)} = e^{i\gamma T} \mathbf{B}^{(0)}$ . Для решения этой матричной задачи используем метод гомотопии. В докладе приводятся

также детали реализации и численные результаты. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (проект 16-01-00690-а).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л.Г. Суходолец “Мощные вакуумные СВЧ-приборы” М.: ИКАР, 2014.
2. J. Whitaker “Power Vacuum Tubes Handbook” N.Y., CRC Press, Taylor & Francis Group, 2012.
3. В.М. Пикунов, А.Н. Сандалов // Радиотехн. и электроника. 1986. Т.31. №5. С.968.
4. Дж. Касти, Р. Калаба “Методы погружения в прикладной математике” М.: Мир, 1976.
4. М.К. Гавурин “Численные методы” М.: Наука, 1971.
5. S. Lu et al // IEEE Trans. Electron Devices, 2015. Vol.62. No.9. P.3042.
6. А.Г. Свешников // ЖВИиМФ. 1963. V. 3. No 2. P. 314.

## Применение метода Галеркина для расчета собственных волн периодических волноводов

А.А. Быков

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет  
[abkov@yandex.ru](mailto:abkov@yandex.ru)

**1. Введение.** Задача расчета собственных волн периодических неоднородных волноводов привлекает к себе внимание на протяжении нескольких десятилетий. Пусть направление вдоль оси волновода  $y$ , поперек волновода  $x$ . Для определенности пусть показатель преломления среды есть периодическая функция координаты  $y$  с периодом  $b$ , так что  $\varepsilon(x, y + mb) = \varepsilon(x, y)$ . Условия на границе занимаемой волноводом полосы  $0 < x < a$  могут быть любые однородные, т.е. это может быть металлическая поверхность (идеально проводящая), условия сопряжения с открытым пространством (периодический оптический световод). Для определенности пусть вдоль оси  $z$  среда однородна, и поле имеет ТЕ поляризацию, так что магнитное поле в плоскости  $(x, y)$ , а электрическое поле вдоль оси  $z$ . Тогда бегущие волны можно найти, написав уравнения Максвелла с условиями квазипериодичности (Флоке)  $u(x, y + mb) = u(x, y)e^{imyb}$ . Требуется найти такие значения параметра Флоке  $\mu$ , при которых задача для однородных уравнения Максвелла с однородными граничными условиями и с условием Флоке имеет нетривиальное решение. Вообще говоря, таких решений может быть много с различной структурой поля, и в этом состоит сложность задачи, поле нужной нам пространственной структуры должно быть найдено среди всех возможных решений, и это не обязательно поле с наибольшей или наименьшей фазовой скоростью. Для решения этой задачи разработаны и обоснованы методы конечных разностей, конечных элементов, вариационные, проекционные, интегральных уравнений, разделения переменных, частичных областей и другие. В данной работе мы предлагаем метод гомотопии, который позволяет найти моду периодического волновода заданной пространственной структуры. Вообще говоря, метод гомотопии универсален, он может быть применен совместно с любым из упомянутых численных методов, но мы для определенности рассматриваем математическую модель, основанную на методе Галеркина.

**2. Метод гомотопии.** Сначала дадим формальное описание метода гомотопии. Запишем задачу поиска собственной моды в виде  $L(\gamma)u = 0$ , где  $L$  есть оператор краевой задачи на собственные значения, определение которого включает как дифференциальные уравнения, выводимые из уравнений Максвелла, так и условия сопряжения полей на границах раздела диэлектриков и на металлических проводящих или резистивных поверхностях. Здесь  $\gamma$  есть спектральный параметр, который требуется найти из условия существования нетривиального решения. Обычно  $\gamma$  есть продольное волновое число, вообще говоря, комплексное. Предлагаемый в данной работе метод гомотопии состоит в том, что мы погружаем задачу  $L(\gamma)u = 0$  в семейство краевых задач на собственные значения  $M(\gamma, \tau)u = 0$ , где  $\tau \in [0; 1]$  есть параметр гомотопии. Операторную функцию  $M(\gamma, \tau)$  выберем так, чтобы было верным равенство  $M(\gamma, 1) = L(\gamma)$ . Уравнение  $M(\gamma, 0)u = 0$  нужно составить так, чтобы его

характеристические числа  $\gamma_j(0) = \gamma_{j0}$  были легко вычисляемыми. Среди соответствующих нетривиальных решений  $u_j(x, 0) = u_{j0}(x)$  мы выберем нужное нам в соответствии с выбранным признаком селекции. Эти величины дадут нам начальные условия гомотопии. Далее мы строим гладкую функцию  $\gamma(\tau)$ , для которой  $M(\gamma(\tau), \tau)u(\tau) = 0$ , причем  $\gamma(0) = \gamma_0$ . Таким образом, решением поставленной задачи будет  $\gamma_j(1)$  и  $u_j(1)$ . Теоретически, эти условия допускают значительный произвол при выборе расширения операторной функции  $L(\gamma) \rightarrow M(\gamma, \tau)$ . Однако, обоснование метода получается наиболее полным для случая, когда операторная функция  $M(\gamma, \tau)$  соответствует задаче поиска собственных волн волновода, боковая поверхность которого или профиль показателя преломления зависят от параметра гомотопии так, что при  $\tau = 0$  заданный волновод трансформируется в прямоугольный или цилиндрический круговой волновод с однородным заполнением, собственные моды которого находятся аналитически.

**3. Гомотопия и метод Галеркина.** Теперь сформулируем метод, основанный на применении метода Галеркина [2] для периодического волновода. Для определенности рассмотрим граничные условия периодичности среды и всех компонент полей по оси  $x$ . Решение краевой задачи на собственные значения (спектральный параметр, подлежащий определению, есть  $\mu$ )

$$u_{xx} + u_{yy} + k_0^2 \varepsilon(x, y, \tau)u = 0, \quad u(x, y + mb) = u(x, y)e^{im\mu b}, \quad (3)$$

будем искать в виде линейной комбинации функций координатной системы

$$u^{(n)}(x, y, \mu, \tau) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N \psi_m(y, \mu) \varphi_n(x) C_{m,n}(\mu, \tau), \quad (4)$$

где  $\varphi_n(x) = a^{-1/2} e^{i2\pi nx/a}$ ,  $\psi_m(y, \mu) = b^{-1/2} e^{i(2\pi m + \mu b)y/b}$ . Пусть диагональные матрицы  $P$  и  $Q$  содержат все соответственно первые и вторые элементы различных пар  $(m, n)$  натуральных чисел в пределах  $m = -M, \dots, M$   $n = -N, \dots, N$ , перечисленные в произвольном порядке (всего  $(2M+1)(2N+1)$  пара), и тогда координатная система может быть записана в векторной форме,  $\Phi(x, y) = a^{-1/2} e^{i(2Q\pi/a)x} b^{-1/2} e^{i(2P\pi/b + \mu)y}$ . Мы используем термин координатная система (КС), принятый в классической работе [1]. Иначе говоря, это векторная функция  $\Phi(x) = (\varphi_{-N}(x)\psi_{-M}(y), \dots, \varphi_N(x)\psi_M(y))^T$ , с помощью которой приближенное решение можно представить в виде  $u^{(n)}(x, y, \tau) = \Phi^T(x, y, \mu)C(\tau)$ , где  $C(\tau) = (C_{(-M, -N)}(\tau), \dots, C_{(M, N)}(\tau))^T$  также вектор. Все координатные функции в функциональном векторе для  $m = -M, \dots, M$  и  $n = -N, \dots, N$  упомянуты, порядок их нумерации не важен. Предполагаем, что при  $\tau = 0$  функция  $\varepsilon(x, y, 0) = \varepsilon_0$  есть константа, так что начальные условия гомотопии определяются из явного решения уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами  $u_{xx} + u_{yy} + k_0^2 \varepsilon_0 u = 0$ . Таким образом, начальные значения гомотопии  $\mu_0^2 = k_0^2 \varepsilon_0$ . Заметим, что  $u_{xx} = \Phi_{xx}^T C = -\Phi^T (2\pi Q/a) C$ ,  $u_{yy} = \Phi_{yy}^T C = -\Phi^T (2\pi P/b + \mu) C$

Для неоднородного пространства, используя метод Галеркина [1], получим линейную однородную алгебраическую систему

$$k_0^2 \langle \Phi | \varepsilon(\tau) | \Phi^T \rangle C = \left( \frac{2\pi Q}{a} \right)^2 C + \left( \frac{2\pi P}{b} + \mu \right)^2 C, \quad (5)$$

где  $\langle \Phi | \varepsilon | \Phi^T \rangle_{((m',n'),(m,n))} = \int_0^a \int_0^b \psi_{m'}^* \varphi_{n'}^* \varepsilon(x, y, \tau) \psi_m \varphi_n dx dy$ . При каждом значении параметра гомотопии  $\tau$  (5) есть алгебраическое уравнение, которое определяет  $\mu$ . Теперь выведем дифференциальные уравнения гомотопии. Дифференцирование (5) дает

$$k_0^2 \langle \Phi | \varepsilon | \Phi \rangle \frac{dC}{d\tau} + k_0^2 \langle \Phi | d\varepsilon/d\tau | \Phi \rangle C = \left( \frac{2\pi Q}{a} \right)^2 \frac{dC}{d\tau} + \left( \frac{2\pi P}{b} + \mu \right)^2 \frac{dC}{d\tau} + 2 \left( \frac{2\pi P}{b} + \mu \right) C \frac{d\mu}{d\tau} \quad (6)$$

Так как однородная система (6) при любом фиксированном значении  $\mu$  имеет такой же вид, как (5), т.е.

$$k_0^2 \langle \Phi | \varepsilon | \Phi \rangle \frac{dC}{d\tau} = \left( \frac{2\pi Q}{a} \right)^2 \frac{dC}{d\tau} + \left( \frac{2\pi P}{b} + \mu \right)^2 \frac{dC}{d\tau},$$

и в соответствии с (5) имеет нетривиальное решение  $C(\mu, \tau)$ , то условие разрешимости системы (6) в соответствии с теоремой Фредгольма имеет вид

$$k_0^2 C^T \langle \Phi | d\varepsilon/d\tau | \Phi^T \rangle C = 2C^T \left( \frac{2\pi P}{b} + \mu \right) C \frac{d\mu}{d\tau}, \quad (7)$$

откуда получим дифференциальное уравнение для нахождения  $\mu(\tau)$ :

$$d\mu/d\tau = \left( C^T \left( \frac{2\pi P}{b} + \mu \right) C \right)^{-1} k_0^2 C^T \langle \Phi | d\varepsilon/d\tau | \Phi \rangle C. \quad (8)$$

Уравнение (8) следует дополнить начальным условием. Пусть при значении параметра гомотопии  $\tau = 0$  среда однородна, и  $\varepsilon = \varepsilon_0$ . Тогда получим точное решение  $u_0 = \varphi_{n_0}(x) e^{i\mu_0 y} = a^{-1/2} e^{i2\pi n x/a} e^{i\mu_0 y}$ , где  $\mu_0 = \left( k_0^2 \varepsilon_0 - (2\pi n_0/a)^2 \right)^{1/2}$ . Таким образом,  $\mu = \mu_0$  и соответственно вектор  $C_0(0)$ , состоящий из одних нулей, кроме позиции, отвечающей  $m = 0$  и  $n = n_0$ , где стоит единица, дает начальные условия. Заметим, что задача Коши для  $C(\tau)$  получается из (6) и имеет вид  $dC/d\tau = F(C, \gamma, \tau) + \nu(\tau)C$ , причем  $\nu(\tau)$  есть произвольная гладкая функция, которую можно выбрать из условия заданного нормирования собственной моды. Если  $\varepsilon(x, y, \tau)$  есть дифференцируемая функция в области  $\tau \in [0; 1]$ ,  $x \in [0, a]$ ,  $y \in (-\infty, +\infty)$  за исключением, может быть, конечного числа гладких кривых вида  $g(x, y, \tau) = 0$ , то найдется такой интервал  $\tau \in [0, \tau_0]$ ,  $0 < \tau_0 \leq 1$ , на котором задача Коши (7) имеет единственное решение. В докладе приводятся также детали реализации и численные результаты. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (проект 16-01-00690-а).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М.К. Гавурин “Численные методы” М.: Наука, 1971.
2. А.Г. Свешников // ЖВИИМФ. 1963. V. 3. No 2. P. 314.

## **Математическое моделирование многослойных дифракционных решеток с самоподобным строением**

А.А. Петухов

*Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,  
физический факультет, кафедра математики*  
[petukhov@physics.msu.ru](mailto:petukhov@physics.msu.ru)

В современной лазерной технике, системах коммуникации, космических исследованиях и многих других областях науки и техники для управления электромагнитным излучением широко применяются дифракционные решетки [1]. С совершенствованием технологии изготовления дифракционных решеток их строение существенно усложняется, появляются новые классы дифракционных решеток. Кроме того, часто применяются гибридные дифракционные решетки, представляющие собой комбинацию дифракционных элементов с различным строением, например, комбинация дифракционных решеток с различным профилем, комбинация дифракционной решетки с многослойным покрытием и т.п.

Из всех классов дифракционных решеток следует особо выделить достаточно широкий класс многослойных дифракционных решеток. К этому классу относятся дифракционные решетки, которые имеют (в обобщенном смысле) многослойное строение. Таким образом, многослойной будем называть такую дифракционную решетку, которая в точности или приближенно представляет собой совокупность однородных или неоднородных слоев, каждый из которых имеет различные свойства. Такие дифракционные решетки, с одной стороны, являются наиболее используемыми, благодаря своей относительно простой технической реализуемости, а с другой - позволяют в широких пределах изменять параметры взаимодействующего с ними электромагнитного излучения. Указанные выше примеры гибридных дифракционных решеток также относятся к классу многослойных дифракционных решеток. Многослойную дифракционную решетку также представляет собой, например, ячейка солнечной батареи, содержащая один или несколько неоднородных слоев-решеток с различным профилем изменения показателя преломления и несколько однородных оптических слоев.

В этом классе особый интерес представляют дифракционные решетки, имеющие самоподобное строение. При этом речь может идти как о точном, так и о приблизительном самоподобии. Например, к структурам такого типа относятся фракталы, структуры, построенные на основе последовательности Фибоначчи, и т.п. [2-3]. Такие структуры находят все более и более широкое применение во многих областях науки и техники и вызывают закономерный интерес в области дифракционных решеток. Самоподобные объекты проявляют свойства, резко отличающиеся от свойств объектов с классической геометрией и периодических структур [4]. Свойство самоподобия передается от физической системы ее откликам на внешние воздействия.

В данной работе рассматривается задача дифракции на многослойной дифракционной решетке, имеющей самоподобное строение. Рассматривается соответствующая двумерная задача дифракции. Математическую постановку задачи составляет уравнение Гельмгольца для одной из компонент электромагнитного поля волны, дополненное периодическими граничными условиями в поперечном направлении, а также парциальными условиями излучения на границах вставки в продольном направлении. Для получения численного решения поставленной математической задачи используется гибридный численный метод, основанный на

совместном применении неполного метода Галеркина и метода матриц рассеяния [5]. Этот метод позволяет эффективно учитывать многослойное строение рассматриваемой дифракционной решетки.

В работе рассматриваются самоподобные многослойные дифракционные решетки различного типа. Рассчитываются спектральные характеристики таких решеток, в частности, дифракционные эффективности в различных дифракционных порядках. Анализируется влияние самоподобного строения дифракционных решеток на их спектральные характеристики.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-00477 мол\_а.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ch. Palmer, E. Loewen “Diffraction Grating Handbook”. Newport Corporation, 6<sup>th</sup> edition, 2005.
2. Р. Кроновер “Фракталы и хаос в динамических системах” М.: Техносфера, 2006.
3. М. Шредер “Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая” Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005.
4. А.Н. Боголюбов // Вестник Московского Университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 2008. No 2. С. 7.
5. А.А. Петухов // Математическое моделирование. 2013. Т. 25. No 6. С. 41.



## Самоорганизация кластеров фрактальных нанодендритов

П.А. Логачев, С.Б. Рыжиков, Ю.В. Рыжикова  
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,  
физический факультет, кафедра оптики, спектроскопии и физики наносистем  
[ryzhikovaju@physics.msu.ru](mailto:ryzhikovaju@physics.msu.ru)

В настоящее время фрактальный анализ получил широкое распространение в области исследования оптико-физических характеристик стохастических и детерминированных структур, в частности, при разработке эффективных методов повышения чувствительности спектральных методов анализа состава веществ и оценки морфологических особенностей агрегатов, сформированных наночастицами различных типов [1-3]. Особую актуальность имеют медицинские приложения в области внедрения новых технологий диагностики, разработки средств инкапсулирования и доставки лекарственных веществ с помощью частиц-носителей. Часто в качестве таких частиц выступают дендритоподобные макромолекулы – дендримеры [4]. Отметим, что дендритный тип пространственных распределений наночастиц получил наибольшее распространение в разных приложениях [5-7].

В данной работе проводится анализ процессов самоорганизации структур дендритного типа, сформированных под действием множества случайных факторов. Целью работы является установление взаимосвязи между морфологическими особенностями строения решеток дендритного типа и фрактальностью характеристик как самих структур, так и их дифракционных образов. Построение дендритных структур осуществлялось с учетом свойств ассоциации наночастиц в двумерном пространстве (рис. 1). Выбранные модели ассоциации – «баллистическая агрегация – кластер» (рис. 1, *a*) и «ограниченная диффузией агрегация» (рис. 1, *б*) самосогласуются с известными литературными данными [8-9].

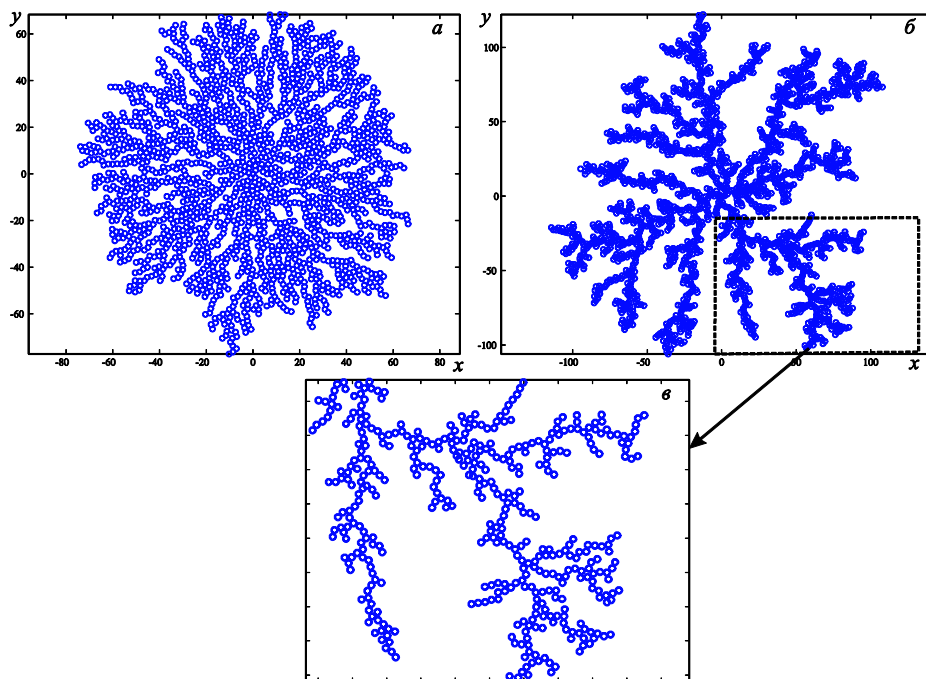


Рис. 1. Фрактальное пространственное распределение наночастиц дендритов в приближении ассоциации «баллистическая агрегация – кластер» (*a*) и «ограниченная диффузией агрегация» (*б*), *в* – фрагмент (*б*), составленный из рассеивающих центров.

Движение частиц в рамках реализации модели ассоциации частиц «баллистическая агрегация – кластер» (рис. 1, а) можно представить в виде последовательных перемещений на равные расстояния  $\Delta r$  за каждый шаг:

$$\begin{aligned}\beta &= \alpha + \varphi \cdot (\text{rand} - 0.5), \\ x_{k+1,j} &= x_{k,j} - \text{sgn}(x_{k,j})\Delta r \cos \beta, \\ y_{k+1,j} &= y_{k,j} - \text{sgn}(y_{k,j})\Delta r \sin \beta,\end{aligned}\tag{1}$$

где  $x, y$  – координаты частиц кластера, индекс  $j$  – номер частицы, индекс  $k$  – номер шага,  $\alpha = \arctg\left(\frac{y_{k,j}}{x_{k,j}}\right)$  при  $x_{k,j} \neq 0$  и  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  при  $x_{k,j} = 0$ ,  $\text{rand}$  – генератор случайных чисел от 0 до 0.999...,  $\text{sgn}$  – функция, возвращающая знак числа, угол  $\varphi$  характеризует отклонение частиц от движения к центру дендрита.

Формула (1) допускает обобщение на процессы самоорганизации кластеров в рамках модели ассоциации «ограниченная диффузией агрегация» (рис. 1, б) при  $\varphi = 2\pi \cdot \text{rand}$  :

$$\begin{aligned}x_{k+1,j} &= x_{k,j} + \Delta r \cos \varphi, \\ y_{k+1,j} &= y_{k,j} + \Delta r \sin \varphi.\end{aligned}\tag{2}$$

При моделировании дендритов использовалось преобразование полученных кривых (1) и (2) в двумерное пространственное распределение частиц, представляющих собой совокупность рассеивающих центров (рис. 1, в). Функция пропускания  $F^o$  дендритов задавалась в бинарной форме

$$F^o(x, y) = \begin{cases} 1, & x_{k,j}, y_{k,j} \in C \\ 0 & x_{k,j}, y_{k,j} \notin C \end{cases}.\tag{3}$$

где  $C$  – представляет собой функцию пространственного распределения рассеивающих центров. Такое представление анализируемых структур существенно упрощает нахождение фурье-спектров распределений образующих частиц в моделях нанокластерных образований, определяющих структуру дифрагирующей волны [10].

Поле дифракции в дальней зоне от структур дендритного типа рассчитывалось аналогично [10-11]. Количественная оценка самоподобных свойств, проявляющихся как в самих дендритных структурах, так и в их оптических характеристиках осуществлялась с использованием определения структурной функции, с помощью которой определяется «массовая» (кластерная) фрактальная размерность  $D$  [12-13]. Для примера на рис. 2 приведены зависимости средней массовой фрактальной размерности в зависимости от числа составляющих частиц кластера (рис.1, а) в случае линейной траектории частиц (1), реализующиеся при  $\varphi = 0$ . Кривые 1 и 2 соответствуют области структуры кластера и его дифракционной картине (анализировались распределения интенсивности дифрагированной волны), соответственно.

Результаты моделирования показывают, что массовые фрактальные размерности дендрита имеют близкие значения, как в области задания структуры кластера, так и в картинах дифракции. Аналогичные результаты для массовых фрактальных размерностей были получены на основе использования более общей модели формирования кластера с учетом броуновского движения составляющих его частиц (рис. 1, б).

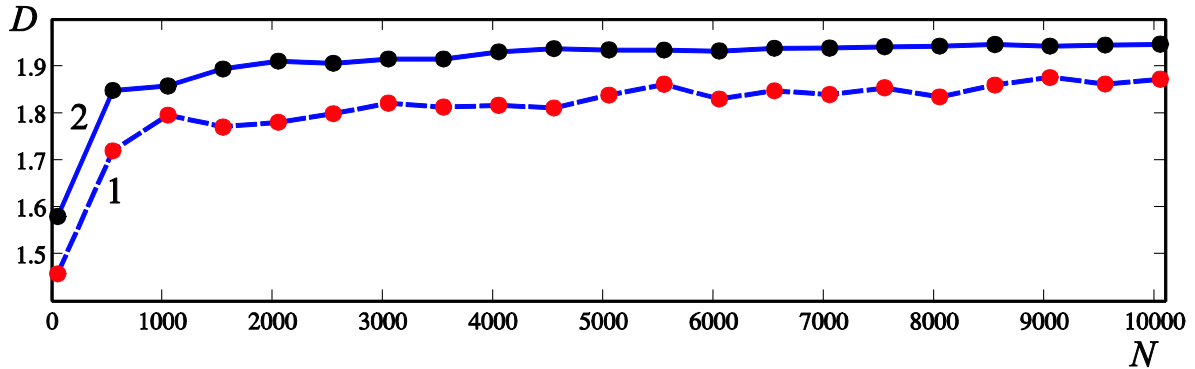


Рис. 2. Динамика изменения в процессе самоорганизации кластерных фрактальных размерностей структуры дендрита (1) и его дифракционных картин (2).

Полученные результаты указывают на то, что распределение дифракционных максимумов исследуемых объектов дендритного типа имеет фрактальный характер, причем топологические и фрактальные свойства элементов картин дифракции находятся в определенном соответствии с фрагментами начального геометрического распределения рассеивающих центров. Таким образом, результаты исследования фрактальных свойств в характеристиках дендритов, сформированных различными способами, указывают на дополнительные диагностические возможности фрактальных методов для широкого класса стохастических структур.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ в рамках научного проекта №16-32-00386 мол\_а.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М.В. Ковальчук, П.В. Короленко, Ю.В. Рыжикова // Ученые записки физического факультета МГУ. 2015. №1. С. 151401.
2. А.А. Потапов // Вестн. Нижегородского ун-та им. Н.И. Лобачевского. 2012. № 5 (2). С. 172.
3. А.Н. Боголюбов, А.А. Петухов, Н.Е. Шапкина // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2008. № 2. С. 7.
4. В.Н. Кидалов, А.А. Хадарцев “Тезиография крови и биологических жидкостей” Тула: Тульский полиграфист, 2009.
5. Д.В. Александров, П.К. Галенко // Успехи физических наук. 2014. Т. 184. №8. С. 833.
6. В.И. Марголин и др. // Известия академии инженерных наук им. А.М. Прохорова. 2015. № 1. С. 7.
7. В.В. Гридчина, П.В. Короленко, Ю.В. Рыжикова // Ученые записки физического факультета МГУ. 2015. №4. С. 154307.
8. В.М. Самсонов, Ю.В. Кузнецова, Е.В. Дьяков // Журнал технической физики. 2016. Т. 86. вып. 2. С.71.
9. Б.М. Смирнов // Успехи физических наук. 1986. Т. 149. вып. 2. С. 1055.
10. В.В. Гридчина, П.В. Короленко, Ю.В. Рыжикова // Известия РАН. Серия физическая. 2015. Т. 79. №12. С. 1691.
11. P.V. Korolenko, S.B. Ryzhikov, Yu.V. Ryzhikova // Phys. Wave Phenom. 2013. V. 21(4). P. 256.
12. Е. Федер “Фракталы” М.: Мир, 1991.
13. А.М. Зотов и др. // Электромагнитные волны и электронные системы. 2013. Т.18. №12. С. 10.

## Модель мягких ионов и уравнение состояния плазмы

А.А. Белов<sup>1,2</sup>, Н.Н. Калиткин<sup>2</sup>, И.А. Козлитин<sup>2</sup>, К.И. Луцкий<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет

<sup>2</sup>Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

[belov\\_25.04.1991@mail.ru](mailto:belov_25.04.1991@mail.ru), [kalitkin@imamod.ru](mailto:kalitkin@imamod.ru), [kozlitin@elins.ru](mailto:kozlitin@elins.ru), [konstantin.lutskiy@gmail.com](mailto:konstantin.lutskiy@gmail.com)

**1. Газовая плазма.** При малых плотностях плазма состоит из свободных электронов, ионных остовов различной кратности и, возможно, нейтральных атомов. Строго согласованная модель такой плазмы строится из термодинамического потенциала – свободной энергии  $F(T, V; x_k, x_e)$ ; здесь  $x_k$  – концентрации ионов заряда  $k$ ,  $x_e$  – концентрация электронов. Минимизируя по всем концентрациям, получаем уравнения ионизационного равновесия – обобщенные уравнения Саха. Дифференцируя по  $V$  или  $T$ , находим давление  $p$ , энергию  $E$ , энтропию  $S$ .

Традиционно в свободную энергию включают поправку на взаимодействие заряженных частиц. Для величины этой поправки в разные годы разными авторами предлагались свои модели. Большинство этих моделей предсказывало так называемый плазменный фазовый переход – конденсацию плазмы при невысоких температурах и достаточно больших плотностях. Однако когда экспериментаторы добивались до указанных плотностей, они не обнаруживали никаких фазовых переходов.

Указанное противоречие можно разрешить следующим образом. В плазме существует флуктуирующее плазменное микрополе, обусловленное хаотическим тепловым движением заряженных частиц. Этому микрополю соответствует положительная энергия, пропорциональная квадрату средней напряженности поля. Эту энергию микрополя также следует прибавить к свободной энергии. Поскольку взаимодействие заряженных частиц происходит через создаваемое ими поле, то естественно предположить, что плотность энергии поля равна по величине энергии взаимодействия зарядов. Тогда эти два слагаемых точно компенсируются, и поправка на неидеальность в суммарной свободной энергии оказывается нулевой. Таким образом, в плазме отсутствуют эффекты неидеальности!

Границей применимости газовой плазмы является условие  $\kappa \equiv v/V \ll 1$ , где  $v$  есть суммарный объем ионных остовов. При малых плотностях объем  $k$ -кратного ионного остова с разумной точностью определяются через оценку радиуса иона  $r_k \approx (k+1)/\varphi_{k+1}$ , где  $\varphi_{k+1}$  – потенциал  $k+1$ -й ионизации.

Однако при сверхвысоких плотностях надо учитывать сжимаемость ионных остовов. Для плазмы одного элемента разумные результаты дает следующая модель

$$v = \frac{(1-x_e/Z)V\tilde{v}}{(1-x_e/Z)V + \tilde{v}}, \quad \tilde{v} = \sum_{k=0}^Z x_k v_k; \quad (1)$$

здесь  $x_e$  – электронная концентрация,  $Z$  – порядковый номер элемента. В выражение для свободной энергии надо вместо объема  $V$  вставить величину  $V - v$ , а при выводе уравнений Саха проводить дифференцирование по концентрациям с учетом зависимости  $v$  от концентраций. Это приводит к появлению в уравнениях Саха поправки к потенциалам ионизации  $\varphi_k$ . Такая модель дает разумные результаты даже при плотности  $\sim 10^6$  г/см<sup>3</sup>.

Для уравнений построенной модели найден быстрый алгоритм, позволяющий рассчитывать подробные таблицы уравнений состояния за несколько минут работы ноутбука.

**2. Жидкая плазма.** Если ионные остовы занимают почти весь объем, и  $\kappa \approx 1$ , то плазма переходит в жидкое состояние. Такой переход является плавным надкритическим, а не фазовым.

Жидкая плазма хорошо описывается моделью Томаса-Ферми с квантовыми и обменными поправками (ТФП). Эта модель также строится из минимума свободной энергии  $F$ , поэтому ее термодинамика строго согласованна. Сейчас мы построили сверхбыстрый алгоритм решения уравнений модели ТФП, при котором подробная таблица термодинамических функций рассчитывается за несколько минут на ноутбуке.

Граница применимости модели ТФП определяется из условия колебания атомных ячеек. Когда температура повышается настолько, что амплитуда этих колебаний становится  $\sim R$ , жидкость должна испаряться. Расчеты показали, что эта граница соответствует значению  $\kappa \approx 0.3$ . Тем самым, области применимости газовой и жидкой плазмы хорошо стыкуются.

**3. Единая термодинамика.** По моделям Саха и ТФП можно формально производить расчеты далеко за областью их применимости. Это позволяет “склеить” термодинамические функции данных моделей в единое уравнение состояния. При этом для свободной энергии мы используем следующую интерполяцию:

$$F(T, V) = (1 - \kappa(T, V)) F_{Саха}(T, V) + \kappa(T, V) F_{ТФП}(T, V). \quad (2)$$

Остальные термодинамические функции получаются отсюда дифференцированием по  $T$  или  $V$ . Например,

$$P = -\frac{\partial F}{\partial V} = (1 - \kappa) P_{Саха} + \kappa P_{ТФП} + \frac{\partial \kappa}{\partial V} (F_{Саха} - F_{ТФП}). \quad (3)$$

Первые два слагаемых являются тривиально интерполяцией таблиц давления. И так обычно поступают большинство авторов. Однако видно, что требование термодинамической согласованности приводит к появлению третьего нетривиального слагаемого. Аналогичные выражения возникают для энергии и энтропии. Такое построение дает согласованные значения всех величин, что крайне важно для их использования в газодинамических расчетах. Проверка других источников, например известной базы данных SESAME (Лос-Аламос) показало, что в них наблюдаются заметные нарушения термодинамических соотношений. Например, на линиях стыков разных моделей правая и левая части термодинамического соотношения

$$\frac{\partial E}{\partial V} = T \frac{\partial P}{\partial T} - P. \quad (3)$$

могут отличаться в 2 раза!

Предлагаемое уравнение состояния охватывает большую часть фазовой диаграммы. В него не входит только область твердого тела с плавлением и область фазового перехода жидкость-пар ниже критической точки.

**4. Ударные адиабаты.** По данному уравнению состояния были рассчитаны ударные адиабаты Al, Fe, Cu, Pb. На них отчетливо видны осцилляции, связанные с оболочечной структурой атомов. Все эти осцилляции лежат в газовой области выше кривой испарения.

Работа поддержана грантом РФФИ № 16-11-10001.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Н. Калиткин, К.И. Луцкий // ДАН. 2014. Т. 457. № 2. С. 157.
2. Н.Н. Калиткин, К.И. Луцкий // Математическое моделирование. 2015. Т. 27. № 4. С. 31-49.

## Моделирование волноведущих систем методом конечных элементов

Н.А. Боголюбов

*Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет*  
[russell67@yandex.ru](mailto:russell67@yandex.ru)

В настоящее время все более широкое распространение приобретают волноведущие системы, выполненные с использованием метаматериальных сред [1]-[2]. Поэтому построение математических моделей таких волноведущих систем, создание на их основе алгоритмов и их реализация для расчета конкретных устройств является весьма актуальной задачей.

Рассмотрим регулярный волновод с кусочно-постоянным би-изотропным заполнением и идеально проводящей стенкой. Классическая постановка спектральной задачи формулируется следующим образом: найти постоянные распространения  $\gamma$  и соответствующие им собственные вектор-функции  $\mathbf{E}(x, y)$  в каждой из подобластей  $S_p$  поперечного сечения волновода  $S$ , где заполнение постоянно, удовлетворяющие уравнениям:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_{\perp} \operatorname{rot}_{\perp} \mathbf{E}^p + i\gamma \nabla_{\perp} E_3^p + i\gamma \mathbf{e}_z \operatorname{div}_{\perp} \mathbf{E}^p + \gamma^2 \mathbf{E}_{\perp}^p &= ik(a_{21}^p - a_{12}^p) \operatorname{rot}_{\perp} \mathbf{E}^p - \\ - \gamma k(a_{21}^p - a_{12}^p) [\mathbf{e}_z, \mathbf{E}^p] + k^2(a_{11}^p a_{22}^p - a_{12}^p a_{21}^p) \mathbf{E}^p & \\ \operatorname{div}_{\perp} \mathbf{E}^p + i\gamma E_3^p &= 0, \end{aligned}$$

условиям сопряжения  $[\mathbf{n}^p, \mathbf{E}^p]_{\partial S_{pq}} = [\mathbf{n}^q, \mathbf{E}^q]_{\partial S_{pq}}$  на общих частях  $\partial S_{pq}$  границ подобластей  $S_p$  и  $S_q$ , и граничному условию  $[\mathbf{n}, \mathbf{E}]_{\partial S} = 0$  на внешней границе  $\partial S$  области  $S$ .

В уравнениях использованы обозначения:

$$\mathbf{E}_{\perp}^p(x, y) = \{E_1^p(x, y), E_2^p(x, y), 0\}, \quad \mathbf{E}^p(x, y) = \{E_1^p(x, y), E_2^p(x, y), E_3^p(x, y)\}.$$

Разработанный новый вариант обобщенной постановки задачи, при которой значительно снижается число появляющихся при использовании лагранжевых конечных элементов не имеющих физического смысла фиктивных решений, формулируется следующим образом [3]: найти постоянные распространения  $\gamma$  и соответствующие им вектор-функции  $\mathbf{E}(x, y)$ , компоненты которых принадлежат пространству Соболева  $W_2^1(S)$ , их сужения на границу  $\partial S$  удовлетворяют условию:  $[\mathbf{n}, \mathbf{E}]_{\partial S} = 0$ , а в области  $S$  для любой вектор-функции  $\mathbf{E}^*(x, y)$  удовлетворяют уравнению (здесь  $\{a_{ij}\}$ ,  $i, j = 1, 2$  - компоненты матрицы характеризующей свойства заполняющего волновод метаматериала):

$$\int_S \frac{1}{a_{22}} \left\{ (\operatorname{rot}_\perp \mathbf{E}, \operatorname{rot}_\perp \mathbf{E}^*) + 2 \operatorname{div}_\perp \mathbf{E} \cdot \operatorname{div}_\perp \mathbf{E}^* \right\} ds + i\gamma \int_S \frac{1}{a_{22}} \left\{ (\nabla_\perp E_3, \mathbf{E}_\perp^*) - (\mathbf{E}, \nabla_\perp E_3^*) - 2 \operatorname{div}_\perp \mathbf{E} \cdot E_3^* + 2 E_3 \cdot \operatorname{div}_\perp \mathbf{E}^* \right\} ds +$$

$$+ \gamma^2 \int_S \frac{1}{a_{22}} \left\{ (\mathbf{E}, \mathbf{E}^*) + E_3 E_3^* \right\} ds - ik \int_S \left\{ \frac{a_{21}}{a_{22}} (\mathbf{E}, \operatorname{rot}_\perp \mathbf{E}^*) - \frac{a_{12}}{a_{22}} (\operatorname{rot}_\perp \mathbf{E}, \mathbf{E}^*) \right\} ds + \gamma k \int_S \frac{a_{21} - a_{12}}{a_{22}} ([\mathbf{e}_z, \mathbf{E}], \mathbf{E}^*) ds -$$

$$- k^2 \int_S \frac{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}{a_{22}} (\mathbf{E}, \mathbf{E}^*) ds = 0$$

Компоненты вектор-функции  $\mathbf{E}^*(x, y)$  принадлежат пространству  $W_2^1(S)$ , а ее сужение на границу области  $S$  удовлетворяет рассматриваемому граничному условию. Для исследования обобщенной задачи вводится гильбертово пространство  $H(S)$ , состоящее из вектор-функций  $\mathbf{F}(x, y)$ , компоненты которых принадлежат соболевскому пространству  $W_2^1(S)$ , а их сужения на границу  $\partial S$  области  $S$  удовлетворяют граничному условию идеально проводящей стенки

Обобщенная постановка рассматриваемой спектральной задачи в волноводе можно теперь сформулировать в операторной форме следующим образом: найти характеристические числа  $\gamma$  и соответствующие им собственные функции  $\mathbf{E} \in H(S)$  операторного пучка  $L(y) = \hat{I} + \hat{C} + \gamma \hat{B} + \gamma^2 \hat{A}$ :  $L(\gamma)\mathbf{E} = 0$ , где  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$ , – линейные ограниченные операторы, порождаемые ограниченными в пространстве  $H(S) \times H(S)$  полуторалинейными формами, причем операторы  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  и  $\hat{C}$  вполне непрерывны, а оператор  $\hat{A}$  самосопряженный и положительно определенный.

Доказаны теоремы о свойствах и структуре спектра рассматриваемой задачи.

Факторизация матриц в процессе численного решения методом обратных итераций обобщенной алгебраической проблемы собственных значений проводится с помощью разработанного алгоритма, в основе которого лежит процедура, предложенная Банчем и Кауфман [4]. Алгоритм позволяет учесть специфические особенности матриц, возникающих при использовании метода конечных элементов для расчета волноведущих систем. В основе разработанного алгоритма лежит специальное факторизованное представление симметричной невырожденной блочной матрицы  $A = LDL^T$ , где  $L$  – нижнетреугольная матрица [5].

Разработанный на основе предложенного нового варианта постановки спектральной задачи алгоритм может быть использован для расчета постоянных распространения и собственных мод волновода с кусочно-постоянным би-изотропным (в частности, киральным) заполнением, а также в качестве блока решения прямой задачи в алгоритме решения спектральной задачи синтеза таких волноводов [6].



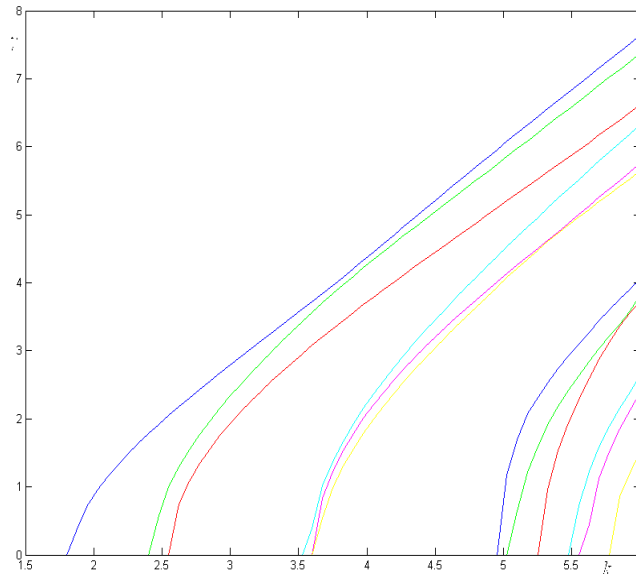


Рис.1. Дисперсионные кривые прямоугольного волновода с би-изотропной оболочкой и диэлектрической сердцевиной. Параметры би-изотропной оболочки:  $a_{11}^1 = 1.5$ ;  $a_{12}^1 = 1.3713$ ;  $a_{21}^1 = 1.3713$ ;  $a_{22}^1 = 1$ . Параметры диэлектрической сердцевины:  $a_{11}^2 = 2.1$ ;  $a_{12}^2 = 0$ ;  $a_{21}^2 = 0$ ;  $a_{22}^2 = 1$ .

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 16-31-00418

#### ЛИТЕРАТУРА

1. S. Laslo, S. Ekaterina “Waves in Metamaterials” Oxford University Press. 2009.
2. В.Г. Веселаго // Успехи физических наук.-2011. Т.181, №11.-С. 1201-1205.
3. Yu.V. Mukhartova, N.A. Bogolyubov // Computational Mathematics and Mathematical Physics. Pergamon Press Ltd. 2014. -V. 54. No 6.- P. 977-983.
4. J.R. Bunch, L. Kaufman // Mathematics of Computation. 1977. v. 31. Pp. 163-179.
5. Yu. V. Mukhartova, N.A. Bogolyubov // Moscow University Physics Bulletin. -2014. -V. 69.- No 3.- P. 205-209.
6. Н.А. Боголюбов, И.А. Буткарев, Ю.В. Мухартова // Журнал радиоэлектроники: электронный журнал. -2015.- №3.

## **Методика высокопроизводительных вычислений в дискретном дарвинском моделировании**

Л.В. Бородачев

*Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова*  
[borodach2000@mail.ru](mailto:borodach2000@mail.ru)

Как известно, наиболее экономичный подход к высокопроизводительным вычислениям реализует технология параллельного счета [1]. К сожалению, в настоящее время наиболее распространенные супер-ЭВМ (кластерного типа) по сути лишены средств рационального распараллеливания сложных программ (в частности, по PIC-методу [2]) на уровне их трансляции.

Для достижения приемлемой эффективности расчетов на современных мультипроцессорах с распределенной памятью требуются методики построения кодов с заданным параллелизмом и продуманной системой межузловых связей, определяемых особенностями реализуемых дискретных алгоритмов. Это положение особенно актуально для длинноволновой по характеру, безызлучательной по содержанию и фазово-несимметричной по форме модели Власова – Дарвина [3], особенно в случае ее наиболее сложной неявной численной аппроксимации по методу макрочастиц [4].

В настоящей работе предлагается эффективный подход к распараллеливанию дарвинских (магнитоиндукционных) PIC-алгоритмов, названный Методом Разделения Частиц. Его идеология явно учитывает специфику безызлучательных постановок, в частности, возможность использования относительно грубых пространственных сеток, число узлов которых (на измерение) может быть при необходимости существенно повышено за счет перехода к дробномерной (с редукцией конфигурационного пространства) формулировке задачи без потери ее физической адекватности [5].

Суть метода в том, что все частицы дискретной пламенной модели равными долями распределяются по вычислительным узлам, каждый из которых обладает собственной копией сеточных значений полей. По завершении временного шага самосогласованной системы эти узлы суммируют вклады своих частиц в единые массивы значений источников (плотности заряда, тока и т.д.), которые передаются на выделенный (корневой) узел для решения полевых уравнений с последующей обратной широковещательной рассылкой найденных значений полей, определяющих новое продвижение частиц.

Отметим преимущества данной методики распараллеливания в сравнении с общепринятыми Методами Декомпозиции Области [6], базирующимися на идее фрагментации модельной области с жесткой привязкой каждого фрагмента (домена), своему счетному модулю кластера.

Во-первых, в типичном компьютерном эксперименте на базе PIC-метода большая часть вычислительных затрат (порядка 90%) приходится именно на продвижение частиц и получение сеточных источников, а не на вычисление полей, и таким образом, эффективное распараллеливание лишь этой части вычислений позволяет добиться существенного ускорения счета в целом. При этом достигается наиболее равномерное распределение данных и вычислений по узлам, связанным с обработкой частиц, так что актуальная для методов на основе сегментации области проблема разбалансировки вычислительной нагрузки здесь по сути не стоит.

Во-вторых, программная реализация метода разделения частиц намного проще по сравнению с методом декомпозиции области, где существуют алгоритмические проблемы, связанные как с оптимизацией процедуры пересылки частиц из одного

процессорного элемента в другой, так и с получением корректного решения полевых уравнений с использованием неявных разностных схем, особенно в дробно–мерных постановках [7].

В-третьих, структура межпроцессорных взаимодействий по методу разделения частиц допускает относительно несложную, в сравнении с методом декомпозиции области, интеграцию в уже существующие последовательные коды, которые легко адаптируются к мультипроцессорным ЭВМ как с распределенной, так и с общей памятью.

В-четвертых, коммуникационные издержки данного метода, в отличие от МДО, не зависят ни от количества модельных частиц, ни от их температуры и потоковой скорости, а являются лишь функцией размера сетки. При этом более предсказуемыми становятся оценки общего времени счета конкретной задачи, что является дополнительным плюсом.

Наконец, и это существенно, эффективность параллельного кода по МРЧ резко возрастает с увеличением отношения числа частиц к числу сеточных узлов, ибо повышается не только экономичность расчета (что очевидно из вышесказанного), но и его достоверность в силу значительного улучшения физических свойств (идеальности, бесстолкновительности и стохастичности) модельной системы.

Однако, наличие одного выделенного (корневого) узла для решения полевых уравнений ограничивает масштабируемость кода критической точкой, после которой рост количества используемых процессоров будет приводить к падению счетной эффективности кода. Помимо этого, каждый вычислительный узел снабжается полной копией пространственных сеток, что, вообще говоря, ограничивает размер модельной области объемом локальной оперативной памяти используемого кластера. (Заметим, что в более легкой форме эта проблема присутствует и в методе декомпозиции: попытка решения полной электромагнитной задачи большого пространственного масштаба, предполагающая значительную сегментацию области, может привести к резкому доминированию коммуникационных затрат в общем объеме вычислений и, как следствие, крайне низкой рентабельности такого расчета.)

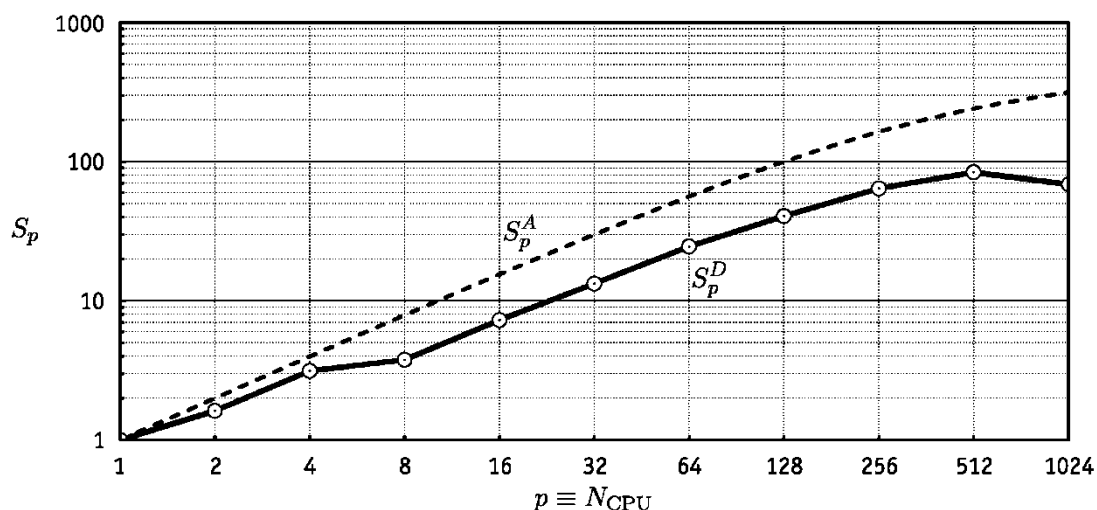


Рис. 1. Зависимость ускорения вычислений от числа процессоров (ядер).  $S_p^D$  - реальное ускорение кода **DarWin**,  $S_p^A$  - теоретически возможное ускорение по закону Амдала.

Вместе с тем практика успешной эксплуатации 2.5-мерного параллельного кода (см., например, [8]), использующего предложенную методику, на кластере СКИФ МГУ

"Чебышёв" позволяет говорить, что указанные ограничения являются сравнительно слабыми. Действительно, оценки, полученные при численном решении модельной задачи об эволюции электронно-протонной плазмы с анизотропным распределением тепловых скоростей ( $N_{part} \approx 2.5 \cdot 10^9, N_{cell} = 512 \times 512$ ) на кластере, имеющем типовой объем локальной памяти 8 гигабайт, с использованием различного числа процессорных ядер (от 1 до 1024), дают критическую точку масштабируемости в 512 процессоров и предел по линейному размеру сетки в 4096 узлов [5]. Величины более, чем достаточные при исследованиях в области низкочастотной плазмифики методом компьютерного эксперимента с использованием кластера в стандартном (пакетном) режиме обработки задач.

Отметим при этом, что линейный по сути характер реальной кривой ускорения (рис. 1), практически совпадающей с кривой теоретического прогноза по закону Амдала [1], является безусловным практическим подтверждением эффективности предлагаемой методики распараллеливания безызлучательных (дарвинских) PIC-алгоритмов (локальное расхождение указанных кривых объясняется использованием кластера с узлами, состоящими из четырех процессоров, попарно коммутируемых на общую память вычислительного модуля).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. «Параллельные вычисления». СПб.: БХВ-Петербург. 2002.
2. Harlow F.H. The Particle-in-Cell Computing Method in Fluid Dynamics // Methods Comput. Phys. Edited by Alder B. Fernbach S., Rotenberg M. New York: Acad. Press, 1964, V.3, P.319–343.
3. Darwin C. G. Dynamical Motions of Charged Particles // Phil. Mag. 1920, V.39, P.537–551.
4. Бородачев Л.В. Численная интерпретация полевого описания в дискретной дарвинской модели с неявной схемой расчета динамики частиц // Мат. Моделирование. 2005, Т.17, № 9, С. 53–59.
5. Бородачев Л.В., Коломиец Д.О. Параллельные вычисления в дарвинской PIC-модели // Комп. Исследования и Моделирование. 2015, Т.7, №1, С.61–69.
6. Walker D.W. The Hierarchical Spatial Decomposition of Three Dimensional Particle-in-Cell Plasma Simulations on MIMD Distributed Memory Multiprocessors // Oak Ridge National Laboratory, report ORNL/TM–12071. 1992.
7. Бородачев Л.В. Неявная аппроксимация уравнений движения дарвинской модели плазмы // ЖВМ и МФ. 1991. Т.31, № 6, С. 934–939.
8. Borodachev L.V., Kolomiets D.O. Single-Species Weibel Instability of Radiationless Plasma // J. Plasma Phys. 2011, V.77, P.277–288.

## **Задача сочленения радиальных и коаксиальных волноводов**

А.Л. Делицын

*Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова*  
[delitsyn@mail.ru](mailto:delitsyn@mail.ru)

Задача о сочленении коаксиальных и радиальных волноводов рассматривалась многими авторами (см., например, [1,2]). Интерес к этой задаче связан с одной стороны с ее появлением в теории антенн, с другой с приложениями к задаче вычисления характеристик печатных плат. В качестве основного метода исследования применялись вывод приближенных формул для расчета входного импеданса системы и методы связанных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.

В работе Отто [1] была выведена приближенная формула для расчета сочленения коаксиального и радиального волноводов для низкочастотного случая. На основе предположения об отсутствии отраженных волн задача о рассеянии коаксиальной волны заменяется на задачу Дирихле, допускающую точное решение. Метод Отто получил распространение при приближенном анализе подобных систем и, как показывает, его сравнение с более точными методами в области низких частот дает достаточно точное решение.

Метод связанных интегральных уравнений позволяет решать более широкий класс задач [2], но приводит к комбинации интегральных уравнений Фредгольма первого и второго рода. При наличии большого количества радиальных волноводов при рассмотрении печатных плат метод интегральных уравнений теряет свое преимущество, связанное с понижением размерности. Более того, при учете конечной толщины платы возникает задача решения интегрального уравнения с быстро меняющимся ядром интегрального оператора. Следующей проблемой является наличие диэлектрических слоев в радиальных волноводах, что приводит к дополнительному усложнению системы уравнений

На наш взгляд математическая структура подобных уравнений мало изучена и метод интегральных уравнений не имеет преимуществ перед методом конечных элементов [4]. Мы рассматриваем применение метода смешанных конечных элементов, особенности его реализации, приводим результаты тестирования, как для задач с идеально проводящими границами, так и для реальных металлов.

Основная задача, возникающая при применении метода конечных элементов заключается в ограничении области. Особенностью рассматриваемой задачи является отсутствие отсечки [3,5], как в коаксиальном, так и радиальных волноводах.

Для постановки парциальных условий излучения в коаксиальном волноводе используется стандартный метод сведения задачи рассеяния в бесконечной области к краевой задаче в конечной области. Для постановки краевых условий в радиальном волноводе используется некоторый вариант подобного метода, позволяющий применять аналогичные преобразования для аксиально-симметричных систем.

На основе метода конечных элементов разработана программа, позволяющая вычислять волновые поля и, как следствие, матрицы импедансов. Тестирование программы осуществлялось путем сравнения результатов вычислений методом конечных элементов с формулой Отто. Различие составляет порядка 3%. Это говорит об очень хорошей точности формулы Отто в области ее применимости. В качестве второго теста результаты вычислений методом конечных емкости конденсатора, помещенного в коаксиал, сравнивались с значениями, полученными по улучшенной формуле Кирхгофа. Различие составило порядка 2%. Учитывая, что при применении метода конечных элементов решалась задача рассеяния для пластин конечной

толщины, и влияние коаксиала, подобное соответствие результатов можно считать вполне удовлетворительным. Применение метода конечных элементов позволяет оценить потери в реальном металле. Используя сгущающиеся сетки при частотах от 1МГц-10ГГц и радиусе центрального проводника в коаксиале для тестовых задач о закрытом и об открытом коаксиале удается получить согласие точного учета потерь с полученным конечными элементами в пределах 5-10%. Вышесказанное говорит о больших возможностях метода конечных элементов при проектировании межслойных переходов в печатных платах и возможностях применения этого метода в теории антенн при наличии диэлектриков в волноводных сочленениях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (грант 15-01-03524-а).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. D.V. Otto // Radio Science. 1967. 2, N 9. P. 1031.
2. E. K. N. Yung et al. // Radio Science. 1999. 34, N 3. P. 615.
3. А.С. Ильинский, В.В. Кравцов, А.Г. Свешников “Математические модели электродинамики” М.: Высш. школа, 1991.
4. P.G. Ciarlet, J.L. Lions “Handbook of Numerical Analysis” V. 2., Elsevier Science Publishers, North-Holand, 1991, pp. 640-787.
5. С. Рамо, Дж. Уинери “Поля и волны в современной радиотехнике” М.: ОГИЗ, 1948.

## **Эффект угловой аберрации на примере лазерной локации КА находящегося на геостационарной орбите**

М.М. Денисов, Т.С. Зиначева

*МАИ*

[cybernetics@mat.i.ru](mailto:cybernetics@mat.i.ru)

До недавнего времени единственным средством определения параметров движения космических аппаратов была система радиоконтроля орбит, осуществляемая в сантиметровом диапазоне длин волн электромагнитного излучения. Однако точность определения параметров орбит с использованием этой системы является невысокой: для высокоэллиптических орбит она составляет сотни метров по дальности и угловые минуты - по угловому положению.

Для решения большинства научных и практических задач в условиях космического полета такая точность определения параметров орбит [1] оказывается достаточной. Однако в настоящее время в стадии подготовки находятся несколько научных программ по проведению прецизионных астрометрических измерений с помощью интерферометров, установленных на космических аппаратах.

В некоторых космических проектах, измерение разности угловых положений звезд предполагается осуществлять с точностью 10 угловых микросекунд.

Проведение таких прецизионных измерений требует корректного задания системы отсчета наблюдателя, в качестве которого выступает ПЗС матрица, регистрирующая смещение интерференционных полос в интерферометре.

Для такого задания необходимо очень точное знание положения космического аппарата на орбите - на уровне ~ 10 см. Современные системы радиоконтроля орбиты такую точность определения положения космического аппарата обеспечить не могут.

В прошлые десятилетия единственным средством определения параметров движения космических объектов была система обнаружения объектов и целеуказания, осуществляемая в сантиметровом диапазоне длин волн электромагнитного излучения. Однако точность определения координат движения объектов с использованием этой системы является невысокой: составляет сотни метров по дальности и угловые минуты - по угловому положению. Для современных радиолокационных систем обнаружения и целеуказания такая точность определения положения космического объекта является пределом. Достижение большей точности возможно только с использованием лазерной техники.

Процесс лазерной локации космических объектов происходит следующим образом: короткий лазерный импульс выходит из телескопа лазерной станции, покоящейся на вращающейся Земле, направляется в сторону космического объекта. Импульс лазера отразится от корпуса или от специальных отражателей (ретрорефлекторов), установленных на внешних панелях космического объекта. После отражения лазерный импульс возвращается в телескоп лазерной станции. Зная угловые координаты направления излучения электромагнитных импульсов и время распространения импульса туда и обратно, можно установить местоположение космического аппарата с большей, чем в случае радиоконфлексов, точностью. Техническое устройство, которое измеряет только время распространения сигнала, называется лазерным светодальномером.

Лазерные светодальномеры способны проводить траекторные измерения космических объектов. В России они входят в состав наблюдательно-измерительных пунктов. Лазерные светодальномеры являются важной наземной компонентой системы

ГЛОНАСС (глобальная навигационная спутниковая система).

В работах [4] было показано, что во вращающейся системе отсчета закон движения лазерного импульса с течением времени имеет вид (1).

$$\begin{aligned} x &= [x_A + ct n_x] \cdot \cos \Omega t + [y_A + ct n_y] \cdot \sin \Omega t, \\ y &= [y_A + ct n_y] \cdot \cos \Omega t - [x_A + ct n_x] \cdot \sin \Omega t, \\ z &= z_A + ct n_z, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\Omega$  – угловая частота вращения Земли, а  $x_A, y_A, z_A$  – координаты лазерной станции,  $n_x, n_y, n_z$  – константы интегрирования должны удовлетворять условию:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1. \quad (2)$$

Уравнения (1) при различных ориентациях вектора  $n = \{n_x, n_y, n_z\}$  задают в параметрическом виде семейство лучей, выходящих из точки  $r_A = \{x_A, y_A, z_A\}$ . Представление о ходе лучей, выходящих из разных точек плоскости вращающейся системы отсчета, дает рис.1.

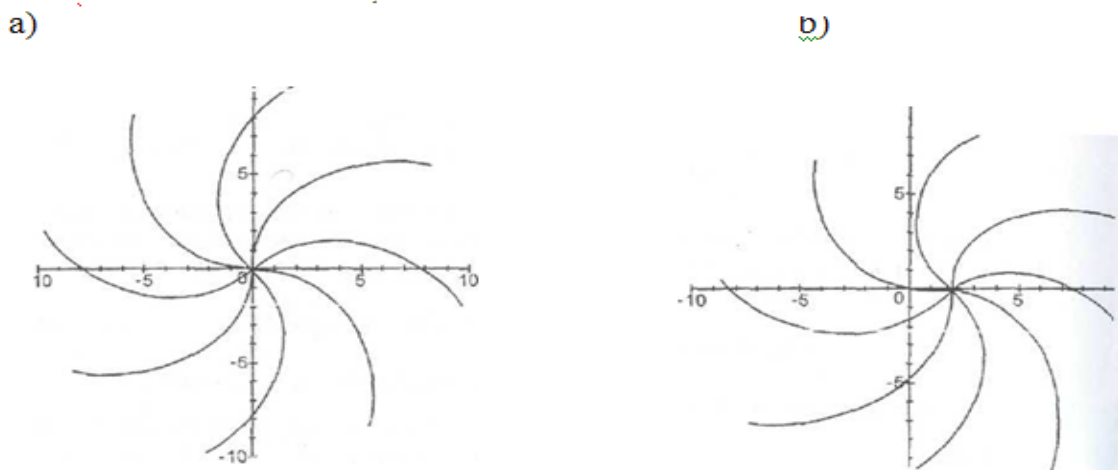


Рис.1 Световые лучи в системе отсчета, вращающейся вокруг оси  $z$ .  
 а) Источник света помещен на оси вращения. б) Источник света помещен на некотором расстоянии от оси вращения.

Именно эти уравнения и составляют основу математической модели хода световых лучей из произвольной точки земной поверхности. Переменную  $t$ , входящую в соотношения (1), можно рассматривать двояко.

С одной, эта переменная может играть роль времени, в терминах которого уравнения (1) описывают движение электромагнитного импульса во вращающейся системе отсчета, находившегося при  $t = 0$  в точке  $r_A$ .

С другой стороны,  $t$  – это параметр, имеющий размерность времени и позволяющий трактовать выражения (1) как уравнения для всевозможных лучей,



проходящих через точку  $r_A$ , или как параметрическое задание пространственных кривых, по которым распространяются электромагнитные импульсы.

Для расчета угловой абберации найдем компоненты вектора  $\vec{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$  из уравнений (1):

$$n_x = \frac{x \cdot \cos \Omega t - y \cdot \sin \Omega t - x_A}{ct}$$

$$n_x = \frac{x_B \cdot \cos \Omega t_B - y_B \cdot \sin \Omega t_B - x_A}{ct_B},$$

$$n_y = \frac{y_B \cdot \cos \Omega t_B + x_B \cdot \sin \Omega t_B}{ct_B},$$

$$n_z = 0;$$

где  $t_B$  - момент времени, в который электромагнитный импульс достигнет точки  $r_B$ .

Возводя в квадраты компоненты вектора  $\vec{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$  и используя уравнение (2) получим

$$c^2 t_B^2 = x_B^2 + y_B^2 + x_A^2 - 2 \cdot y_B \cdot x_A \cdot \sin \Omega t_B - 2 \cdot x_A \cdot x_B \cdot \cos \Omega t_B.$$

Время  $t$ , входящее в эти выражения по своему смыслу совпадает с промежутком координатного времени, необходимому для распространения светового импульса из точки  $r_1$  в точку  $r_2$ .

Наблюдатель, находящийся в точке  $r_1$  будет считать, что фотоны основного луча распространяются в направлении, определяемом касательной к лучу в этой точке, имеющей проекции:

На Рис.2. изображены направления векторов  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{R}_{AB}$

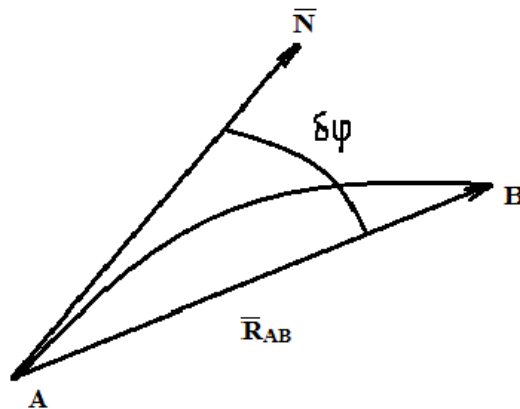


Рис. 2.  $\mathbf{N}$  касательная к дуге в начальный момент времени,  $\mathbf{R}_{AB}$  - истинное направление.

Наблюдатель, находящийся в точке  $A$  на лазерной станции направляет луч вдоль вектора  $\mathbf{N}$ . При этом он считает, что угловое положение точки  $B$  совпадает с угловым положением оптической оси прибора. Это направление в трехмерном пространстве определяется линией, касательной к лучу в точке  $A$ . Введем вектор  $\mathbf{N}$ , направленный вдоль этой касательной. Его удобно записать в виде

$$\vec{N} = t_B \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}; \quad (3)$$

Найдем  $N_x$ , для этого подставим в производную  $x$  по времени, вектор  $n_x$  и помножим полученный результат на  $t_B$ :

$$N_x = t_B \cdot \frac{dx}{dt} \cdot (t_B).$$

В результате получилось:

$$N_x = t_B \cdot \left( \frac{x_B}{t_B} + \Omega \cdot y_B - \frac{x_A \cdot \cos \Omega t_B}{t_B} \right) = x_B + \Omega \cdot y_B \cdot t_B - x_A \cdot \cos \Omega t_B.$$

Аналогично найдем  $N_y$ .

Истинное же направление на точку В определяется вектором  $\vec{R}_{AB}$ , имеющим компоненты:

$$\vec{R}_{AB} = \{x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A\}. \quad (4)$$

При  $\Omega=0$  векторы  $\vec{N}$  и  $\vec{R}_{AB}$  коллинеарны; при  $\Omega \neq 0$  между ними существует некоторый угол  $\delta\varphi$ , который и является углом оптической аберрации, вызываемой вращением Земли. Вычислим этот угол.

Запишем известное соотношение  $\left( \vec{N} \cdot \vec{R}_{AB} \right) = \left| \vec{N} \right| \cdot \left| \vec{R}_{AB} \right| \cdot \cos \delta\varphi$ . Отсюда находим

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= \sqrt{2 \cdot \left[ 1 - \frac{\left( \vec{N} \cdot \vec{R}_{AB} \right)}{\left| \vec{N} \right| \cdot \left| \vec{R}_{AB} \right|} \right]} = \sqrt{2 \cdot \left[ 1 - 1 - \frac{\Omega^2 \cdot t_B^2}{2 \cdot R_{AB}^2} \cdot [(x_B - x_A)^2 + y_B^2] \right]} = \\ &= \frac{\Omega \cdot t_B}{R_{AB}} \cdot \sqrt{(x_B - x_A)^2 + y_B^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Окончательно будем иметь:

$$\delta\varphi = \frac{\Omega}{c} \cdot \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Результаты расчета показали, что максимальное значение  $\delta\varphi$  достигает  $9.8 \cdot 10^{-6}$  радиан, минимальное значение  $\delta\varphi$  достигает  $8.8 \cdot 10^{-6}$  радиан.

Итак, угол аберрации  $\delta\varphi$ , создается полями сил инерции [2] вращающейся системы отсчета. Этот угол возникает между истинным направлением на космический

аппарат в момент прихода к нему лазерного импульса и направлением, по которому на космический аппарат посылается электромагнитный импульс.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г.Н. Дубошин. «Небесная механика» М.: Наука 1968.
2. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц “Теория поля” М.:Наука,1988.
3. А. Эйнштейн “Собрание сочинений” М.:Наука, 1965.
4. М.М. Денисов, А.А. Зубрило “Математическая модель слабо инерциальной системы отсчета” Препринт НИИЯФ МГУ, 2005.

## Построение схемы FDTD высокого порядка точности методом сгущения сеток

Ж.О. Домбровская, А.Н. Боголюбов  
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова  
[dombrovskaya@physics.msu.ru](mailto:dombrovskaya@physics.msu.ru)

Метод конечных разностей во временной области (FDTD – finite-difference time-domain) является мощным инструментом для решения прикладных задач электродинамики. В его основе лежит дискретизация уравнений Максвелла по конечно-разностной схеме Йе [1], которая определяет сильные и слабые стороны метода [2]. В случае линейной среды она обладает вторым порядком аппроксимации по пространству и по времени [3], является условно устойчивой [4] и сходится со вторым порядком точности [5, 6] при выполнении условия Куранта [7].

Одним из способов уменьшения численной дисперсии, возникающей в двумерном и трехмерном случаях, является повышение порядка точности алгоритма. В работах [8, 9] был предложен модифицированный метод FDTD: пространственные производные аппроксимировались центральными разностями с четвертым порядком точности. В данной работе мы предлагаем использовать другой подход, позволяющий производить расчеты с высоким порядком точности и не требующий модификации стандартных уравнений метода FDTD.

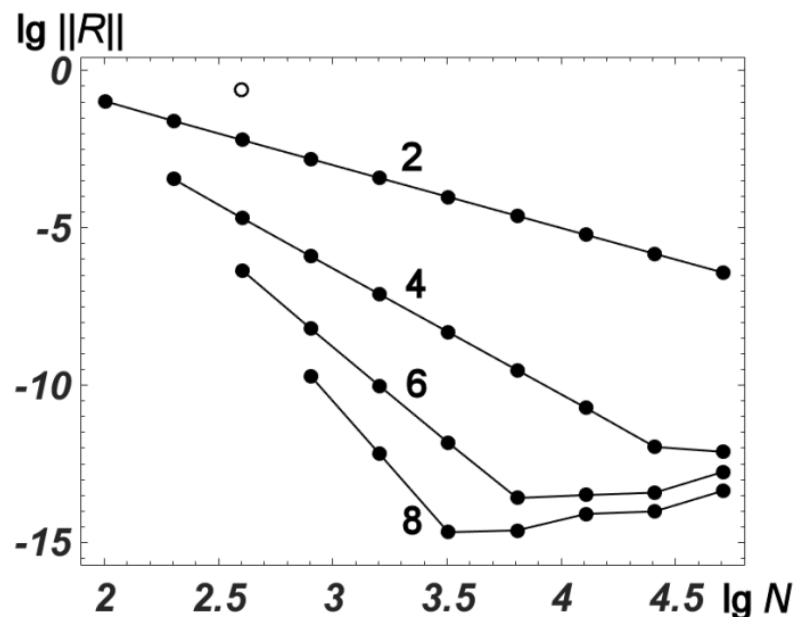


Рис. 1. Погрешности при сгущении сеток и рекуррентных уточнениях. Цифры около линий – порядок точности, белый маркер – значение погрешности из работы [10].

Как правило, теоретические априорные оценки точности являются мажорантными. Если для какой-то конкретной задачи и удастся построить асимптотическую оценку, то на практике она зачастую оказывается недостижимой, так как для многомерных задач даже современные суперкомпьютеры не всегда могут обеспечить требуемую малость шага. Поэтому теоретического исследования сходимости метода недостаточно. Программа должна, одновременно с получением ответа, находить фактическую оценку его погрешности.

Известно, что погрешность вычислений с помощью стандартного метода FDTD на равномерной сетке около 1.5% при шаге по пространству  $h$  не более  $1/20$  длины волны  $\lambda$ . Такие значения были представлены в работе [10], они получены на основании сравнения с точным решением. Однако оно известно далеко не всегда. С помощью метода сгущений сетки (метода Ричардсона) [11] можно построить апостериорную асимптотически точную оценку погрешности, не требующую знания производных исходной функции, а также повысить порядок точности результата вычислений. Если сеточная функция является достаточно гладкой, то процедуру уточнения можно сделать рекуррентной [12, 13], что позволяет увеличить порядок точности в несколько раз.

В данной работе построен надежный алгоритм расчета методом FDTD шестого порядка точности (его можно еще повысить). Показано, как численно установить сходимость и доказать существование неизвестного точного решения согласно теоремам из [14, 15].

Рассмотрена задача распространения электромагнитного импульса в свободном пространстве. Для нее алгоритм позволяет получить в 10 раз лучшую точность по сравнению с результатами из [10]. На рис. 1 представлены нормы  $C$  погрешностей решения при сгущении сетки и рекуррентных уточнениях в зависимости от числа шагов  $N$  в двойном логарифмическом масштабе. Порядок точности  $p$  указан около каждой из прямых линий, он равен тангенсу угла наклона; на достаточно подробных сетках вычисления выходят на ошибки округления.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 15-01-03524, 16-31-00418).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. K.S. Yee // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1966. V. 14. P. 302.
2. A. Taflove, S.C. Hagness "Computational Electrodynamics: the Finite Difference Time-Domain Method." Norwood (MA), 2005.
3. A. Taflove, M.E. Brodwin // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 1975. V. 23. P. 623.
4. K.S. Kunz, R.J. Luebbers "The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics." NY, 1993.
5. P. Monk // Journal of Computational and Applied Mathematics. 1993. V. 47. P. 101.
6. Y. Liu // Journal of Computational Physics. 1996. V. 124. P. 396.
7. R. Courant, K. Friedrichs, H. Lewy // Mathematische Annalen. 1928. V. 100. P. 32.
8. M.F. Hadi, M. Picket-May // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1997. V. 45. P. 254.
9. K. Lan, Y. Liu, W. Lin // IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility. 1999. V. 41. P. 199.
10. A. Taflove, K.R. Umashankar // Proceedings of the IEEE. 1989. V. 77. P. 682.
11. L.F. Richardson // Philosophical Transactions of the Royal Society A. 1927. V. 226. P. 299.
12. Н.Н. Калиткин и др. "Вычисления на квазиравномерных сетках". М., 2005.
13. Н.Н. Калиткин, Е.А. Альшина "Численные методы". Кн. 1. М., 2013.
14. Н.Н. Калиткин, П.В. Корякин "Численные методы". Кн. 2. М., 2013.
15. В.С. Рябенский, А.Ф. Филиппов "Об устойчивости разностных уравнений". М., 1956.

## Математическая модель прямоугольной волноведущей системы с импедансными стенками

А.И. Ерохин, И.Е. Могилевский, В.Е. Родякин, В.М. Пикунов  
 Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, физический факультет, кафедра  
 математики  
[forlector@mail.ru](mailto:forlector@mail.ru)

Электромагнитные колебания в волноведущей системе описываются решением уравнений Максвелла, удовлетворяющим граничному условию, которое ставится на металлической поверхности, ограничивающей систему. Простейшей моделью является ситуация, когда металл представляет собой идеальный проводник, и на поверхности волновода касательная составляющая вектора электрической напряженности обращается в нуль, т.е. в математической модели на границе области ставится условие Дирихле:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik\mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mathbf{H}, \\ [\mathbf{n} \square \mathbf{E}]|_S = 0, \end{cases}$$

где  $S$  — боковая поверхность волновода.

В работе [1] строго доказано, что любое поле в регулярном волноводе в области, свободной от внешних токов и зарядов, может быть представлено в виде суперпозиции поперечно-электрических (ТЕ) или поперечно-магнитных (ТМ) волн. В случае волновода прямоугольного сечения  $S_{\perp} \in (0, a) \times (0, b)$  базисные функции, по которым раскладываются поперечные компоненты электромагнитного поля имеют вид:  
 (e) – электрический тип ТМ:

$$\begin{cases} \Delta_{\perp} f_{nm}^{(e)} + \kappa_{nm}^2 f_{nm}^{(e)} = 0, (x, y) \in (0, a) \times (0, b), \\ f_{nm}^{(e)}|_{x=0;a} = f_{nm}^{(e)}|_{y=0;b} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\kappa_{nm} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2}, \quad n = \overline{1, N}, \quad m = \overline{1, M},$$

$$f_{nm}^{(e)} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right), \quad \mathbf{G}_{n,m}^{(e2)} = \frac{\nabla f_{nm}^{(e)}}{\kappa_{nm}}, \quad \mathbf{G}_{nm}^{(h3)} = [\mathbf{z}_0 \times \mathbf{G}_{nm}^{(e2)}],$$

(h) – магнитный тип ТЕ:

$$\begin{cases} \Delta_{\perp} f_{nm}^{(h)} + \kappa_{nm}^2 f_{nm}^{(h)} = 0, (x, y) \in (0, a) \times (0, b), \\ \frac{\partial f_{nm}^{(h)}}{\partial x} \Big|_{x=0;a} = \frac{\partial f_{nm}^{(h)}}{\partial y} \Big|_{y=0;b} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\kappa_{nm} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2}, \quad n = \overline{n_0, N}, \quad m = \overline{m_0, M}, \quad n_0 + m_0 = 1,$$

$$f_{nm}^{(h)} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{b} y\right), \quad \mathbf{G}_{n,m}^{(h2)} = \frac{\nabla f_{nm}^{(h)}}{\kappa_{nm}}, \quad \mathbf{G}_{nm}^{(e3)} = [\mathbf{G}_{nm}^{(h2)} \mathbf{z}_0].$$

Данный базис также можно использовать при построении приближенного решения с помощью неполного метода Галеркина [2-4].

Однако модель идеально проводящей поверхности может быть использована только в очень узком классе физических задач без потерь или является “первым приближением” для решения задачи, описывающей поведение системы, ограниченной реальной металлической поверхностью с потерями. В этом случае хорошей моделью служат граничные условия Шукина-Леонтовича [5], дающие связь между касательными составляющими к поверхности  $S$  векторов напряженности электрического и магнитного поля:

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}]_S = -Z_s [\mathbf{n}, \mathbf{H}]_S, \quad (3)$$

где  $Z_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma_0}}(1-j)$  - поверхностный импеданс металла,  $\sigma_0$  - удельная проводимость на постоянном токе.

Для поверхностей  $y=0$ ;  $\mathbf{b} \perp \hat{x} \in [0, a]$ ,  $\mathbf{n} = \hat{y}_0$ :

$$E_x = \pm Z_s H_z, \quad E_z = \mp Z_s H_x. \quad (4)$$

Для поверхностей  $x=0$ ;  $\mathbf{a} \perp \hat{y} \in [0, b]$ ,  $\mathbf{n} = \hat{x}_0$ :

$$E_y = \pm Z_s H_z, \quad E_z = \mp Z_s H_y. \quad (5)$$

В случае импедансных граничных условий на боковой поверхности не удается разделить полное электромагнитное поле волновода на поля электрического и магнитного типов, поэтому возникает необходимость рассматривать гибридные моды. При граничных условиях (3) базис в виде ТМ и ТЕ волн уже не может быть использован напрямую для решения задачи нахождения электромагнитных полей, поскольку базисные векторы не удовлетворяют граничным условиям, и приходится использовать приближенные методы [5].

В данной работе рассматривается прямоугольный волновод, для которого предлагается новый базис, который строится путем добавления к указанному выше базису конечного числа дополнительных функций. Они являются ортогональными по отношению к неполным базисам ТЕ и ТМ волн. Кроме того, амплитуды при этих функциях определяются из импедансных граничных условий. Дополнительные базисные функции имеют вид:

$$\mathbf{G}_{n,m}^{(ex)} = \mathbf{x}_0 \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos \frac{\pi n}{a} x \left( \left( \frac{.5b-y}{.5b} \right)^{m-1} - \sum_{k=1}^M \frac{2\beta_{km}}{b} \sin \frac{\pi k}{b} y \right), \quad \beta_{km} = \int_0^b \left( \frac{.5b-y}{.5b} \right)^{m-1} \sin \frac{\pi k}{b} y dy;$$

$$\mathbf{G}_{n,m}^{(ey)} = \mathbf{y}_0 \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos \frac{\pi m}{b} y \left( \left( \frac{x-.5a}{.5a} \right)^{n-1} - \sum_{k=1}^N \frac{2\alpha_{kn}}{a} \sin \frac{\pi k}{a} x \right), \quad \alpha_{kn} = \int_0^a \left( \frac{.5a-x}{.5a} \right)^{n-1} \sin \frac{\pi k}{a} x dx.$$

Поперечные компоненты электромагнитного поля волновода представляются в виде линейной комбинации элементов усовершенствованного базиса и точно удовлетворяют импедансным граничным условиям:

$$\mathbf{H}_\perp = \sum_{nm} (W_{nm}^{(h2)}(z) \mathbf{G}_{nm}^{(h2)} + W_{nm}^{(h3)}(z) \mathbf{G}_{nm}^{(h3)}),$$

$$\mathbf{E}_\perp = \sum_{nm} (W_{nm}^{(e2)}(z) \mathbf{G}_{nm}^{(e2)} + W_{nm}^{(e3)}(z) \mathbf{G}_{nm}^{(e3)}) + \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M (1 - \delta_{0n} \delta_{0m}) V_{nm}^{(ex)} \mathbf{G}_{n,m}^{(ex)} + \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M (1 - \delta_{0n} \delta_{0m}) V_{nm}^{(ey)} \mathbf{G}_{nm}^{(ey)}.$$

Из проекционных соотношений для уравнений Максвелла и граничных условий получается жесткая линейная СОДУ:

$$\begin{aligned} \frac{dW_{nm}^{(e3)}}{dz} &= -i\omega\mu_0 W_{nm}^{(h2)} + \oint_{C_\perp} E_z \mathbf{G}_{nm}^{(e3)} \mathbf{n} dc, \\ \frac{dW_{nm}^{(e2)}}{dz} &= -i\omega\mu_0 \left(1 - \frac{\kappa_{nm}^2}{(\omega/c)^2}\right) W_{nm}^{(h3)} + \oint_{C_\perp} E_z \mathbf{G}_{nm}^{(e2)} \mathbf{n} dc, \\ \frac{dW_{nm}^{(h2)}}{dz} &= -i\omega\varepsilon_0 \left(1 - \frac{\kappa_{nm}^2}{(\omega/c)^2}\right) W_{nm}^{(e3)} + \frac{\kappa_{nm}}{i\omega\mu_0} \oint_{C_\perp} \mathbf{E}_\perp (\mathbf{n} \times \mathbf{z}_0) f_{nm}^{(h)} dl, \\ \frac{\partial W_{nm}^{(h3)}}{\partial z} &= -i\omega\varepsilon_0 W_{nm}^{(e2)}, \end{aligned}$$

где контурные интегралы вычисляются аналитически:

$$\begin{aligned} \oint_{C_\perp} E_z \mathbf{G}_{nm}^{(e3)} \mathbf{n} dc &= -\frac{\pi n}{\kappa_{nm} b} \sum_{m'=0}^M (1 + (-1)^{m+m'}) V_{nm'}^{(ezy)} - \frac{\pi m}{\kappa_{nm} a} \sum_{n'=0}^N (1 + (-1)^{n+n'}) V_{n'm}^{(ezx)}, \\ \oint_{C_\perp} E_z \mathbf{G}_{nm}^{(e2)} \mathbf{n} dc &= \frac{\pi m}{\kappa_{nm} b} \sum_{m'=0}^M V_{nm'}^{(ezy)}(z) (1 + (-1)^{m+m'}) + \frac{\pi n}{\kappa_{nm} a} \sum_{n'=0}^N V_{n'm}^{(ezx)}(z) (1 - (-1)^{n+n'}), \\ \oint_{C_\perp} \mathbf{E}_\perp (\mathbf{n} \times \mathbf{z}_0) f_{nm}^{(h)} dl &= -Z_s \frac{2}{b} \sum_{m'=0}^M (1 - \delta_{0n} \delta_{0m'}) (1 + (-1)^{m+m'}) W_{nm'}^{(h1)}(z) + \\ &+ Z_s \frac{2}{a} \sum_{n'=0}^N (1 - \delta_{0n'} \delta_{0m}) (1 + (-1)^{n+n'}) W_{n'm}^{(h1)}(z). \end{aligned}$$

Здесь:

$$\begin{aligned} V_{nm}^{(ezy)} &= Z_s \left( \frac{\pi n}{\kappa_{nm} a} W_{nm}^{(h2)}(z) - \frac{\pi m}{\kappa_{nm} b} W_{nm}^{(h3)}(z) \right), \quad V_{nm}^{(ezy)} = Z_s \left( \frac{\pi n}{\kappa_{nm} a} W_{nm}^{(h2)}(z) + \frac{\pi m}{\kappa_{nm} b} W_{nm}^{(h3)}(z) \right), \\ W_{nm}^{h1} &= -\frac{\kappa_{nm}}{i\omega\mu_0} W_{nm}^{(e3)} - \frac{Z_s}{i\omega\mu_0} \left\{ \frac{2}{b} \sum_{m'=0}^M (1 - \delta_{0n} \delta_{0m'}) [(-1)^{m+m'} - 1] W_{nm'}^{h1} - \frac{2}{a} \sum_{n'=0}^N (1 - \delta_{0n'} \delta_{0m}) [(-1)^{n+n'} - 1] W_{n'm}^{h1} \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, предложенный усовершенствованный базис для импедансного волновода при применении неполного метода Галеркина позволяет векторную задачу математического моделирования электромагнитного поля в реальной волноведущей системе с потерями в стенках свести к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов разложения.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 16-31-60084 мол\_a\_дк и № 16-01-00690 А.



ЛИТЕРАТУРА

1. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский // ЖТФ. 1948. Т. 18. С. 959-963.
2. А.Г. Свешников, И.Е. Могилевский “Избранные математические задачи теории дифракции” М.: Физический факультет МГУ, 2012.
3. А.С. Ильинский и др. “Математические модели электродинамики” М.: Высшая школа, 1991.
4. В.М. Пикунов, А.Г. Свешников // Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Серия Б. Справочные приложения, базы и банки данных. Том VII -1. Математическое моделирование в низкотемпературной плазме. Часть 2. М.: ЯНУС-К. 2008. С. 534-567.
5. Л.А. Вайнштейн “Электромагнитные волны” М.: Радио и связь, 1988.

## О преобразовании когерентного излучения фрактальными структурами

П.В. Короленко, А.А. Красулин, А.Ю. Мишин, Р.Т. Кубанов  
МГУ им. М.В. Ломоносова, Физический факультет, кафедра оптики, спектроскопии и физики  
наносистем  
[a.a.krasulin@gmail.com](mailto:a.a.krasulin@gmail.com)

Важным разделом современной когерентной оптики является раздел, в рамках которого рассматривается взаимодействие излучения с фрактальными или фракталоподобными объектами. Данная работа посвящена вопросу, касающемуся выбора оптимальных физико-математических моделей для расчета скейлинговых характеристик физического объекта и светового поля зондирующих когерентных пучков. Несмотря на значительное количество исследований, выполненных по данной теме (см., например, [1-3]), и большое число приемов оценки фрактальных параметров, предложенных различными авторами, на практике часто возникает необходимость в более строгой обоснованности предлагаемых методов анализа. Расчетные модели, с помощью которых анализируется скейлинг в физических объектах и световых полях, строятся часто из разных представлений, что затрудняет сравнение полученных результатов. К сказанному следует добавить в значительной степени амбивалентный характер процессов трансформации структуры зондирующих пучков. Поэтому в данной работе особое внимание уделено поиску и тестированию расчётных моделей, наиболее адекватно описывающих особенности рассматриваемой структуры и поля излучения.

В ходе численного моделирования было рассмотрено прохождение светового пучка через аперидические структуры (зеркала, решетки, фазовые экраны). При их моделировании использовались свойства числовых последовательностей Кантора, Морса-Туэ, Фибоначчи, двойного периода, Колакоски и некоторых специальных функций [4-6]. При просвечивании когерентным излучением систем с фрактальным распределением рассеивающих центров (например, кантороподобных систем) световые поля также обнаруживали признаки фрактальности. Фрактальные структуры в излучении наблюдались также при просвечивании систем Морса-Туэ, Фибоначчи, двойного периода, хотя сами по себе эти системы не являются фрактальными. Это объясняется наличием у них скрытой внутренней симметрии самоподобия [7-8]. Исключение составляет система Колакоски, которая при наличии внутренней системы самоподобия не формирует фрактальный спектр. При проведении расчетов оказалось целесообразным наряду с оценкой фрактальной размерности Хаусдорфа использовать представление о кластерных (массовых) размерностях. В общем случае фрактальные размерности спектров и фрактальные размерности структур могут заметным образом отличаться. Иногда (например, при использовании кантороподобных систем) увеличение фрактальной размерности структуры влекло уменьшение спектральной фрактальной размерности спектра. При этом сумма указанных размерностей составляла постоянную величину.

Особенности преобразования излучения аперидическими структурами видны из рис. 1, где представлены структура и оптические характеристики многослойной системы, чередование слоёв (А и В) в которой определяется последовательностью Фибоначчи. Такого рода многослойная система, строго говоря, не является фрактальной. Однако, её фурье-спектр, представляющий собой фурье-преобразование последовательности дельта-функций, располагающихся на границах между слоями, характеризуется присутствием целого ряда самоподобных элементов. Фактически

такой фурье-спектр представляет собой картину дифракции, сформированную излучением от системы точечных источников, положение которых совпадает с положением дельта-функций и соответствует расположению точек над слоями многослойной системы (см. рис. 1,а). Присутствие фрактальных элементов в фурье-спектре объясняется наличием внутренней симметрии самоподобия, обусловленной определенным перестановочным законом [9].

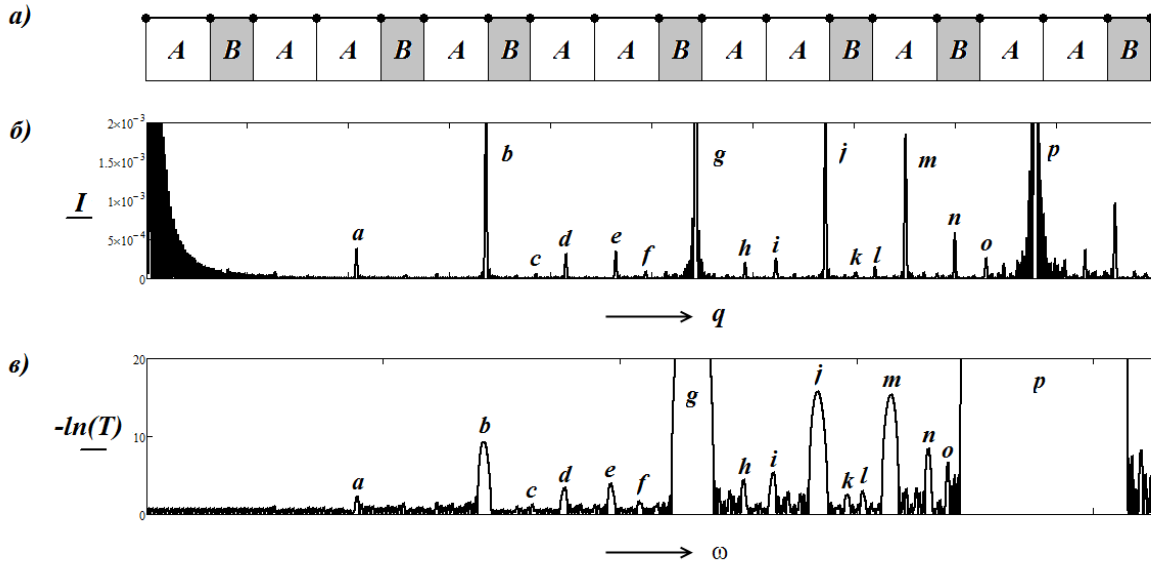


Рис. 1. Характеристики многослойной системы Фибоначчи. а–структура системы, б–её фурье-спектр (по интенсивности  $I$ ), в–спектр коэффициента пропускания  $T$  (по мощности).  $q$  — пространственная частота,  $\omega$  — частота излучения; величины по осям ординат представлены в относительных единицах.

Обращает на себя внимание определённое структурное соответствие между фурье-образом системы и спектром пропускания. Для иллюстрации указанного факта соответствующие пики в фурье-образе и спектре пропускания помечены одинаковыми латинскими буквами. Коэффициенты скейлинга на распределениях, показанных на рисунках 1,б и 1,в оказываются равными величине 1,59, весьма близкой к коэффициенту Золотого сечения. К коэффициенту Золотого сечения оказывается близкой и массовая фрактальная размерность фурье-образа ( $D = 1,724$ ). Значительно выше оказывается величина  $D$  для спектра пропускания ( $D=4,178$ ). Таким образом, даже при определённом структурном соответствии анализируемые распределения обнаруживают различия в значениях фрактальной размерности.

Аналогичные закономерности оказываются свойственными и для систем, построенных на основе других аperiодических числовых последовательностей (Морса-Туэ, двойного периода). Исключение представляет собой система, построенная по принципу множества Колакоски [6]. Эта система обладает внутренней симметрией самоподобия, однако, как показали расчеты, её фурье-образ и соответствующий спектр пропускания не содержат фрактальных элементов.

Аналогичная проблема, связанная с соотношением фрактальных размерностей объекта и зондирующего светового пучка, возникает, когда рассматривается прохождение излучения через фрактальные фазовые экраны (волны, прошедшие фрактальный фазовый экран, получили название диффракталов). Практический интерес к такой задаче обусловлен возможностью моделировать с помощью таких экранов процесс прохождения излучения через турбулентную атмосферу [1]. Поскольку нас в

первую очередь интересуют фрактальные характеристики амплитудных и фазовых распределений волн, прошедших фазовый экран, мы не будем использовать модель диапазонно-ограниченного экрана, а рассмотрим случай безграничной волны.

Пропускание фазового экрана описывалось функцией Вейерштрасса, задаваемой формулой

$$\Phi_k = \sqrt{2} \cdot \sigma \cdot \frac{\left[1 - b^{2D-4}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{n=0}^N b^{(D-2) \cdot n} \cdot \cos\left(2\pi \cdot s \cdot b^n \cdot k + \psi_n\right)}{1 - b^{(2D-4)(N+1)}}, \quad (1)$$

где  $\sigma$  – стандартное отклонение,  $b, s$  – параметры пространственно-частотного масштабирования,  $D$  – фрактальная размерность, связанная с параметром Херста  $H$  соотношением  $D=2-H$ .  $N+1$  – количество гармоник,  $\psi_n$  – фаза, распределенная случайным образом на интервале  $[0, 2\pi]$ ,  $k$  – величина, характеризующая поперечную координату в дискретном представлении. Считалось, что на экран падает плоская однородная волна с единичной амплитудой. Распределение амплитуды и фазы световых колебаний дифрагированной на фазовом экране волны рассчитывалось с использованием соотношений, приведенных в [10] для характеристики дифракции волны с синусоидальным профилем волнового фронта. Поскольку функция Вейерштрасса содержит сумму гармонических функций, то указанные соотношения могут быть использованы при аналитическом описании поля дифракции на фазовом экране. Этот подход приводит к следующей формуле для поля дифракции:

$$A_k = \prod_{m=0}^M \left[ \sum_{q=-8}^{-1} \left[ J_n\left[|q|, b^{(D-2) \cdot m} \cdot \varsigma\right] \cdot (-1)^{|q|} \cdot e^{-i \left[ 2\pi \cdot z \cdot b^{2m} \cdot q^2 - 2\pi \cdot x \cdot s \cdot k \cdot b^m \cdot q - q \cdot \left( \psi_m + \frac{\pi}{2} \right) \right]} \right] + \sum_{q=0}^8 \left[ J_n\left[|q|, b^{(D-2) \cdot m} \cdot \varsigma\right] \cdot (-1)^{|q|} \cdot e^{-i \left[ 2\pi \cdot z \cdot b^{2m} \cdot q^2 - 2\pi \cdot x \cdot s \cdot k \cdot b^m \cdot q - q \cdot \left( \psi_m + \frac{\pi}{2} \right) \right]} \right] \right], \quad (2)$$

где  $J_n$  – функция Бесселя, характеризующая амплитуду одной из плоских волн, по которым осуществляется разложение диффракта.

Характерный вид распределения интенсивности и фазы дифрагированной волны на некотором произвольном расстоянии  $z$  от экрана приведен на рис. 2. Фрактальная размерность распределения амплитуды и фазы определялась по методу, основанному на анализе поведения структурных функций анализируемых сигналов [11]. Данная фрактальная размерность по своему типу относится к фрактальной размерности Хаусдорфа.

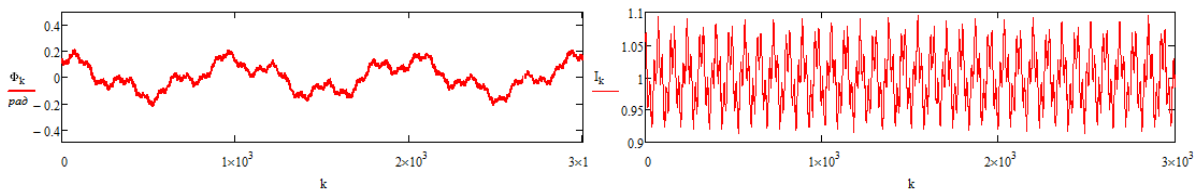


Рис. 2. Структура диффракта на расстоянии  $z=10$  от экрана,  $\sigma = 0,1$ ;  $a$  – распределение фазы  $\Phi_k$ ,  $b$  – распределение интенсивности  $I_k$  (в относ. ед.),  $k$  – поперечная координата в дискретном представлении

В ходе численного моделирования прохождения излучения особое внимание уделялось сопоставлению особенностей амплитудно-фазовых распределений в режимах слабых и сильных флуктуаций. Рис. 2 соответствует случаю слабых флуктуаций. При переходе к сильным флуктуациям распределение амплитуды и фазы качественным образом менялось. Это связано, прежде всего, с формированием на волновом фронте излучения дислокационных образований, обуславливающих скачкообразные изменения фазы на величину  $\pi$ . На рис. 3 приведена флуктуационная структура излучения для случая сильных флуктуаций.

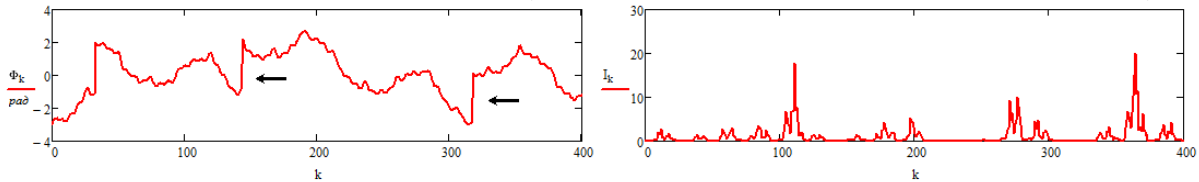


Рис. 3. Структура дифракта на расстоянии  $z = 1$  от экрана,  $\sigma = 3,6$ ; а – распределение фазы, б – распределение интенсивности. Стрелки указывают на положение дислокаций на волновом фронте.

Обобщение данных о скейлинговых характеристиках амплитуды и фазы позволило установить важную закономерность, согласно которой размерности в распределениях фазы и амплитуды оказались примерно одинаковыми и близкими к фрактальной размерности функции пропускания экрана. При этом ход рассчитанных распределений указывал на то, что переход к сильным флуктуациям несколько увеличивал значения фрактальной размерности флуктуаций интенсивности.

Таким образом, результаты выполненных расчетов указывают на существование определенной связи между скейлинговыми характеристиками объекта и фрактальными признаками в структуре полей дифракции зондирующих световых пучков. Однако, эта связь не подчиняется единой общей закономерности и при анализе конкретных явлений требует уточнения как с точки зрения применения адекватной теоретической модели, так и с точки зрения метода оценки параметров скейлинга.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант офи-м 14-22-01086).

## ЛИТЕРАТУРА

1. А.А. Потапов “Фракталы в радиофизике и радиолокации” М.: Логос, 2002.
2. А.Н. Боголюбов, А.А. Петухов, Н.Е. Шапкина // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2008. № 2. С. 7.
3. P.V. Korolenko, A.Y. Mishin, Yu.V. Ryzhikova // Optik - International Journal for Light and Electron Optics. 2013. V. 124(19). P. 3946.
4. E.L. Albuquerque, M.G. Cottam // Physics Reports. 2003. V. 376. P. 225.
5. А.А. Мучник, Ю.Л. Притыкин, А.Л. Семёнов // УМН. 2009. Т. 64. Вып. 5(389). С. 21.
6. V.I. Fesenko // Waves in Random and Complex Media. 2014. V. 24. No. 2. P. 174.
7. Д. Гратиа // УФН. 1988. Т. 156. Вып. 2. С. 347.
8. А.М. Зотов, П.В. Короленко, А.Ю. Мишин // Кристаллография. 2010. Т.55. № 8. С. 965.
9. Н.В. Грушина и др. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2009. №4. С. 47.
10. Дж. Гудмен “Введение в фурье-оптику” М.: Мир, 1970.
11. Р.М. Кроновер “Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории.” М.: Постмаркет, 2000.

## Гибридная схема метода дискретных источников в задачах дифракции электромагнитных волн на плоских наноструктурах в присутствии слоистой среды

И.В. Лопушенко

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова  
[lopushenko.ivan@physics.msu.ru](mailto:lopushenko.ivan@physics.msu.ru)

В настоящее время активно развивается перспективное направление исследований, получившее название вычислительной нанофотоники. Его актуальность обусловлена в том числе уникальными оптическими свойствами наноразмерных плазмонных структур, которые делают возможной разработку инновационных устройств в таких прикладных областях как оптоэлектроника, солнечная энергетика и спектроскопия. Поскольку существует тенденция к миниатюризации большинства современных фотонных систем, особый интерес представляют структуры с диаметром поперечного сечения, не превышающим десятка нанометров. Для изучения подобных структур требуются эффективные вычислительные методы, основанные на строгих математических моделях и позволяющие получать корректные результаты с контролем точности в присутствии слоистой среды.

Решение задач дифракции на плазмонных структурах в рамках известных прямых вычислительных методов электродинамики существенно усложняется благодаря резким перепадам интенсивности электромагнитного поля вблизи поверхности структур. Одним из способов преодоления этой трудности является использование полуаналитических подходов, в которых представление для результирующего электромагнитного поля и характеристик рассеяния может быть записано в явном виде.

Метод дискретных источников (МДИ) представляет собой один из наиболее эффективных полуаналитических подходов, отличительными особенностями которого являются гибкость при выборе аналитического представления для приближенного решения исходной задачи дифракции, высокая производительность и возможность проведения апостериорной оценки погрешности расчетов [1]. В рамках классической схемы МДИ решение задач дифракции на наноструктурах требуемой толщины оказывается затрудненным в силу возникающей линейной зависимости в используемой системе дискретных источников. В связи с этим ранее была предложена и обоснована гибридная схема МДИ, позволяющая исследовать тонкие вытянутые наночастицы и при этом сохраняющая все преимущества классической схемы [2].

В настоящей работе предлагается новая реализация гибридной схемы МДИ, позволяющая проводить анализ рассеяния световых волн плоскими и сплюснутыми наночастицами. Для примера рассмотрим классическую постановку трехмерной задачи дифракции плоской волны  $\{\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0\}$  на тонком диске  $D_i$ , расположенном вблизи плоской границы раздела  $\Sigma$  двух однородных изотропных сред (ось  $z$  декартовой с.к. с началом на  $\Sigma$  направим перпендикулярно  $\Sigma$  в направлении диска):

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_\zeta = jk \varepsilon_\zeta \mathbf{E}_\zeta, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_\zeta = -jk \mu_\zeta \mathbf{H}_\zeta \quad D_\zeta, \quad \zeta = 0, 1, i,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_p \times (\mathbf{E}_i(p) - \mathbf{E}_0(p)) = 0, & \quad p \in \partial D_i, & \quad \mathbf{e}_z \times (\mathbf{E}_0(p) - \mathbf{E}_1(p)) = 0, \\ \mathbf{n}_p \times (\mathbf{H}_i(p) - \mathbf{H}_0(p)) = 0, & & \quad \mathbf{e}_z \times (\mathbf{H}_0(p) - \mathbf{H}_1(p)) = 0, \end{aligned} \quad p \in \Sigma, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} r \cdot \left( \sqrt{\varepsilon_0} \mathbf{E}_0^s \times \frac{\mathbf{r}}{r} - \sqrt{\mu_0} \mathbf{H}_0^s \right) = 0, & \quad r = |M| \rightarrow \infty, \quad z > 0, \\ (\mathbf{E}_1^s, \mathbf{H}_1^s) = o(\exp\{-|\operatorname{Im} k_1| r\}), & \quad z < 0. \end{aligned}$$

Здесь  $\{\mathbf{E}_\zeta, \mathbf{H}_\zeta\}$  – полное поле в полупространстве  $D_\zeta$ ,  $\{\mathbf{E}_\zeta^s, \mathbf{H}_\zeta^s\}$  – рассеянное поле,  $\mathbf{n}_p$  – единичная нормаль к гладкой поверхности границы диска  $\partial D_i$ ,  $k$  – волновое число падающей волны в вакууме,  $k_\zeta = k \sqrt{\varepsilon_\zeta \mu_\zeta}$ ,  $M$  – некоторая точка  $D_\zeta$ , а параметры сред удовлетворяют соотношениям  $\operatorname{Im} \varepsilon_0, \mu_0 = 0$ ,  $\operatorname{Im} \varepsilon_1, \mu_1 < 0$ . Поставленная граничная задача (1) имеет единственное решение. Падающая волна может быть Р,S-поляризованной. Временная зависимость выбирается в виде  $\exp(j\omega t)$ .

Будем искать неизвестное рассеянное поле в средах  $D_\zeta$  и неизвестное полное поле внутри частицы  $D_i$  в виде суперпозиции полей электрических дискретных источников (ДИ), расположенных внутри частицы:

$$\mathbf{E}_{\zeta,N}(M) = \sum_{n=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 p_{\alpha,\zeta,n} \frac{j}{k \varepsilon_\zeta \mu_\zeta} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}_{\alpha,\zeta,n}, \quad \mathbf{H}_{\zeta,N}(M) = \frac{j}{k \mu_\zeta} \operatorname{rot} \mathbf{E}_{\zeta,N}(M), \quad \zeta = 0, 1, i. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{A}_{\alpha,\zeta,n}$  – векторные потенциалы ДИ для моделирования поля в соответствующей области  $\zeta$ , направленные вдоль единичных векторов декартовой системы координат (каждое значение параметра  $\alpha$  соответствует одному из орт);  $p_{\alpha,\zeta,n}$  – амплитуды ДИ;  $N$  – число точек с дискретными источниками.

Согласно предлагаемой реализации гибридной схемы, ДИ располагаются в плоскости внутри частицы: в рассматриваемом случае диска выбирается его плоскость симметрии, параллельная границе раздела сред  $\Sigma$ . В качестве источников для моделирования полного внутреннего поля выбираются регулярные сферические функции Бесселя нулевого порядка:

$$\mathbf{A}_{1,i} = \{j_0(k_i R), \quad 0, \quad 0\}, \quad \mathbf{A}_{2,i} = \{0, \quad j_0(k_i R), \quad 0\}, \quad \mathbf{A}_{3,i} = \{0, \quad 0, \quad j_0(k_i R)\}.$$

В качестве источников для моделирования рассеянного поля выбирается решение уравнений Максвелла в виде электрических диполей, которое аналитически учитывает наличие слоистой среды в структуре  $\mathbf{A}$  с помощью тензора Грина  $\tilde{\mathbf{G}}$  [3]:

$$\tilde{\mathbf{G}}(M, M_n) = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 & 0 \\ 0 & G_{11} & 0 \\ \partial G_{31} / \partial x_M & \partial G_{31} / \partial y_M & G_{33} \end{bmatrix}, \quad G_{ij}(M, M_n) = \int_0^\infty J_0(\lambda r) v_{ij}(\lambda, z, z_n) \lambda d\lambda,$$

$$\mathbf{A}_{1,0} = \{G_{11}, \quad 0, \quad \partial G_{31} / \partial x_M\}, \quad \mathbf{A}_{2,0} = \{0, \quad G_{11}, \quad \partial G_{31} / \partial y_M\}, \quad \mathbf{A}_{3,0} = \{0, \quad 0, \quad G_{33}\}.$$

Здесь  $M(x, y, z)$  – точка наблюдения в  $D_\zeta$ ,  $M_n(x_n, y_n, z_n)$  – точка с дискретными источниками из набора  $N$  внутри  $D_i$ . Спектральные функции  $v_{11}, v_{31}, v_{33}$  обеспечивают выполнение условий сопряжения полей на границе раздела сред:

$$v_{ii}(\lambda, z, z_n) = \begin{cases} \frac{\exp\{-\eta_0|z - z_n|\}}{\eta_0} + A_{ii}(\lambda) \exp\{-\eta_0(z + z_n)\}, & z_n > 0, z \geq 0, \\ B_{ii}(\lambda) \exp\{\eta_1 z - \eta_0 z_n\}, & z_n > 0, z \leq 0, \end{cases}$$

$$v_{31}(\lambda, z, z_n) = \begin{cases} A_{31}(\lambda) \exp\{-\eta_0(z + z_n)\}, & z_n > 0, z \geq 0, \\ B_{31}(\lambda) \exp\{\eta_1 z - \eta_0 z_n\}, & z_n > 0, z \leq 0, \end{cases}$$

$$A_{11}(\lambda) = \frac{\mu_1 \eta_0 - \mu_0 \eta_1}{\mu_1 \eta_0 + \mu_0 \eta_1} \cdot \frac{1}{\eta_0}, \quad B_{11}(\lambda) = \frac{2\mu_1}{\mu_1 \eta_0 + \mu_0 \eta_1}, \quad A_{33}(\lambda) = \frac{\varepsilon_1 \eta_0 - \varepsilon_0 \eta_1}{\varepsilon_1 \eta_0 + \varepsilon_0 \eta_1} \cdot \frac{1}{\eta_0},$$

$$B_{33}(\lambda) = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 \eta_0 + \varepsilon_0 \eta_1},$$

$$A_{31}(\lambda) = 2 \frac{\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_0 \mu_0}{(\mu_1 \eta_0 + \mu_0 \eta_1)(\varepsilon_1 \eta_0 + \varepsilon_0 \eta_1)}, \quad B_{31}(\lambda) = \frac{\mu_1}{\mu_0} A_{31}(\lambda),$$

$$r^2 = (x - x_n)^2 + (y - y_n)^2, \quad R_{MM_n}^2 = r^2 + (z - z_n)^2, \quad \eta_\zeta = \sqrt{\lambda^2 - k_\zeta^2}.$$

Выбранное представление обеспечивает автоматическое выполнение условий на бесконечности и линейную независимость ДИ при уменьшении толщины структуры.

Решение задачи дифракции (1) сводится к численному определению набора неизвестных амплитуд ДИ  $P_{\alpha, \zeta, n}$  из аппроксимации условий сопряжения полей на поверхности наночастицы в соответствии с обобщенным методом коллокаций [2]. Возникающая при этом переопределенная система линейных уравнений решается методами минимизации невязки в норме  $l_2$  на поверхности частицы. Вычисление значения поверхностной невязки выполнения граничных условий на другом наборе точек коллокаций дает апостериорную оценку погрешности результата.

С помощью найденных амплитуд ДИ строятся такие характеристики рассеянного поля, как диаграмма рассеяния  $\mathbf{F}$ , которая определяется из соотношения

$$\mathbf{E}_\zeta(\mathbf{r}) / |\mathbf{E}_\zeta^0(\mathbf{r})| = \frac{\exp\{-jk_\zeta R\}}{R} \mathbf{F}(\theta, \varphi) + O(1/R^2), \quad R = |M| \rightarrow \infty, \quad M \in D_\zeta, \quad \zeta = 0, 1, \quad ,$$

дифференциальное сечение рассеяния в верхнем полупространстве

$$DSC(\theta_0, \theta, \varphi) = |F_\theta(\theta_0, \theta, \varphi)|^2 + |F_\varphi(\theta_0, \theta, \varphi)|^2, \quad ,$$

и индикатриса рассеяния в подложке. Отметим, что благодаря представлению (2) и известным асимптотикам интегралов Зоммерфельда на бесконечности в рамках МДИ данные характеристики представляют собой линейные комбинации элементарных функций, что приводит к существенному снижению вычислительных затрат.

Кроме того, могут быть получены и другие характеристики рассеяния, такие как полное сечение рассеяния в верхнем полупространстве:

$$\sigma(\theta_0) = \int_{\Omega} DSC(\theta_0, \theta, \varphi) d\Omega.$$

Здесь  $\Omega$  – единичная полусфера. Последнее позволяет исследовать зависимость полной интенсивности рассеяния на наночастице от длины волны внешнего возбуждения и, следовательно, изучать резонансные свойства плазмонных частиц.



Апробация предложенной схемы проведена для случая дифракции плоской волны на тонком диске, расположенном на подложке при варьировании геометрических характеристик диска и материальных характеристик диска и подложки. В настоящее время ведётся работа по расширению области применимости гибридной схемы МДИ на более широкий класс наноструктур, состоящих из кластеров наночастиц.

Работа выполнена при финансовой поддержке Немецко-Российского Междисциплинарного Научного Центра (German-Russian Interdisciplinary Science Center, G-RISC), проект M-2015b-2.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.А. Еремин, А.Г. Свешников “Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции” М.: МГУ, 1992.
2. Ю.А. Еремин, И.В. Лопушенко // Вестник МГУ. Сер. 15: Выч. Матем. и Киберн. 2016. № 1. С. 3-10.
3. В.И. Дмитриев, Е.В. Захаров “Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике” М.: МАКС Пресс, 2008.

## Простые математические модели для исследования сложных видов синхронизации нелинейных автоколебательных систем

М.Е. Мазуров

Российский Экономический Университет им. Г.В. Плеханова  
[mazurov37@mail.ru](mailto:mazurov37@mail.ru)

Синхронизация - фундаментальное явление в нелинейных системах. До конца XX века исследовалась в основном синхронизация гармонических систем [1]. В дальнейшем открылись новые приложения синхронизации релаксационных систем, особенно в биологии, физике, химии, медицине [2,3]. Однако синхронизация релаксационных систем исследована в значительно меньшей степени. Это объясняется тем, что приближенные математические методы исследования гармонических систем не применимы для исследования релаксационных систем. Для исследования временной синхронизации гармонических систем используются системы нелинейных дифференциальных уравнений в виде [1]

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \varepsilon\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}(t)),$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ;  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ ;  $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ ;  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  - малый параметр;  $\boldsymbol{\alpha}(t) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  - внешний синхронизирующий сигнал. Математическое описание релаксационных колебаний для неавтономных систем нелинейных дифференциальных уравнений с малыми параметрами перед производными может быть осуществлено в виде уравнений [4,5]

$$\varepsilon \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\beta}_1(t)), \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\beta}_2(t)), \quad (1)$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_l)$ ,  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_k)$ ,  $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_l)$ ,  $k + l = n$ ,  $\boldsymbol{\beta}_1(t) = (\beta_1, \dots, \beta_k)$ ,  $\boldsymbol{\beta}_2(t) = (\beta_{k+1}, \dots, \beta_n)$  - внешнее периодическое синхронизирующее воздействие. Возможные виды синхронизации иллюстрируются рис. 1 [6-8]

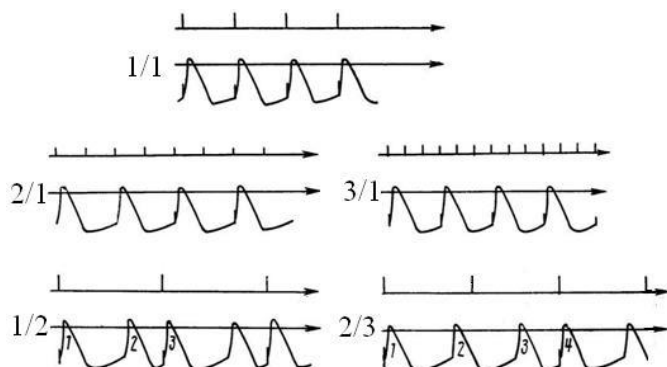


Рис. 1. Внешнее импульсное воздействие и виды синхронизации: 1/1, 2/1, 3/1, 1/2, 2/3.

В настоящее время известны математические модели синхронизируемых автоколебательных систем: 1) формальные аксиоматические модели; 2) модели, основанные на использовании систем обыкновенных дифференциальных уравнений с

малым параметрами перед производными. В данной работе предложены простые математические модели синхронизации, позволяющие выявить фундаментальные свойства синхронизации.

**Простые математические модели синхронизации. Первая модель.**

Для описания релаксационных систем была предложена нелинейная модель, включающая нелинейные дифференциальные уравнения

$$\begin{cases} y'' - \varepsilon(1 - y^2)y' + y = 0 & | & y \geq 0 \\ y'' + 2\lambda y' + \beta y - c = 0 & | & y < 0 \end{cases} \quad (2)$$

Форма колебаний блокинг-генератора, рассчитанная в вычислительном эксперименте, имеет характерную форму релаксационных колебаний. При добавлении к системе (2) ещё одного уравнения первого порядка возникает способность к пачечной генерации импульсов. Пачечная генерация импульсов доказана в вычислительном эксперименте. Предлагаемая математическая модель релаксационной системы позволяет получить значительную скважность импульсов, рассчитываемую из соотношения  $\frac{\tau}{T}$ , ( $\tau$  - ширина импульса на уровне 0,1 от максимальной амплитуды,  $T$  - период импульса). В вычислительном эксперименте получена скважность импульсов  $N \approx 1600$  и более. Области синхронизации в координатах  $\left(\frac{T}{T_0}, A\right)$ , где  $T_0$  - период колебаний генератора, могут быть построены по методу, изложенному в [6-8]. Область синхронизации в режиме 1/1 чрезвычайно велика, она имеет в интервале  $\left(1 - \frac{\tau}{T}, 1\right)$ , где  $\frac{\tau}{T}$  - скважность импульса, при  $\frac{\tau}{T} \approx 0.01$  ширина зоны синхронизации равна 99%.

Достоинством первой из математических моделей является описание второй области в виде линейного дифференциального уравнения, что позволяет получить точные решения при внешнем воздействии прямоугольными импульсами.

**Вторая математическая модель**

Решение блокинг-генератора задано на периоде различным образом на двух участках. Математическая модель нелинейной системы импульсного автогенератора

$$\begin{cases} y = \varphi(t) & | & 0 \leq t < t_1 \\ y' + ay = b + f(t) & | & t_1 \leq t < T \end{cases}$$

где  $T$  - период автогенератора;  $\varphi(t)$  - решение системы на участке  $0 \leq t < t_1$ , оно может задаваться произвольно.  $f(t)$  - внешнее периодическое воздействие в виде одной или нескольких импульсных последовательностей.

Оба решения сшиваются при переходе от первого ко второму. В дальнейшем вторая часть решения заканчивается при достижении решением дифференциального уравнения порогового значения. Достижение порогового значения может достигаться естественным образом, либо за счет внешнего воздействия. В качестве внешнего воздействия может быть использована периодическая импульсная последовательность, либо сумма нескольких периодических последовательностей. Можно использовать в качестве внешнего воздействия воздействие синусоидальной формы, пилообразной формы, или любой другой формы.

Пример исследования синхронизации при использовании внешнего возбуждения в виде последовательности суммы двух периодических импульсных последовательностей приведен на рис. 2. Синхронизация осуществлялась двумя периодическими импульсными последовательностями. Значения параметров уравнения  $a=0.07$ ;  $b=0.02$ ;  $n_1=40$ ;  $u_1=0.1$ ;  $u_2=0.5$ ;  $u_3=-0.2$ .

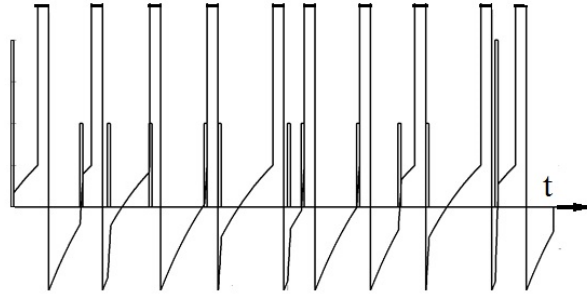


Рис. 2. Синхронизация почти-периодической функции двумя внешними периодическими последовательностями с несоизмеримыми периодами

Приведенный пример иллюстрирует фундаментальные свойства синхронизации почти-периодическим внешним воздействием, заключающийся в том, что ни одно внешнее периодическое воздействие не может синхронизировать автоколебательную систему; синхронизация осуществляется на частоте, равной  $\varepsilon$ -почти-периоду почти-периодической функции [9].

Исследуем на той же самой математической модели два связанных генератора

$$\begin{cases} y_1 = \varphi(t), & t \leq t_1; & y_1' + a_1 y_1 = b_1 + c_1 y_2; & t_1 < t \leq T_1 \\ y_2 = \varphi(t), & t \leq t_1; & y_2' + a_2 y_2 = b_2 + c_2 y_1; & t_1 < t \leq T_2 \end{cases} \quad (3)$$

Здесь  $a_1, a_2, b_1, b_2$  - параметры дифференциальных уравнений,  $c_1, c_2$  - коэффициенты связи. Из вычислительного эксперимента видим захватывание низкочастотного генератора более высокочастотным, происходящее в момент времени  $t_1$ , что иллюстрируется рис. 3.

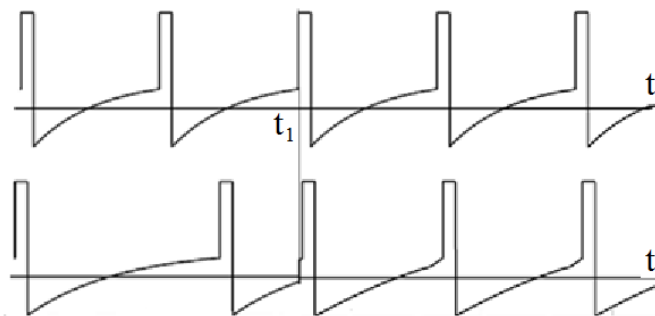


Рис. 3. Формирование единого ритма двух связанных релаксационных осцилляторов на частоте более высокочастотного осциллятора, форма колебаний которого показана сверху

Исследование двух связанных осцилляторов с помощью математической модели 2 иллюстрирует фундаментальные свойства синхронизации, заключающейся в том, что при взаимодействии двух связанных осцилляторов единый ритм устанавливается на

частоте более высокочастотного осциллятора или более точно на частоте очень близкой к частоте высокочастотного осциллятора.

**Автогенератор на основе аксиоматической модели. Третья простая математическая модель.**

Аксиоматическая модель релаксационного автогенератора задается в виде двух различных функций на двух последовательных временных участках

$$y = \varphi_1(t), \quad t \leq t_1; \quad y = \varphi_2(t), \quad t_1 < t \leq T$$

Оба полученных решения сшиваются при переходе от первого ко второму. В дальнейшем вторая часть решения заканчивается при достижении решением дифференциального уравнения порогового значения. Достижение порогового значения может достигаться естественным образом, либо за счет внешнего воздействия.

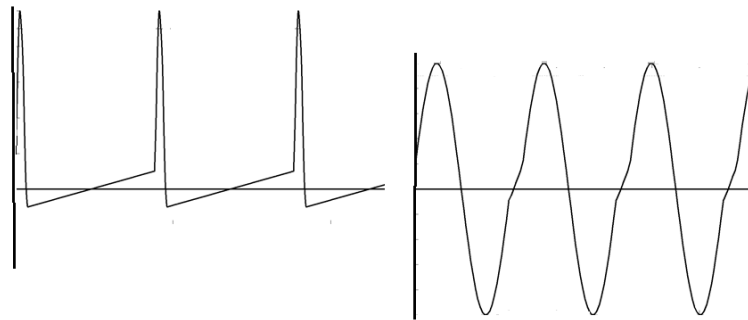


Рис.4. Форма колебаний автогенераторов по аксиоматической модели

Простая математическая модель №3 иллюстрирует два фундаментальных свойства синхронизации. 1) Чем ближе форма колебания к синусоидальной, тем меньше полоса синхронизации. 2) Если задать допороговое решение в виде линейных функций, то можно точно доказать в случае двух синхронизируемых автогенераторов, что единый ритм устанавливается на частоте более высокочастотного осциллятора или более точно на частоте очень близкой к частоте высокочастотного осциллятора. В работах [6-8] показано, что при равенстве коэффициентов связи в формуле (3)  $c_1 = c_2 = c$  единый ритм равен

$$f_{ед. ритм} = f_{max} - c(f_{max} - f_{min})$$

В заключение можно сказать, что предлагаемые простые математические модели синхронизации позволяют выявить основные фундаментальные свойства синхронизации не на стадии решения сложных нелинейных дифференциальных уравнений, а на стадии целесообразного математического моделирования синхронизируемых систем.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1.А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. «Теория колебаний» М.:Наука. 1981.
- 2.М.Е. Мазуров “Нелинейная синхронизация и ритмогенез в электровозбудимых системах сердца” /Дисс. д. ф.-м. н. Пушкино. 2007.
- 3.Г.Д. Абарбанель и др. //Успехи физических наук. 1996. Т.166. №4. С. 363-390.
- 4.У.Ф. Мищенко, Н.Х. Розов “Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания” М.: Наука. 1975.
- 5.Д.М. Левитас, В.В. Мигулин// ЖТФ. 1947. Т. 17. вып. 10. С. 1171-1180

*Труды школы-семинара «Волны-2016».*  
*Математическое моделирование в радиофизике и оптике*

6. М.Е. Мазуров // ДАН. 2012. Т. 444. № 1. С. 31-34.
7. М.Е. Мазуров // ЖВМ и МФ АН СССР. 1991. Т.31. №11.С. 1619-1636.
8. М.Е. Мазуров // Биофизика. 2009. Т. 54. вып. 1. С. 89-96.
9. Б.М. Левитан “Почти-периодические функции” ГИТТЛ. 1953.

## Дифракция электромагнитных волн на телах с диэлектрическими ребрами

А.Н. Боголюбов, И.Е. Могилевский  
 Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова  
[bogan7@yandex.ru](mailto:bogan7@yandex.ru)  
[mogilev@phys.msu.ru](mailto:mogilev@phys.msu.ru)

В настоящее время весьма актуальными являются задачи дифракции электромагнитного поля на сложных диэлектрических структурах при наличии ребер на их границах. Хорошо известно, что наличие ребер и кромок приводит к появлению сингулярности электромагнитного поля в их окрестности [1]. В задачах расчета волноведущих систем присутствие угловых точек у границы и у линий разрыва диэлектрической проницаемости в поперечном сечении волновода приводит к появлению особенностей у электромагнитного поля в окрестности особой точки границы или неоднородности заполнения [2-8]. Это существенно усложняет применение численных методов для расчета подобных систем.

Одним из весьма эффективных способов преодоления этих проблем является выделение особенности решения в явном виде, то есть построение асимптотического представления электромагнитного поля в окрестности диэлектрического ребра. При этом существенно используются результаты по асимптотике решения эллиптических краевых задач, представленные в работе В.А. Кондратьева [4], а также С.А. Назарова и Б.А. Пламеневского [3].

Рассматривается плоская задача дифракции электромагнитной волны на диэлектрической клиновидной структуре (зависимость от координаты  $z$  отсутствует). Предполагается, что электромагнитное поле имеет гармоническую зависимость от времени вида  $e^{-i\omega t}$ :

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}(x, y)e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{H}(x, y, z, t) = \mathbf{H}(x, y)e^{-i\omega t}.$$

Магнитная проницаемость среды  $m \in \mathbb{1}$ . Диэлектрическая проницаемость  $e$  — кусочно непрерывная скалярная вещественная функция.

Полное поле удовлетворяет системе уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= ik\mathbf{H}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -ike\mathbf{E}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $k = \frac{\omega}{c}$  — волновой вектор, и условиям сопряжения на границе раздела диэлектриков

$$\begin{aligned} (\mathbf{H} \mathbf{ch})|_C &= 0, \quad \int_C (\mathbf{H} \mathbf{r} \mathbf{n})|_C = 0, \\ \int_C (e\mathbf{E} \mathbf{ch})|_C &= 0, \quad \int_C (\mathbf{E} \mathbf{r} \mathbf{n})|_C = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $C$  — плоскость разрыва диэлектрической проницаемости,  $\mathbf{n}$  — вектор нормали.

Полное поле ищется в виде суммы поля падающей плоской волны и дифрагированного поля

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_d, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_d$$

Для падающего поля рассматриваются два типа поляризации:

$$\mathbf{E}_0 = \{0; 0; E_1 e^{ikr \cos j}\}, \quad \mathbf{H}_0 = \{0; 0; H_1 e^{ikr \cos j}\}.$$

Для компонент дифрагированного поля ставятся условия излучения Зоммерфельда на бесконечности

Вводится цилиндрическая система координат, ось  $Oz$  которой направлена вдоль ребра клина. Для компонент электрического поля из (1) можно получить следующую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial j} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial j} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_j) &= -k^2 e E_r, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial r} &= -k^2 e E_j, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial j^2} &= -k^2 e E_z, \end{aligned}$$

с условиями сопряжения на поверхностях разрыва диэлектрической проницаемости  $\frac{\partial E_j}{\partial r} = 0$ ,  $\frac{\partial E_r}{\partial r} = 0$ ,  $\frac{\partial E_z}{\partial r} = 0$  и дополнительным условием

$$\operatorname{div}(e\mathbf{E}) = 0, \text{ Ю } \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r e E_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial j} (e E_j) = 0. \quad (3)$$

Чтобы провести детальное исследование поведения электромагнитного поля в окрестности ребра диэлектрического клина, данная задача сначала рассматривается на всей плоскости с бесконечным диэлектрическим клином (диэлектрическая проницаемость берется кусочно постоянной). В дальнейшем использование срезающей функции позволяет свести задачу дифракции на конечном объекте к задаче на всей плоскости с бесконечным клином. После преобразований будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_r}{\partial j^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial E_j}{\partial r} \right) &= -\frac{2a}{r^2} \frac{\partial u}{\partial j} (r, 0) d(j) + \frac{2a}{r^2} \frac{\partial u}{\partial j} (r, 0) d(j - w_0) - \\ &- \frac{2a}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r e E_j(r, 0)) d(j) + \frac{2a}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r e E_j(r, w_0)) d(j - w_0) + f_r(r, j), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $a = \frac{e_2 - e_1}{e_2 + e_1}$ ,  $f_r(r, j) = -k^2 e E_r$ . Дополнительное условие (3) принимает вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial E_j}{\partial j} - \frac{2a}{r} (e E_j(r, 0)) d(j) + \frac{2a}{r} (e E_j(r, w_0)) d(j - w_0) = 0.$$

Тем же методом, что использован в работе [9] для выделения особенности электромагнитного поля в окрестности ребра в волноводе, удастся получить следующее представление радиальной компоненты электрического поля задачи дифракции в окрестности ребра диэлектрического клина:



$$E_r(r, j) = c \cdot e^{-d < n_k^{(1)} < 1} \cdot r^{n_k^{(1)} - 1} \left\{ C_k^{(1)} \cos \left( \frac{p - j}{n_k^{(1)}} \right) n_k^{(1)} \frac{\pi}{2} + D_k^{(1)} \cos \left( \frac{p - |w_0 - j|}{n_k^{(1)}} \right) n_k^{(1)} \frac{\pi}{2} \right\} + \\
 + c \cdot e^{-d < n_k^{(2)} < 1} \cdot r^{n_k^{(2)} - 1} \left\{ C_k^{(2)} \cos \left( \frac{p - j}{n_k^{(2)}} \right) n_k^{(2)} \frac{\pi}{2} + D_k^{(2)} \cos \left( \frac{p - |w_0 - j|}{n_k^{(2)}} \right) n_k^{(2)} \frac{\pi}{2} \right\} + B(r, j).$$

где  $n_k^{(1)}$  и  $n_k^{(2)}$  — решения уравнений

$$\begin{aligned} \sin p n_k^{(1)} - a \sin(p n_k^{(1)} - n_k^{(1)} w_0) &= 0, \\ \sin p n_k^{(2)} + a \sin(p n_k^{(2)} - n_k^{(2)} w_0) &= 0, \end{aligned}$$

(кроме  $n_k = 0$ ),  $c(r) = \begin{cases} 1, & r \leq d/2, \\ 0, & r > d, \end{cases}$   $c(r) \text{ OC}^\Gamma$  — срезающая функция,  $B(r, j)$  —

гладкая часть решения.

Данное представление поля в окрестности ребра диэлектрического клина может повысить точность математического моделирования дифракции электромагнитного поля на сложных телах содержащих диэлектрические клиновидные структуры. Знание точного вида особенности электромагнитного поля позволяет точно приблизить сингулярную часть решения и свести задачу к аппроксимации гладкой части, что дает возможность получить скорость сходимости приближенного решения к точному, соответствующую гладкому случаю.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (грант 15-01-03524-а).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А.Г. Свешников, И.Е. Могилевский «Избранные математические задачи теории дифракции» М. Физический факультет МГУ, 2012.
2. М.Ш. Бирман, М.З. Соломяк // Успехи мат. наук, 1987, Т.42, вып.6, С.61-76.
3. С.А. Назаров, Б.А. Пламеневский «Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей». М.: Наука, 1991.
4. В.А. Кондратьев // Труды Московского Математического Общества, Т.16, 1967, С.227-313.
5. А.Н. Боголюбов и др. // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал). <http://jre.cplire.ru>. 2001. №8.
6. А.Н. Боголюбов и др. // Радиотехника и электроника. 2003. Т.48. №7. С.787-794.
7. Г.А. Гринберг «Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений». М.: Изд-во АН СССР. 1948.
8. А.Н. Боголюбов, И.Е. Могилевский // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011 Т.51, № 12, С.2253–2259.
9. А.Н. Боголюбов, И.Е. Могилевский, А.Г. Свешников // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015 Т.55, № 3, С.446–459.

## Принципы моделирования полупроводниковых лазеров

А.Г. Ржанов

Физический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова  
[rjanov@mail.ru](mailto:rjanov@mail.ru)

История полупроводниковых лазерных диодов (ЛД) начинается с 60-х годов прошлого века [1, 2]. В 1970 году, благодаря использованию двусторонних гетероструктур, была впервые получена непрерывная генерация излучения и начался бурный процесс развития техники ЛД [3]. Примерно в то же время появились первые работы по математическому моделированию динамических процессов этих приборов [4]. С появлением компьютеров возможности моделирования существенно расширились. Это относится к периоду 80-х годов прошлого века и далее. Одна из современных конструкций мощного ЛД показана на рис. 1.

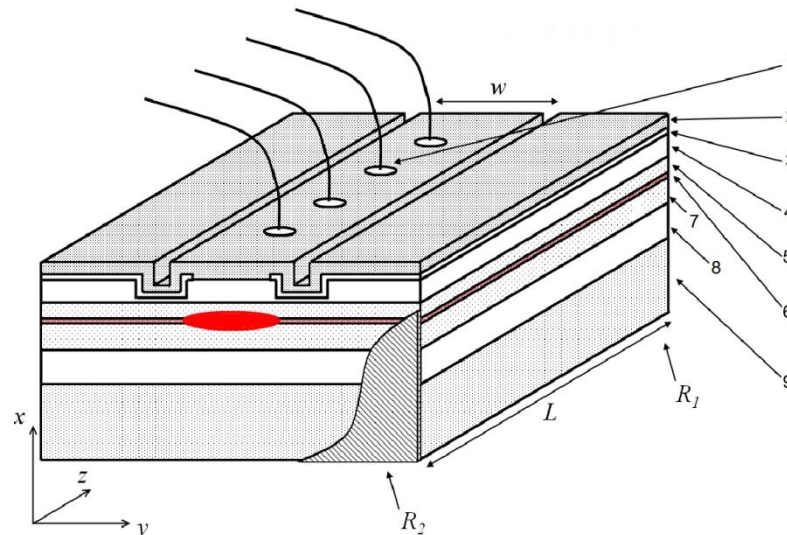


Рис. 1. Мощный инжекционный лазер. Контакты (1), контактный слой (2), изолирующий слой (3), P-эмиттер (4), волновод (5,7), квантовая яма (6), N-эмиттер (8), подложка (9), зеркала ( $R_1$ ,  $R_2$ ) [5]

В основе всех самосогласованных моделей лежат кинетические (скоростные) уравнения, которые описывают баланс неравновесных носителей в активной области ЛД. В самом простом виде эти уравнения записываются для средних значений переменных величин, не учитывая пространственное распределение тока накачки, концентрации инжектированных электронно-дырочных пар (носителей заряда) и интенсивности лазерного излучения внутри резонатора. В более детальной самосогласованной модели ЛД учтено пространственное взаимодействие между лазерным излучением и неравновесными носителями, от концентрации которых зависит эффективная диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon(y)$  [6]:

$$\varepsilon(y) = \varepsilon_{eff}^0 - AN(y) + j(BN(y) - F), \quad (1)$$

где  $y$  – латеральная координата,  $\varepsilon_{eff}^0$  – усреднённое (эффективное) значение диэлектрической проницаемости активного слоя без накачки,  $A$ ,  $B$  – коэффициенты, характеризующие нелинейную рефракцию и усиление в активном слое лазера,  $F$  – коэффициент резонансных потерь.

В этом случае в самосогласованную модель ЛД входит система дифференциальных кинетических уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial N(y,t)}{\partial t} = \frac{J(y,t)}{ed} - \frac{N(y,t)}{\tau_{sp}} + D \cdot \frac{\partial^2 N(y,t)}{\partial y^2} - \Gamma \frac{c}{n^*} \cdot g(N) \cdot \sum_j S_j(t) |\psi_j(y,t)|^2; \quad (2)$$

$$\frac{dS_j(t)}{dt} = G_j(t)S_j(t) + \frac{\eta}{\tau_{sp}} \langle N(t) \rangle, \quad (3)$$

где  $N(y, t)$  - концентрация неравновесных носителей в активном слое,  $J(y, t)$  – плотность тока накачки на гетеропереходах,  $S_j(t)$  - средняя плотность фотонов в  $j$ -ой латеральной (поперечной) моде,  $D$  - коэффициент амбиполярной диффузии носителей,  $G_j(t)$  - модовое усиление,  $\eta$  - фактор спонтанного излучения,  $\tau_{sp}$  - время спонтанной рекомбинации носителей,  $\tau_{ph}$  - время жизни фотонов в «холодном» резонаторе,  $e$  - заряд электрона,  $c$  – скорость света в вакууме,  $d$  – толщина активного слоя,  $g(N) = a^* \cdot (N(y, t) - N_{tr})$  – материальное усиление,  $a^*$  – дифференциальный коэффициент усиления,  $N_{tr}$  – концентрация прозрачности,  $\Gamma$  - коэффициент оптического ограничения активного слоя,  $n^*$  – эффективный показатель преломления нулевой моды,  $\langle N(t) \rangle$  – среднее значение концентрации носителей,  $\psi_j(y)$  - нормированные профили латеральных мод.

Количество уравнений (3) в модели соответствует числу латеральных мод, перешедших через порог генерации.

В уравнении (2) первый член в правой части описывает приток носителей в активную область ЛД за счёт накачки, второй - убыль носителей из-за спонтанной рекомбинации, третий - диффузию, и четвёртый - убыль носителей из-за вынужденной рекомбинации - так называемое "пространственное выжигание носителей" или "выжигание пространственной дыры".

В уравнении (3) первый член в правой части описывает приток фотонов в  $j$ -ю поперечную моду за счёт вынужденного излучения, а второй - приток фотонов в ту же моду от спонтанной рекомбинации. Коэффициент  $\eta$  мал, и по разным оценкам он имеет порядок от  $10^{-3}$  до  $10^{-5}$ .

Система уравнений (2)-(3) вместе с набором соотношений, описывающих связь между коэффициентами и выражением (1), образуют кинетическую часть модели.

Вторую, оптическую или резонаторную, часть модели представляет волновое уравнение, преобразованное в уравнение Гельмгольца с учётом зависимости амплитуды оптического поля от времени и продольной координаты, в виде  $E(\vec{r}) = \psi(y) \cdot \exp(i(\omega t - \beta z))$ .

$$\frac{d^2 \psi_j(y)}{dy^2} + \left( \frac{\omega_j^2}{c^2} \varepsilon(y) - \beta^2 \right) \psi_j(y) = 0, \quad (4)$$

где  $\omega_j$  - частота оптического излучения,  $\beta$  - продольная (по оси  $z$ ) постоянная распространения,  $\psi_j(y)$  - амплитудные профили мод – собственные функции

уравнения (СФ). Все величины в уравнении (4), кроме скорости света, считаются комплексными.

В уравнении (4) собственными значениями (СЗ) являются в случае волноводной задачи постоянные распространения  $\beta_j$ , количество которых определяется структурой волновода. В случае резонаторной задачи (ЛД) — это либо комплексные частоты мод  $\omega_j$ , либо эффективные показатели преломления  $n_{eff j} = c\beta/\omega_j$ . Кроме волноводных мод, в общем случае возможно существование излучательных и вытекающих мод. В некоторых конструкциях ИЛ такие моды используются. Они за редким исключением имеют непрерывный спектр.

Постоянная распространения  $\beta$  для резонаторной задачи задается номером продольной моды  $M$  (считаем продольную моду единственной), длиной резонатора  $L$  и коэффициентами отражения зеркал  $R_1$  и  $R_2$ :

$$\beta = \frac{M\pi}{L} + \frac{i}{2} \left( \alpha_{int} + \frac{1}{2L} \ln \left( \frac{1}{R_1 R_2} \right) \right), \quad (5)$$

где  $\alpha_{int}$  — нерезонансные потери в лазере,  $R_1$  и  $R_2$  — коэффициенты отражения по мощности зеркал в лазере.

Решая задачу (4) на СЗ и СФ с учётом (1) и (5), находим усиление поперечных мод:

$$G_j(t) = -2\text{Im}(\omega_j). \quad (6)$$

Один из возможных алгоритмов решения самосогласованной задачи показан на рис. 2.

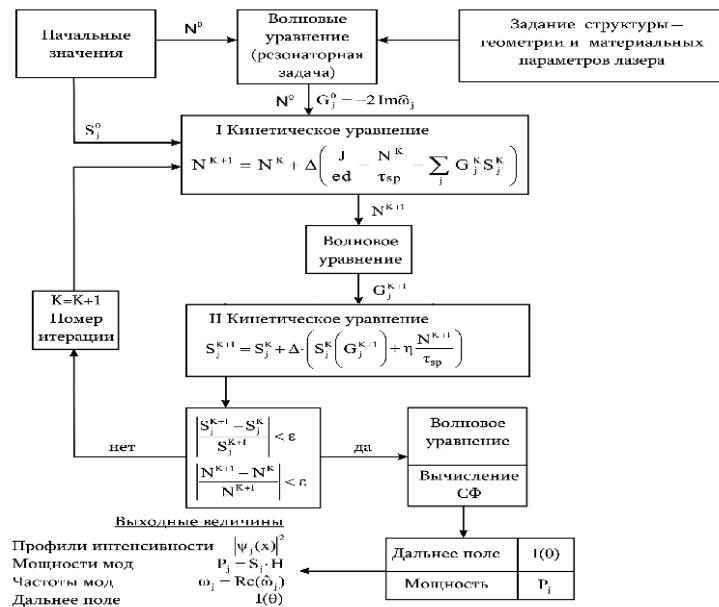


Рис. 2. Алгоритм решения самосогласованной задачи

В начале процесса расчета выбираются начальные значения концентрации неравновесных носителей  $N^0$  и средней плотности фотонов  $S^0$  во всевозможных модах, а также задаётся ток накачки. Из этих начальных значений с помощью записанного в разностном виде уравнения (2) находится очередное приближение для концентрации  $N$ ,

от которой зависит эффективная диэлектрическая проницаемость активного слоя лазера (1). Для нового профиля диэлектрической проницаемости  $\mathcal{E}(y)$  с учётом (5) решается резонаторная задача (4) и при фиксированном значении  $\beta$  находятся комплексные частоты резонаторных мод  $\omega_j$  и модовое усиление (6). Модовое усиление далее используется для нахождения очередного приближения средней концентрации фотонов в модах  $S_j$ , согласно записанному в разностной форме уравнению (3).

Полученные из данной процедуры значения средних концентраций фотонов используются для решения уравнения (2). Тем самым замыкается цикл итераций. Этот алгоритм может быть с успехом использован как для моделирования динамики излучения ЛД при прямой импульсной модуляции, так и для нахождения стационарного распределения интенсивности ближнего поля  $|\psi_j(y)|^2$  на зеркалах. Дальнее поле (диаграмма направленности) вычисляется по формуле [7]:

$$I_j(\theta) = \cos^2(\theta) \cdot \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_j(y) \cdot \exp(i \cdot \sin(\theta) \frac{\omega_j}{c} y) dy \right|^2, \quad (7)$$

где  $\theta$  - азимутальный угол.

Отдельную тему для рассмотрения представляет учёт процессов, связанных с нагревом активной области лазера. Для этого требуется решение уравнения теплопроводности параллельно с динамической задачей. Таких расчётов пока что нет в силу того, что это требует колоссальных компьютерных мощностей. При этом раздельное решение задач даёт вполне адекватные результаты.

Следующими физическими процессами, которые не учтены в модели (1)-(6) являются внутризонное спектральное "выжигание дыры" и термолизация носителей. Перераспределение носителей по энергии внутри зон приводит, так же, как и в пространстве, к неоднородному уширению линии усиления. В обоих случаях проявляется конкуренция мод, так как источник подпитки фотонами один для всех. Учёт таких процессов актуален только при больших мощностях генерации.

Существует ещё несколько механизмов, которые можно было бы включить в модель, однако это пока что невозможно по компьютерным причинам.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ж. И. Алферов, Р. Ф. Казаринов // Авт. свид. № 181737. Заявка № 950840 с приоритетом от 30 марта 1963.
2. H. Kroemer // Proc. IEEE. 1963. V. 51. No. 12. P. 1782.
3. I. Hayashi et al. // Appl. Phys. Lett. 1970. V. 17. No. 2. P. 109.
4. J. Vuus // IEEE J. Quant. Electron. 1983. V. QE-19. No. 6. P. 953.
5. И.С. Тарасов // Квантовая электроника. 2010. Т. 40. №. 8. С. 661.
6. "Волноводная оптоэлектроника". п/ред. Т. Тамира. М.: Мир, 1991.
7. Х. Кейси, М. Паниш. "Лазеры на гетероструктурах". М.: Мир, 1981.

## Гибридный метод численного решения уравнения Пуассона в области с диэлектрическим углом

М.И. Светкин, А.Н. Боголюбов, А.И. Ерохин, И.Е. Могилевский

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

[mihail-svetkin@mail.ru](mailto:mihail-svetkin@mail.ru)

Проблема расчета электромагнитного поля в области, содержащей диэлектрический входящий угол, встречается довольно часто в задачах электростатики и электродинамики. Из теории эллиптических уравнений [1-2], а также различных экспериментальных данных [6], известно, что градиент потенциала, отвечающий напряженности электрического поля, имеет особенность в окрестности угловых точек. В связи с этим при численном моделировании указанных систем необходимо учитывать эти особенности поведения решения. Одним из самых распространенных численных методов учета такого рода сингулярностей является использование метода конечных элементов [7] с адаптивной сеткой, существенно более густой в окрестности угловых точек.

В данной работе предлагается гибридный численный алгоритм, который основан на применении метода конечных элементов с учетом априорной информации о поведении решения в окрестности угловой точки. Благодаря такой комбинации численного и аналитического метода построения решения, алгоритм становится быстрым и эффективным.

Рассмотрим круг единичного радиуса с металлической идеально проводящей границей, заполненный двумя диэлектриками с постоянными диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ , имеющими форму секторов с вершинами в центре круга (рис. 1). Угол раствора меньшего сектора обозначим  $\omega$ .

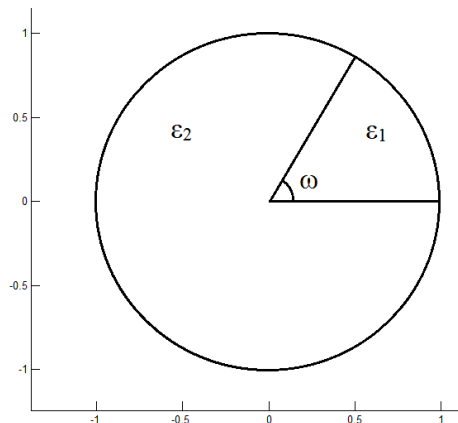


Рис. 1. Область с входящим диэлектрическим углом.

Распределение электрического потенциала  $u$  описывается уравнением Пуассона с граничными условиями Дирихле и условиями сопряжения на границе раздела диэлектриков:

$$\operatorname{div}(\varepsilon(M) \operatorname{grad} u) = -f(M), \quad M \in \Omega = \{(r, \varphi) : r < 1; 0 < \varphi < \omega, \omega < \varphi < 2\pi\}, \quad (1)$$

$$u|_{r=1} = 0, \quad (2)$$

$$u|_{\varphi=0+0} = u|_{\varphi=0-0}, u|_{\varphi=\omega+0} = u|_{\varphi=\omega-0}, \quad (3)$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\varphi=0+0} = \varepsilon_2 \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\varphi=0-0}, \quad \varepsilon_2 \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\varphi=\omega+0} = \varepsilon_1 \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\varphi=\omega-0}, \quad (4)$$

где  $\varepsilon(M) = \begin{cases} \varepsilon_1, & 0 \leq \varphi < \omega \\ \varepsilon_2, & \omega \leq \varphi < 2\pi \end{cases}$ ,  $f(M)$  выражается через плотность зарядов  $\rho$  :

$f(M) = 4\pi\rho(M)$ . Считается, что  $f(M)$  есть достаточно гладкая функция.

Асимптотическое представление решения уравнения Пуассона в окрестности входящего диэлектрического угла получено строгим математическим методом с использованием аппарата обобщенных функций и техники выделения особенности в угловых точках, впервые предложенной В.А. Кондратьевым [2], в работе [5].

Рассмотрим вспомогательную задачу (1, 3, 4) в окрестности угла  $\Pi \subset \Omega$ , исключив из нее граничное условие (2). Представим ее решение в виде суммы частного решения неоднородной задачи и общего решения однородной задачи.

Было показано, что функции вида

$$\chi_i(r, \varphi) = \begin{cases} r^{\sigma_i} [A_1^{(i)} \sin(\sigma_i \varphi) + B_1^{(i)} \cos(\sigma_i \varphi)], & 0 < \varphi \leq \omega \\ r^{\sigma_i} [A_2^{(i)} \sin(\sigma_i \varphi) + B_2^{(i)} \cos(\sigma_i \varphi)], & \omega < \varphi \leq 2\pi, \end{cases} \quad (5)$$

где  $\sigma_i$  – неотрицательные корни уравнений  $\sin(\pi\sigma) \pm \alpha \sin((\pi - \omega)\sigma) = 0$ ,  $\alpha = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ ,  $A_{1,2}^{(i)}$ ,  $B_{1,2}^{(i)}$  – произвольные константы, являются решениями однородной вспомогательной задачи. При  $\omega \neq \pi$  всегда существует единственный положительный корень  $\sigma_1 < 1$ . Таким образом, в угловой точке решение вида  $r^{\sigma_1} \Phi(\varphi)$  будет иметь особенность градиента порядка  $\sigma_1 - 1$ . Частное решение неоднородной задачи  $\mu(r, \varphi)$  искалось в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности вершины угла.

$$\mu(r, \varphi) = \sum_{n=0}^P r^n \Phi_n(\varphi). \quad (6)$$

Решение задачи (1, 3, 4) в окрестности  $\Pi$  представляется как линейная комбинация (5) и (6)

$$u(r, \varphi) = \mu(r, \varphi) + \sum_{i=0}^{I_{\max}} C_i \chi_i(r, \varphi), C_i \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

где  $C_i$  – произвольные коэффициенты, и сумма содержит  $I_{\max}$  слагаемых с наименьшими степенями  $\sigma_i$ , дающих основной вклад в решение при малых значениях  $r$ .

Вернемся к задаче (1-4) в круге. Умножая уравнение (1) на пробную функцию  $v$ , интегрируя полученное выражение по области  $\Omega \setminus \Pi$  и применяя формулу Грина, получим:

$$-\int_{\Omega \setminus \Pi} \varepsilon \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v ds + \iint_{\Omega} \varepsilon \frac{\partial u}{\partial n} v dl + \iint_{\Pi} \varepsilon \frac{\partial u}{\partial n} v dl = - \int_{\Omega \setminus \Pi} f v ds. \quad (8)$$

Так как граничное условие (2) является главным, то  $v|_{\partial\Omega} = 0$ , и первый интеграл по границе обращается в ноль. На границе  $\partial\Pi$  поставим условия сшивания, заключающиеся в непрерывности решения и его нормальной производной. После подстановки (7) в (8) получим

$$-\int_{\Omega \setminus \Pi} \varepsilon \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v ds + \iint_{\partial\Pi} \varepsilon \frac{\partial \mu}{\partial n} v dl + \sum_{i=0}^{I_{\max}} C_i \iint_{\partial\Pi} \varepsilon \frac{\partial \chi_i}{\partial n} v dl = - \int_{\Omega \setminus \Pi} f v ds. \quad (9)$$

Таким образом, исходная задача, решаемая в области  $\Omega$ , сводится к решению задачи (9) в области  $\Omega \setminus \Pi$ . Приближенное решение этой задачи ищется методом конечных элементов и представляется в виде разложения по базисным функциям  $\{\psi_i(x, y)\}_{i=1..N}$

$$u(x, y) = \tilde{\mu}(x, y) + \sum_{i=0}^N C_i \psi_i(x, y), \quad (10)$$

где слагаемое  $\tilde{\mu}(x, y)$  обеспечивает непрерывность решений (7) и (10) и является линейной комбинацией функций  $\psi_i(x, y)$ . Подставляя (10) в (9) и выбирая в качестве пробных функций  $v(x, y) = \psi_j(x, y)$ , получим окончательную постановку задачи

$$\begin{aligned} -\sum_{i=0}^N C_i \int_{\Omega \setminus \Pi} \varepsilon \operatorname{grad} \psi_i \operatorname{grad} \psi_j ds - \int_{\Omega \setminus \Pi} \varepsilon \operatorname{grad} \tilde{\mu} \operatorname{grad} \psi_j ds + \\ + \iint_{\partial\Pi} \varepsilon \frac{\partial \mu}{\partial n} \psi_j dl + \sum_{i=0}^N C_i \iint_{\partial\Pi} \varepsilon \frac{\partial \psi_i}{\partial n} \psi_j dl = - \int_{\Omega \setminus \Pi} f \psi_j ds; \quad j = 1..N. \end{aligned} \quad (11)$$

При решении системы (11) находятся коэффициенты  $C_i$ , с помощью которых по формулам (7) и (10) определяется решение во всей области  $\Omega$ .

Для проверки предложенного метода задача (1-4) дополнительно решалась в  $\Omega$  методом конечных элементов на густой сетке без учета особенности в угловой точке. С помощью метода наименьших квадратов в окрестности угла решение аппроксимировалось рядом

$$u(r, \varphi) = u_0 + u_1(\varphi)r^{\sigma_1} + u_2(\varphi)r^{\sigma_2}. \quad (12)$$

Полученные зависимости  $u_i(\varphi)$  сравнивались с функциями  $C_i \chi_i(1, \varphi)$  суммы (7), где коэффициенты  $C_i$  находились предложенным в данной работе методом. Для случая  $f(x, y) = 1 + x$  на рис. 2 изображены угловые распределения коэффициентов  $u_1(\varphi)$  и  $u_2(\varphi)$ , взятые на окружности радиуса  $r = 10^{-4}$ , полученные для проверочного решения на сетке с 20102 узлами, и соответствующие функции  $C_1 \chi_1(1, \varphi)$  и  $C_2 \chi_2(1, \varphi)$ , полученные при использовании сетки с 1087 узлами.



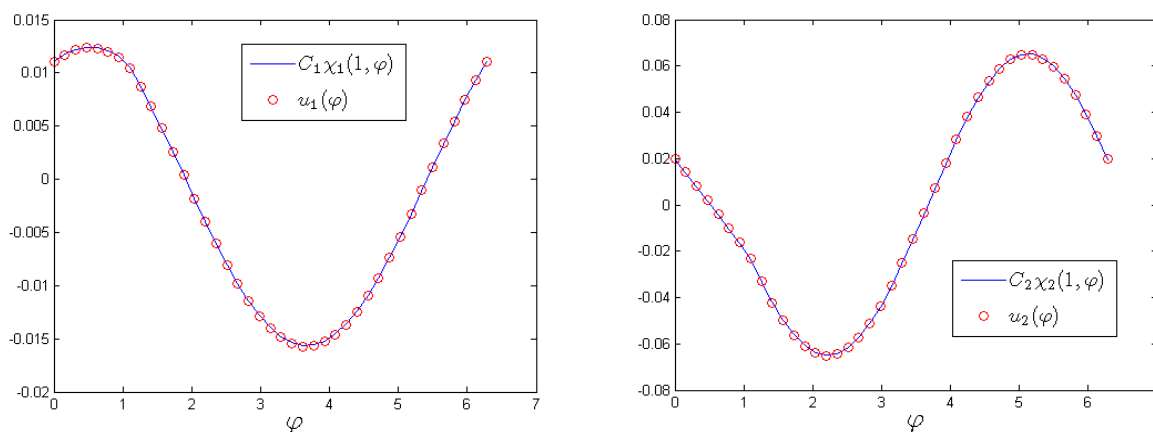


Рис. 2. Угловые распределения  $u_1(\varphi)$ ,  $C_1\chi_1(1, \varphi)$  (слева) и  $u_2(\varphi)$ ,  $C_2\chi_2(1, \varphi)$  (справа) в окрестности угла.

Наблюдается хорошее совпадение полученных угловых распределений для первых двух слагаемых ряда (7), содержащих особенность градиента и первую гладкую добавку.

Сходимость представленного алгоритма исследовалась для нескольких сеток, адаптивно сгущаемых около вершины угла. Значения полученных коэффициентов  $C_i$  представлены в таблице 1.

Табл. 1. Значения первых коэффициентов суммы (7), полученные с использованием адаптивных сеток для  $I_{\max} = 7$ .

Число узлов сетки	Радиус окрестности $\Pi$	$C_0$	$C_1$	$C_2$
287	0,3	0,214208	0,004068	-0,029161
415	0,15	0,214087	0,005236	-0,030362
553	0,08	0,213859	0,005588	-0,030747
687	0,04	0,213777	0,005654	-0,030839
821	0,02	0,213729	0,005668	-0,030864
955	0,01	0,213698	0,005669	-0,030871

Коэффициенты  $C_i$  быстро сходятся с уменьшением размера окрестности и увеличением числа узлов.

В данной работе предложен гибридный метод расчета решения уравнения Пуассона в круге с входящим диэлектрическим углом с учетом особенности. Продемонстрирована высокая эффективность данного метода, позволяющего получить достаточно точное поведение решения в окрестности угла, используя грубую сетку.

Представленный алгоритм не изменится при его применении для произвольной достаточной гладкой границы области и для произвольного расположения в этой области угловой точки. Алгоритм также легко обобщается на случай наличия нескольких угловых точек.

Метод может быть рекомендован для решения задач анализа и синтеза электродинамических систем с входящими диэлектрическими углами.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 16-01-00690 А, № 16-31-60084 мол\_а\_дк и № 15-01-03524.

ЛИТЕРАТУРА

1. С.А. Назаров, Б.А. Пламеневский. Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. М.: Наука, 1991.
2. В. А. Кондратьев // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13. – №. 11. – С. 2026-2032.
3. А. Н. Боголюбов и др. // Ж. радиоэлектроники (электронный журнал). <http://jre.cplire.ru>. – 2001. – №. 8.
4. А.Н. Боголюбов // Радиотехника и электроника. 2003. 48. №7. С.1-8.
5. А. Н. Боголюбов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51. – №. 12. – С. 2253-2259.
6. Y. A. Tsarin // РАДИОФИЗИКА И РАДИОАСТРОНОМИЯ. – 2013. – Т. 6. – №. 4. – С. 323.
7. С. Johnson // Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1987.

## **Моделирование диэлектрических многослойных дифракционных решеток методом конечных элементов**

Д.А. Коняев, А.А. Петухов, А.В. Смирнов

*Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, физический факультет, кафедра общей физики*

[konyaev@physics.msu.ru](mailto:konyaev@physics.msu.ru), [petukhov@physics.msu.ru](mailto:petukhov@physics.msu.ru), [smirnov.av14@physics.msu.ru](mailto:smirnov.av14@physics.msu.ru)

Дифракционные решетки широко используются для управления электромагнитным излучением в различных областях науки и техники, таких как лазерные оптические системы, системы коммуникации, космические исследования и многие другие [1]. Из всех классов дифракционных решеток следует выделить достаточно широкий класс многослойных дифракционных решеток, т.е. имеющих в обобщенном смысле многослойное строение. Многослойные дифракционные решетки могут сочетать в себе один или несколько неоднородных слоев (непосредственно сама дифракционная решетка с произвольным профилем штриха или комбинация нескольких таких решеток) и многослойное диэлектрическое покрытие (так называемое отражательное зеркало).

Для моделирования многослойных дифракционных решеток традиционно применяются такие численные методы, как метод конечных разностей (в том числе, во временной области) [2], метод граничных элементов и метод конечных элементов [3], строгий метод связанных волн (RCWA) [4], неполный метод Галеркина [5], матричные методы [6-7]. Метод конечных элементов более эффективен для структур со сложной геометрией, а методы на основе неполного метода Галеркина, матричных методов и RCWA более эффективны при решении задач дифракции на однородных слоях. В данной работе рассмотрено применение метода конечных элементов для моделирования диэлектрических многослойных дифракционных решеток. Выбранный метод в отношении рассматриваемой задачи представляет интерес ввиду того, что он обеспечивает универсальный подход к заданию геометрии решетки и, следовательно, удобен в исследовании решеток со сложной формой профиля штриха (например, решеток с плавно меняющимся профилем).

В настоящей работе рассматривается бесконечная периодическая многослойная дифракционная решетка, состоящая непосредственно из решетки, подложки и расположенной между ними однородной многослойной структуры. На решетку из внешней среды под заданным углом к оси, перпендикулярной границам слоев решетки, падает плоская волна, которая является гармонической, обладает единичной амплитудой и поляризована таким образом, что вектор электрического поля перпендикулярен плоскости падения (ТЕ-поляризация). При взаимодействии падающей волны с решеткой происходит дифракция волны по дискретным направлениям (дифракционным порядкам). При использовании отражательных диэлектрических решеток следует учитывать, что сама по себе диэлектрическая дифракционная решетка неспособна обеспечить отражение падающей волны с достаточной эффективностью, поэтому для обеспечения достаточного отражения необходимо многослойное покрытие. В то же время диэлектрические решетки обладают высокой лучевой стойкостью, что дает им преимущество по сравнению с металлическими дифракционными решетками при использовании в лазерных системах. Распределение волнового поля в многослойной решетке описывается системой уравнений Максвелла, которая в рассматриваемом стационарном случае сводится к уравнению Гельмгольца для компонент вектора напряженности электрического поля. Математическая задача

дополняется парциальными условиями излучения, а также периодическими условиями на границах элемента решетки. Численное решение задачи получено с помощью метода линейных конечных элементов. Алгоритм численного решения реализован на базе программного комплекса COMSOL Multyphysics 5.0.

В статье [8] рассмотрены многослойные решетки, для которых была решена задача синтеза: поиск геометрических параметров многослойной решетки заданного профиля штриха, которые обеспечивают максимальную дифракционную эффективность в минус первом порядке дифракции в конфигурации Литтроу. В указанной статье приведены параметры бинарной и треугольной решеток, которые обеспечивают решение поставленной задачи синтеза. В данной работе параметры решеток, описанных в статье [8], взяты для сравнения результатов вычислительного эксперимента.

Основными характеристиками многослойных диэлектрических решеток, рассчитываемыми в данной работе, являются дифракционные эффективности в различных порядках, а также общие коэффициенты отражения и пропускания многослойной решетки. На примере задачи дифракции плоской волны на бинарной отражательной дифракционной решетке были проведены тестовые расчеты, которые с высокой точностью совпадают с результатами, полученными другими методами (неполный метод Галеркина, RCWA), а также исследована сходимость вычислительного алгоритма. Рассмотрены также дифракционные решетки с треугольным и бинарным профилями штриха в конфигурации Литтроу, проведено сравнение результатов, полученных для многослойных диэлектрических решеток, с результатами, полученными при помощи комбинации неполного метода Галеркина и матричных методов [8].

Результаты вычислений показывают, что метод конечных элементов удобен в задачах дифракции на решетке со сложным строением, хотя и уступает в скорости вычислений другим методам. Ожидается, что метод конечных элементов окажется более перспективным в сравнении с неполным методом Галеркина и RCWA в задачах дифракции на трехмерных многослойных структурах. Кроме того, метод конечных элементов может быть эффективно использован в комбинации с другими численными и численно-аналитическими методами (например, в комбинации с неполным методом Галеркина и матричными методами) в качестве одной из составляющих гибридного метода моделирования многослойных дифракционных структур, содержащих дифракционную решетку со сложной формой профиля.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-00477 мол\_а.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ch. Palmer and E. Loewen “Diffraction Grating” Handbook. Newport Corp., sixth edition, 2005.
2. H. Ichikawa // J. Opt. Soc. Am. A. 1998. №15(1). pp.152-157.
3. M.K. Moaveni, H.A. Kalhor and S. Shammass // International journal of Electronics. 1976. №40(3). pp.225-236.
4. M. G. Moharam, T. K. Gaylord // J. Opt. Soc. Am. 1981. №71(3). pp.811–818.
5. А.Г. Свешников // ДАН СССР. 1977. №236(5). с.1076-1079.
6. D.Y.K. Ko, J.R. Sambles // J. Opt. Soc. Am. A. 1988. №5(11). pp.1863–1866.
7. L. Li // Journal of the Optical Society of America A. 1996. №13. pp.1024–1035.
8. А.Н. Боголюбов, А.А. Петухов, М.К. Трубецков // Физические основы приборостроения. 2014. Т.3. №4. с.20-26.

## Интерполяция, дифференцирование, интегрирование данных через конечномерные теоремы отсчетов

Е.Н. Терентьев<sup>1</sup>, Н.Е. Терентьев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова

<sup>2</sup>HiQo Solutions, Moscow

[en.teren@physics.msu.ru](mailto:en.teren@physics.msu.ru)

При моделировании физических процессов, явлений в радиофизике, оптике предлагаем использовать Конечномерные Теоремы Отсчетов (КТО) вместо теоремы Винера-Котельникова [1] и методов, основанных на разностных схемах. КТО операции совместимы со сверткой, аналитическими расчетами, оцениванием многократных интегралов.

### Введение

Принципиальное уточнение представления функции дискретным рядом Фурье состоит в том, что:

$$f(x_0) = \sum c_k H^{(0)}(k, x_0), \quad k = 1:N, \quad x_0 = 0:N-1, \quad N - \text{четно}, \quad (1)$$

$c_k = (f(x_0), H^{(0)}(k, x_0))$  – Фурье коэффициенты, а  $H^{(0)}(k, x_0)$  – ортонормированные дискретные Фурье гармоники (2, 3).

$$H_k^{\cos^{(n)}(\pi x)} = \sqrt{\frac{1}{N}} \{ \pi^n \cos(\pi x + n \frac{\pi}{2}) \},$$

$$H_k^{\cos^{(n)}(\rho_m x)} = \sqrt{\frac{2}{N}} \{ (\rho_m)^n \cos(\rho_m x + n \frac{\pi}{2}) \}, \quad \rho_m = \frac{2\pi}{N} m, \quad m = \frac{N}{2} + 1 - k,$$

$$H_k^{\cos^{(n)}(x)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{cases} 0, & \text{if } n > 0 \\ 1, & \text{if } n = 0 \\ x^{-n}, & \text{if } n \leq -1 \end{cases} \quad (2)$$

$$H_k^{\sin^{(n)}(\rho_m x)} = \sqrt{\frac{2}{N}} \{ (\rho_m)^n \sin(\rho_m x + n \frac{\pi}{2}) \}, \quad \rho_m = \frac{2\pi}{N} m, \quad m = k - (\frac{N}{2} + 1),$$

“Непрерывные функции”  $f(x)$  получаются этим же рядом, но только с (малым шагом  $dx < 1$  оцифровки) “непрерывными гармониками”  $H^{(0)}(k, x)$  (2, 3). Операции математического анализа и теории поля сводятся к операциям над Фурье гармониками  $H^{(n)}(x_0)$  и  $H^{(n)}(x)$ : при  $n > 0$  реализуем дифференцирование  $n$ -го порядка и при  $n < 0$  – интегрирование  $n$ -го порядка. Заметим, что  $n$  может быть не целым

$$H^{(n)}(x) = \left. \begin{cases} H_k^{\cos^{(n)}(\pi x)}, \text{ if } k = 1 \\ H_k^{\cos^{(n)}(\rho_m x)}, \text{ if } k = 2 : \frac{N}{2} \\ H_k^{\cos^{(n)}(x)}, \text{ if } k = \frac{N}{2} + 1 \\ H_k^{\sin^{(n)}(\rho_m x)}, \text{ if } k = \frac{N}{2} + 2 : N \end{cases} \right\}, \quad \begin{matrix} k = 1 : N, \\ x_0 = 0 : N - 1, \\ x = 0 : dx : N - dx \end{matrix} \quad (3)$$

Фурье гармоники  $H^{(n)}(x)$  (3) с производными и интегралами представлены на Рис. 1 ниже.

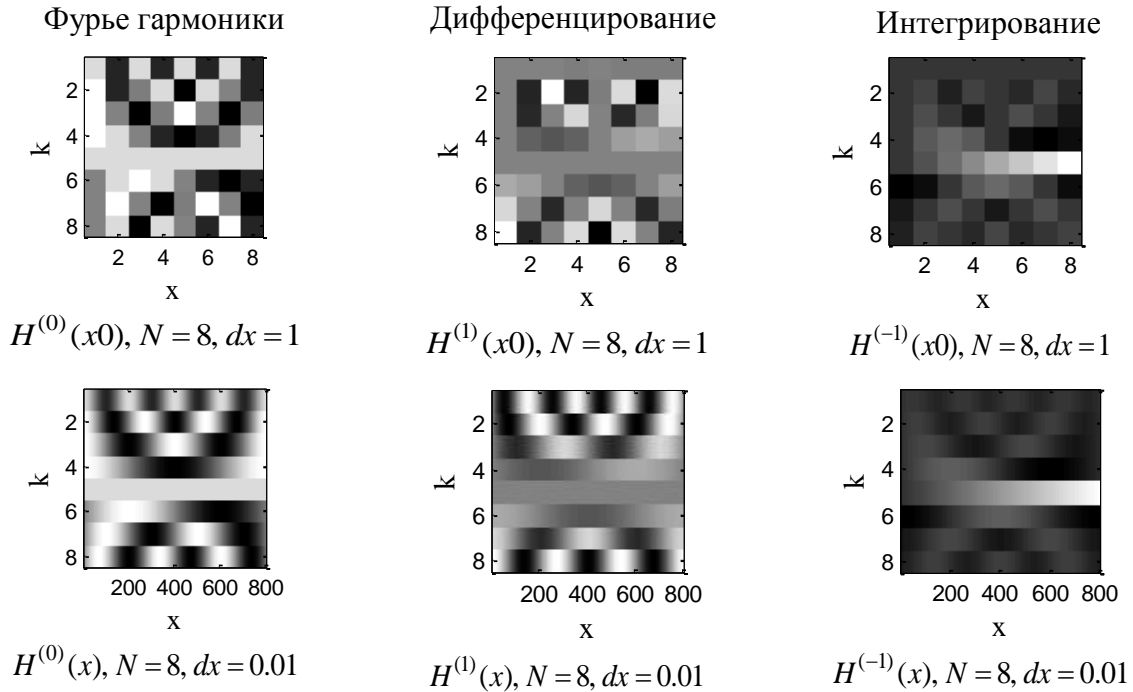


Рис. 1. В нижней строке картинок представлены “непрерывные” Фурье гармоники с их производной и интегралом с шагом оцифровки  $dx=0.01$ .

**КТО** Дан массив (строка) отсчетов  $D = f(x_0)$ , матрицы  $H^{(0)}(x_0)$  и  $H^{(n)}(x)$  (3) тогда непрерывная функция

$$f^{(n)}(x) = (H^{(0)}(x_0) * D')' * H^{(n)}(x) \quad (4)$$

проходит через точки отсчетов  $f^{(n)}(x_0)$ .

Звездочкой \* в (4) обозначаем правило “строка \* столбец с суммированием” при умножении матриц и штрихом’ – транспонирование.

Для доказательства заметим, что это другая (без суммы) запись (1) и равенство  $D = f(x_0)$  следует из того, что матрица  $H^{(0)}(x_0)$  унитарная. В (4) первая звездочка

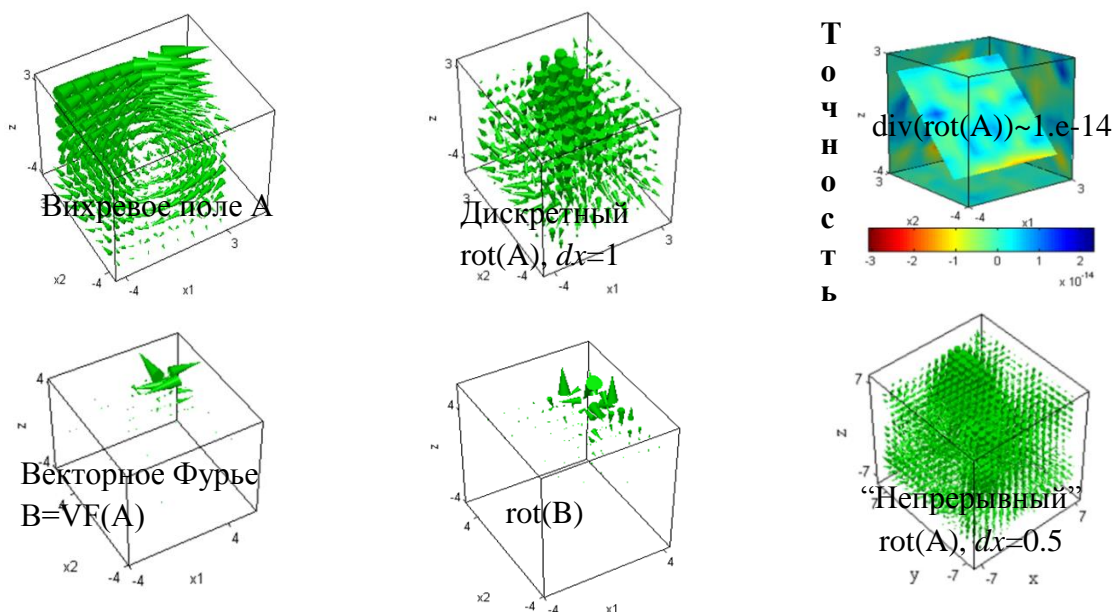
реализует прямое Преобразование Фурье с  $H^{(0)}(x_0)$ ,  $dx=1$ , а вторая звездочка реализует обратное ПФ с  $H^{(n)}(x)$ ,  $dx<1$ .

При нечетном  $N(1)$  в Фурье гармониках будет отсутствовать “нечетный косинус”, который присутствует в первой строке  $k=1$  (2, 3).

### КТО операции в теории поля

Обратим внимание, на “гладкость результатов” операций теории поля в кубах со стороной 8 с вычислением КТО частных производных [2, 3].

Использование КТО операций позволяет при моделировании сложных явлений, процессов обходиться без использования методов разностных схем.



Техника КТО совместима с операцией свертка и хорошо связывается аналитическими расчетами и с оцениванием многократных интегралов [2, 3].

Матлабовские КТО функции с дополнительными построениями для защищенности операций, частными производными занимают много страниц текста.

### Обсуждение

КТО операции развиваются для расширения возможностей математического моделирования Измерительно-Вычислительных Систем. Например, результат операции нечетной АФ О можно представить, как результат КТО интеграла от АФ О и операции, КТО дифференцирования. Есть проблемы с БПФ из-за нечетного косинуса и др.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Н.А. Кузнецов, И.Н. Сеницын // УФН179 216–218 (2009).
2. E.N. Terentiev et al. // Proc. SPIE 6215, 86-97(2006).
3. F.V. Shugaev at al. // Proc. SPIE 6747, (2007).

## Математические принципы настройки гребенок лучей в измерительно-вычислительных системах

Е.Н. Терентьев<sup>1</sup>, Н.Е. Терентьев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Физический факультет МГУ

<sup>2</sup>HiQo Solutions, Moscow

[en.teren@physics.msu.ru](mailto:en.teren@physics.msu.ru)

Рассматривается пример, когда по Характеристикам Адекватности Модели ИВС можно настроить АФАР так, чтобы компенсировать искажения диаграммы направленности типа гребенки лучей обычным обращением с минимальной реакцией на шум.

### Введение

Под Характеристиками Адекватности Модели Дискретных ИВС [1, 2] понимается, взаимная зависимость трех основных числовых характеристик ИВС: реакции на шум, ошибки в задании Аппаратной Функции (АФ) и значения индикатора обратимости АФ. Для методов решения обратных задач с плохо обусловленной АФ априорная информация о гладкости решений [1] приводит к большим ошибкам в оценивании АФ через R [2]. Эта неадекватность представляется в ХАМ ИВС характерными большими ошибками в АФ.

Вариационные принципы не приемлемы при решении обратных задач с априорной информацией и, как правило, приводят к необратимым решениям с низкой точностью и с неконтролируемыми ошибками по АФ.

С помощью ХАМ ИВС выявляются ситуации, когда компенсация искажений АФ реализуется с высоким качеством: обычным обращением с максимальной точностью результата [3-6] без использования априорной информации.

### Математические Принципы Настройки с ХАМ ИВС

МПН АФ O производится по сетке параметров PAR=NxDIAP: N - длина области определения, DI – ограничение в частотной области для Модуляционной Передаточной Функции МПФ(pR). Разрешающую функцию pR, компенсирующую искажения АФ O, выбираем путем решения основной МПН задачи:

$$\min_{PAR} \{ \|pR\| \mid \|pO - O\| \leq \lim err \}, \quad \lim err \leq err, \quad (1)$$

с ХАМ ИВС

$$\{x - Nor(pR), \quad y = Err(pO), \quad z = II(pR * O)\}, \quad PAR. \quad (2)$$

Если АФ O есть прямоугольник со стороной 5, то в множестве полей зрения N=18:32 необратимость АФ O имеет место при N=20, 25 и 30 и в остальных 11 точках N имеет место обратимость. Причина необратимости понятна: 4 значения МПФ M(O) попадают в инструментальную ошибку Iz=abs(.)=10<sup>-13</sup>. При N=26, все ОК.

МПН АФ с ХАМ ДИВС позволяют управлять выбором дискретной модели ИВС. Из связки 11 ключей (обычные обращения II(pR\*O)==1) выделяем долларом Золотой



Ключик **\$** – решение основной задачи (1) **обычным обращением с максимальной точностью**:  $Err(pO)=0, \min Nor(pR)$ . Связка ключей с ЗК есть и в регуляризации при  $\alpha$  стремящемся к нулю.

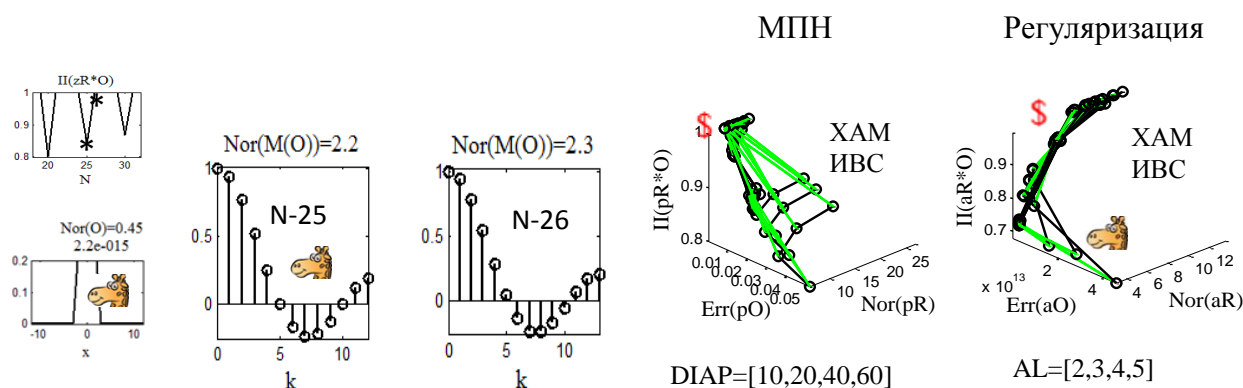


Рис. 1. В методе регуляризации при  $\alpha=0.01$  и  $0.001$  имеем  $Err(aO) \sim 10^{-13}$ . Это означает, при интерпретации регуляризованного решения мы не можем указать АФ, которой соответствует результат. В МПН  $Err(pO)$  от 0 до 5%.

**Инструменты МПН.** Об инструментах МПН, обозначениях можно посмотреть в работах [1-4].

**Эффективность использования полосы пропускания ДИВС.** Будем оценивать эффективность использования полосы пропускания ДИВС величиной:  $\underline{M(R)M(O)} = \text{sum}(M(R)*M(O))/N$ .

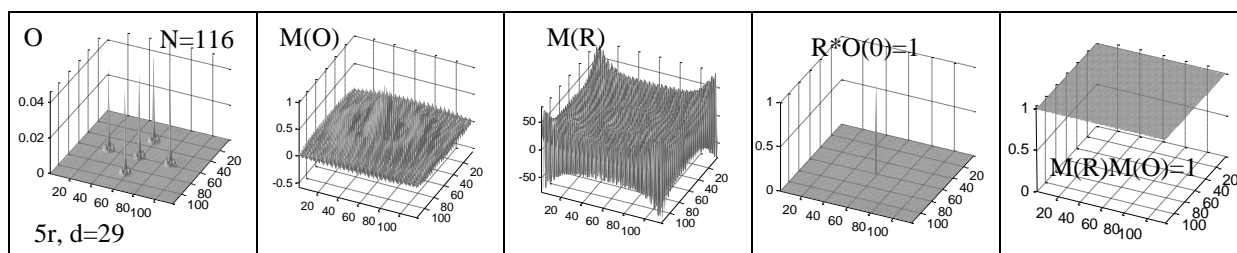
**Теоремы об обратимости в полосе пропускания ДИВС:** Если вычисления реализуются с инструментальной ошибкой  $Iz$ , то с этой инструментальной ошибкой сохраняются равенство и неравенство:  $\underline{M(R)M(O)} = 1$ . Неравенства имеют место в случаях с ошибкой рассогласования  $\underline{M(pR)*O} < 1$ . Это означает, что обратимость имеет место в только в части  $\underline{M(R)M(O)}$  полосы пропускания ДИВС.

**Теорема о регуляризации:** на сетке PAR нерегулярное множество АФ O отображается в регулярные множества с  $pO = pR^{-1}$ ,  $\underline{M(pR)*pO} = 1$ .

**Теорема об обратимости:** Из  $Iz$  обратимости  $\underline{M(zR)*O} = 1$  следует прямая обратимость  $\underline{M(R)*O} = 1$ ,  $zR = R = O^{-1}$  с использованием всей полосы пропускания  $\underline{M(zR)M(O)} = 1$ , тождеством  $\underline{M(zR)M(O)} = 1$ .

### Пример 5 лучевой гребенки лучей в АФА

В ЗК **\$** - обычное обращение (МПФ  $M(R)=1/M(O)$ ) искажений 5 лучевой гребенки АФ O, см.  $I_x = R * I_y$  изображение с реакцией на шум  $Nor(R)=24$ .



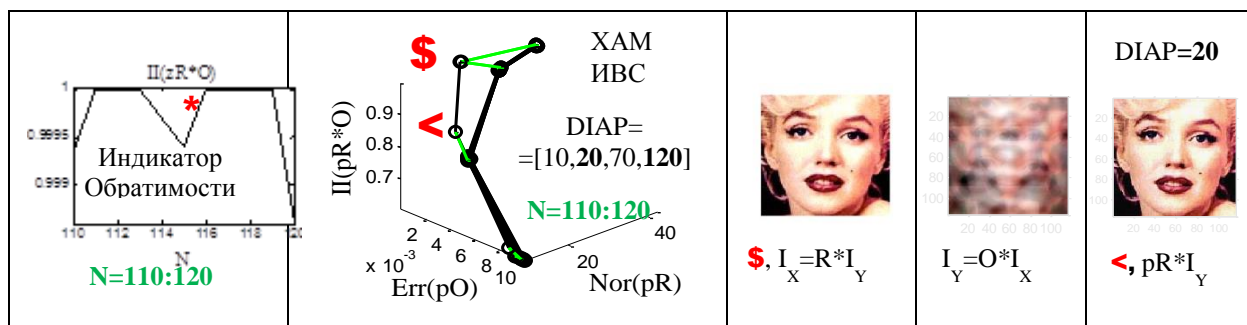


Рис. 2. В ЗК \$ имеем идеальное обращение больших искажений 5 лучевой гребенки АФ О с  $Nor(R)=24$ , см.  $I_X=R*I_Y$  изображение.

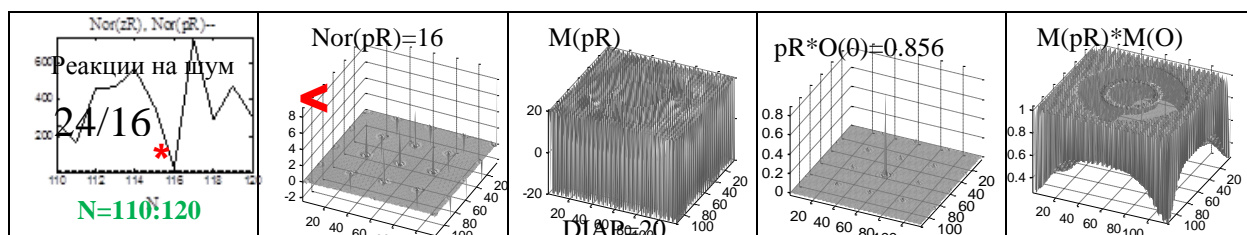


Рис. 3. В ситуации “ниже ЗК <” имеем  $Nor(pR)=16$ , те в 1.5 раза уменьшаем небольшую реакцию шум  $Nor(R)=24$  с красивым результатом, см. <,  $pR*I_Y$  на Рис. 2.

В примере на Рис. 1 в одномерной малоразмерной задаче  $Nor(pR)$  небольшие, поэтому мы имеем связку ключей. В двумерном случае с гребенкой лучей одиночный ЗК получается при  $N=116$ . И причина этого понятна: мы находимся в условиях обратимости и малой реакции на шум только при  $N=116$ .

### Обсуждение

МПН с ХАМ ИВС появились в результате развития идей Оперативных Характеристик ИВС [2]. Метод МПН с ХАМ ИВС найдет практические применения в моделировании Синтезированной Апертуры радаров, в настройки оптических телескопов с адаптивной оптикой, электронных, атомно-силовых микроскопов и т.п.

### ЛИТЕРАТУРА

1. А.Н. Тихонов, М.В. Уфимцев “Статистическая обработка результатов эксперимента” изд. Московского университета, 1988.
2. Ю.П. Пытьев “Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем”, ФИЗМАТЛИТ, 2012 г.
3. Е.Н. Терентьев, Н.Е. Терентьев //ISBN 978-5-93411-055-1, Труды XIX Международного Форума по проблемам науки, техники и образования, с. 95-97, Москва, 2015.
4. Е.Н. Терентьев, Н.Е. Терентьев // ISBN 978-5-93411-055-1, Труды XIX Международного Форума по проблемам науки, техники и образования, с. 76-78, Москва, 2015.
5. Е.Н. Терентьев, Н.Е. Терентьев // ИЗВЕСТИЯ РАН, СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2015, том 79, № 12, с. 1633-1637.
6. E.N. Terentiev and N. E. Terentiev // ISSN 1062-8738, Bulletin of the Russian Academy of Science. Physics, 2015, Vol.79, No 12, pp.1427-1431, DOI 10.3103/S1062873815120229

## **Использование леммы Лоренца для оценки напряжённости электромагнитного поля при отсутствии прямой видимости в лабиринтных системах**

Б.С. Сорокин

*Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,  
физический факультет*  
[sorokin.boris@physics.msu.ru](mailto:sorokin.boris@physics.msu.ru)

Широкое использование систем беспроводной связи в условиях ограниченности частотного ресурса требует дальнейшего совершенствования методов моделирования распространения электромагнитных волн в лабиринтных системах.

В работах [3, 4] было рассмотрено многолучевое распространение радиоволн в условиях прямой видимости в лабиринтах в приближении физической оптики [1, 2]. В докладе представлена модифицированная модель распространения радиоволн для получения напряжённости электромагнитного поля в затенённых зонах лабиринтных систем. Для реализации на высокопроизводительных вычислительных системах был разработан параллельный алгоритм, позволяющий оценить напряжённость электромагнитного поля в затенённых зонах лабиринтных систем.

В рамках данной работы были представлены модель распространения радиоволн в затенённых зонах лабиринтных систем и позволяющий эффективно использовать современные высокопроизводительные системы алгоритм вычисления напряжённости электромагнитного поля в точке, находящейся вне прямой видимости относительно источника электромагнитного поля.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Г.Т. Марков, Б.М. Петров, Г.П. Грудинская “Электродинамика и распространение радиоволн” Москва, Советское радио, 1979.
2. Г.Т. Марков, А.Ф. Чаплин “Возбуждение электромагнитных волн” – М.: Энергия, - 1967.
3. Б.С. Сорокин Многолучевое распространение радиоволн в лабиринтах в приближении физической оптики XXII международная молодёжная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов», 2015, г. Москва.
4. Б.С. Сорокин «Использование леммы Лоренца для расчёта многолучевого распространения радиоволн в лабиринтных системах» XV Всероссийская школа-семинар «Физика и применение микроволн».

## Моделирование характеристик крутильной системы по параметрам нити подвеса

В.М. Шахпаронов, Д.А. Самсонов  
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,  
физический факультет, Москва, Россия  
[shahp@phys.msu.ru](mailto:shahp@phys.msu.ru)

Для оценки характеристик крутильной системы необходимо сформировать исходные данные. Для этого выбираем длину и диаметр нити подвеса. По диаметру определяем площадь сечения. Далее задаём диаметр и плотность материала шарового груза, подвешенного на нити. По ним определяем массу груза и его момент инерции вокруг вертикальной оси. Вычисляем натяжение  $P$  по площади нити  $s$ . Для проведения дальнейших расчётов необходимо найти ряд параметров из литературных источников. Находим предельную нагрузку на разрыв и вычисляем запас прочности нити подвеса. Наиболее значимыми являются ещё два параметра. К ним следует отнести модуль сдвига  $G$  и коэффициент гистерезисных потерь  $C$ . Поскольку измерения проводятся с невакуумированной системой, то необходимо знать вязкость воздуха при комнатной температуре равной  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$  ( $293,15\text{ }^{\circ}\text{K}$ ); давлении  $760\text{ мм рт. ст.}$  ( $101325\text{ Н/м}$ ). Для обеспечения измерений в упругой зоне деформации задаём предельно допустимый угол отклонения  $\varphi$ , при котором обеспечивается низкий уровень угловой деформации  $\xi$ . Задаём деформацию на уровне  $5\text{ ppm}$ . На идеально упругих материалах величину угловой деформации можно увеличить на порядок.

Оценки проводились на длинных нитях из четырёх материалов – нихрома, вольфрама, молибдена и меди. Полагалось, что прочность на разрыв на этих материалах составляла, соответственно,  $1.5, 3.0, 1.5, 0.4\text{ ГПа}$ . При нормальной нагрузке прочность нитей на разрыв должна укладываться в диапазон от  $3$  до  $10$ . При малом запасе прочности появляется угроза обрыва нити. При слишком большом запасе нить полностью не выпрямляется, что вносит погрешность в результаты измерений. Поскольку измерения проводятся на воздухе, используются толстые нити, к которым подвешиваются шаровые грузы большой массы. При этом потери за счёт вязкого трения о воздух сводятся к минимуму. В качестве грузов рассматривались шаровые тела из стали с плотностью  $7.8\text{ г/см}^3$  диаметром  $50.8, 76.2, 101.6$  и  $127$  миллиметров (стандартные шарики от подшипников из стали ШХ15 диаметром  $2, 3, 4$  и  $5$  дюймов). Массы таких шаров составили величину  $0.5354, 1.8070, 4.2833, 8.3657\text{ кг}$ . По массе тела  $M$  и его диаметру  $D$  определяют момент инерции  $J$  вокруг оси вращения.

Момент инерции шарового груза диаметром  $d$  и массой  $M$

$$J=Md^2/10.$$

Жёсткость нити подвеса диаметром  $d_n$ , длиной  $L$  и модулем сдвига  $G$

$$k=\pi Gd_n^4/(32L).$$

Период крутильных колебаний

$$T=2\pi(J/k)^{0.5}.$$

Ограниченная коэффициентом гистерезисных потерь  $C$  в нити подвеса добротность

$$Q_2=\pi/C.$$

Ограниченная трением шарового груза диаметром  $d$  о воздух с вязкостью  $\mu$

добротность крутильной системы с периодом колебаний  $T$

$$Q_0 = kT / (4\pi q \mu d^3), \quad q = 1 + \ln(T_q/T), \quad T_q = 100 \text{ с.}$$

Добротность крутильной системы

$$Q_1 = Q_0 Q_2 / (Q_0 + Q_2).$$

Диссипативные процессы в колебательных системах относятся к одному из дестабилизирующих факторов. В идеальном случае остаётся единственный канал диссипации, обусловленный рассеянием энергии при деформациях упругого элемента вследствие несовершенства его упругости. В микрообъёмах материала происходит пластическая деформация. Она ведёт к необратимым потерям запасённой энергии осциллятора. Степень несовершенства упругости материала формально характеризуется коэффициентом гистерезисных потерь  $C$ . Он определяет постоянную долю диссипируемой энергии от всей работы, затраченной на деформирование материала. Независимость гистерезисных потерь от скорости деформации упрощает анализ системы.

При закручивании на угол  $\varphi$  относительная деформация нити

$$\xi = \varphi d_n / L.$$

Постоянная времени крутильных колебаний

$$\tau = Q_1 T / \pi.$$

Крутильная система содержит дополнительные степени свободы, которые следует учитывать при проведении оценок. Среди них следует отметить продольные, струнные и маятниковые колебания. Струнные колебания значительно расширяют диапазон частот исследуемого осциллятора. Отношение частот струнных и крутильных колебаний может превысить величину порядка 1000 и даже 10000. Высокая добротность струнных колебаний наиболее наглядно демонстрирует частотно-независимый характер потерь при внутреннем трении. При крутильных, продольных и струнных колебаниях коэффициент гистерезисных потерь сохраняет постоянное значение. Следовательно, и добротность системы при всех видах колебаний также имеет постоянное значение.

По модулю сдвига можно оценить модуль Юнга

$$E = 2(1 + \nu)G.$$

Площадь сечения нити

$$s = \pi d_n^4 / 4.$$

Давление на сечение нити

$$P = Mg/s.$$

Жёсткость нити на удлинение

$$k_1 = Es/L,$$

Частота продольных колебаний шаровой массы

$$f_1 = (2\pi)^{-1} (k_1/M)^{0.5}.$$

Удлинение нити под нагрузкой составит величину,

$$\Delta L = PL/E.$$

Частота струнных колебаний

$$f_2=0.5(P/L^2\rho_c)^{0.5},$$

где  $\rho_c$  – плотность материала струны.

Жёсткость нити при струнных колебаниях можно оценить по формуле:

$$\kappa_2=\pi^2Mg/L.$$

Постоянная времени продольных колебаний струны

$$\tau_1=Q_2/(\pi f_1),$$

Постоянная времени поперечных колебаний струны

$$\tau_2=Q_2/(\pi f_2).$$

Расстояние от верхней точки крепления нити до центра масс шаровых грузов составляет величину

$$L_k=L+dL+d/2,$$

где  $dL$  – расстояние от нижнего зажима нити длиной  $L$  до поверхности шарового груза.

Жёсткость крутильной системы при качаниях

$$\kappa_k= MgL_k.$$

Период качаний системы

$$T_k=2\pi[(ML_k^2+J)/\kappa_k]^{0.5}.$$

Добротность качаний крутильной системы

$$Q_k= Mg\pi/[24d\mu(L_kg)^{0.5}q_k], q_k=1+ \ln(T_q/T), T_q=100 \text{ с.}$$

Время релаксации качаний

$$\tau_k=Q_kT_k/\pi.$$

Учёт добротности крутильных систем позволяет проводить оперативные оценки коэффициента гистерезисных потерь на широком круге материалов. Вязкое трение о воздух ограничивает возможности такого метода. При этом требуется точное определение таких потерь. При равномерном вращении шарового тела в воздушной среде такие потери рассчитываются строго [1]. В режиме колебаний рассчитать потери значительно сложнее. Поэтому в данной работе приведена оценочная формула для расчёта потерь о воздух. При наличии такой формулы для определения гистерезисных потерь в материале нити подвеса достаточно одного эксперимента.

При увеличении коэффициента гистерезисных потерь в испытываемой нити подвеса оценки становятся проще и достовернее. При добротности системы выше 10000 заметно возрастает погрешность из-за существенного вклада потерь за счёт вязкого трения, которые удаётся оценить с некоторой погрешностью. С увеличением диаметра нити расширяется диапазон материалов, на которых возможна оценка гистерезисных потерь. Для исключения пластических деформаций следует ограничивать величину угловой деформации нити на уровне 5 ppm, что препятствует использованию нитей большого диаметра.

Крутильная система содержит дополнительные степени свободы, которые следует учитывать при проведении оценок. Среди них следует отметить продольные, струнные и маятниковые колебания [2]. Струнные колебания значительно расширяют диапазон частот исследуемого осциллятора. Отношение частот струнных и крутильных

колебаний может превысить величину порядка 1000 и даже 10000. Высокая добротность струнных колебаний наиболее наглядно демонстрирует частотно-независимый характер потерь при внутреннем трении. При крутильных, продольных и струнных колебаниях коэффициент гистерезисных потерь сохраняет постоянное значение. Следовательно, и добротность системы при всех видах колебаний также имеет постоянное значение.

Маятниковые качания являются исключением. Их добротность велика, что затрудняет проведение измерений времени их релаксации. Их высокая добротность обусловлена тем, что запасённая при качаниях энергия связана с гравитационным полем Земли. Диссипируемая энергия качаний в вакууме обусловлена только трением вблизи зажимов нити при её изгибах. В воздухе доминирует вязкое трение, но оно не обеспечивает существенное уменьшение времени релаксации. Наиболее радикальный способ гашения качаний может обеспечить только магнитный демпфер [3]. Но он усложняет конструкцию установки и не позволяет проводить контрольные измерения на укороченной нити. При этом в связи с наличием малых крутильных колебаний в более короткой и толстой дополнительной нити подвеса возникают опасения, что магнитный демпфер внесёт искажения в измерения добротности крутильных колебаний. Поэтому самым надёжным способом борьбы с нежелательным влиянием маятниковых качаний является тщательное их гашение до начала измерений с последующим избирательным возбуждением только крутильных колебаний. Использовать электрод для раскачки крутильных колебаний электрическим полем трудно в связи с шаровой формой подвешенного к нити груза. Направленная на шар струя воздуха, смещённая от оси его вращения, такую задачу решает.

Измерения в воздухе уступают по точности аналогичным операциям в вакууме. Исключается процедура предварительной термомеханической обработки при высокой температуре. Она позволяет примерно на порядок снизить гистерезисные потери в тугоплавких материалах. Однако при этом значительно упрощается процедура измерений. Исчезают ограничения по длине нити. Не требуется применение сложной и трудоёмкой вакуумной техники. Время на проведение измерений сокращается примерно на порядок.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Слёзкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехтздат.– 1955.– 521 с.
2. Карагиоз О.В., и др. // Изв. АН СССР, Физика Земли.–1975.– №1.–С. 101–108.
3. Luther G.G., Towler W.R. // Phys.Rev.Lett., 1982. – 48. – 121–123.