

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

<b>Замедление и усиление поверхностных плазмон-поляритонов в структуре ВТСП-диэлектрик</b>	
<i>А.С. Абрамов, И.О. Золотовский, Д.И. Семенцов .....</i>	<i>2</i>
<b>Генерация высших гармоник в щелевой модификации графена в присутствии статического и переменного электрических полей</b>	
<i>П.В. Бадикова, С.Ю. Глазов .....</i>	<i>5</i>
<b>Модель решётки спиралеобразных ректенн, обладающей круговой диаграммой направленности</b>	
<i>К.Т.Ч. Ву, Р.В. Егоров, Д.А. Михеев, В.Л. Саввин .....</i>	<i>9</i>
<b>Эффект абсолютной отрицательной проводимости, индуцированный высокочастотным электромагнитным полем в сверхрешетке</b>	
<i>С.В. Крючков, Е.И. Кухарь .....</i>	<i>13</i>
<b>Эффект подавления осцилляций де Газа - ван Альфена в графене высокочастотным электромагнитным излучением</b>	
<i>С.В. Крючков, Е.И. Кухарь, П.В. Назаров .....</i>	<i>18</i>
<b>Электродинамические свойства водных растворов</b>	
<i>А.О. Моисеев, Г.М. Стеркин, В.Г. Артёмов, А.Ф. Королев .....</i>	<i>21</i>
<b>Комплексный анализ базового элемента емкостных датчиков</b>	
<i>М.А. Сивков, Ю.К. Алешин, М.А. Чоба .....</i>	<i>23</i>
<b>Зарядание капель воды при свободном падении в электрическом поле</b>	
<i>Г.М. Стеркин, А. Моисеев, П.О. Капралов, В.Г. Артёмов, А.Ф. Королев .....</i>	<i>26</i>

## Замедление и усиление поверхностных плазмон-поляритонов в структуре ВТСП-диэлектрик

А.С. Абрамов, И.О. Золотовский, Д.И. Семенцов

Ульяновский государственный университет

[aleksei\\_abramov@mail.ru](mailto:aleksei_abramov@mail.ru)

Значительный интерес для решения многих прикладных задач современной радиофизики представляют планарные структуры, в которых возможно существенное замедление распространяющихся волн. В частности, для создания усилителей и генераторов дальнего инфракрасного и ТГц диапазонов, работающих по принципу усиления волн различной природы (электромагнитных, акустических, магнитостатических) при их взаимодействии с заряженными частицами. При этом эффективное взаимодействие электромагнитной волны и носителей заряда возможно только в случае, когда скорость волны существенно меньше скорости света в вакууме. На подобном взаимодействии основан принцип работы таких СВЧ приборов как клистрон, лампа бегущей волны, линейные ускорители заряженных частиц [1].

В настоящей работе показана возможность замедления и последующего усиления поверхностных плазмон-поляритонов (ППП) терагерцового диапазона, распространяющихся вдоль двух границ раздела планарной симметричной структуры «кубический диэлектрик – высокотемпературный сверхпроводник». Центральным слоем структуры является сверхпроводящая керамика типа  $YBa_2Cu_3O_7$ , температурная зависимость диэлектрической проницаемости (ДП) которой описывается в рамках двухжидкостной модели Гортера-Казимира [2]. Рабочий диапазон частот, где действительная часть ДП сверхпроводника  $\epsilon'_s < 0$  или  $\omega < \omega_{cr}$ , лежит ниже частоты, которая при выбранных значениях параметров составляет  $\omega_{cr} \approx 1.8 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$ . В указанном диапазоне величина мнимой части ВТСП  $\epsilon''_s$  существенно меньше действительной части  $\epsilon'_s$ , за исключением области температур, близкой к критической. В качестве материала прилегающих к пленке сред использовался немагнитный оптически изотропный диэлектрик, среднее значение ДП которого в указанном диапазоне составляет  $\langle \epsilon'_d \rangle = 5.3$ . Поглощение в диэлектрике практически отсутствует.

Общее дисперсионное соотношение в симметричном случае распадается на два уравнения для чётной и нечётной мод [3]:

$$\text{th} \frac{q_s d}{2} = -\frac{\epsilon_d q_s}{\epsilon_s q_d}, \quad \text{cth} \frac{q_s d}{2} = -\frac{\epsilon_d q_s}{\epsilon_s q_d}. \quad (3)$$

где  $\epsilon_s = \epsilon'_s - i\epsilon''_s$ ,  $q_{s,d} = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 \epsilon_{s,d}}$ ,  $\beta$  - константа распространения ПП,  $k_0 = \omega/c$ ,  $c$  - скорость света в вакууме. Решениями этих уравнений  $\omega(\beta)$  являются низкочастотная и высокочастотная дисперсионные ветви.

Высокочастотные ветви имеют максимум при толщинах  $d = 1.5 \mu\text{m}$ , после которого наблюдается плавный спад, для которого характерно  $\partial\beta/\partial\omega < 0$ , т. е. в этой области возможно существование поляритонов с отрицательной групповой скоростью. При достаточно больших значениях  $\beta$  ( $\beta > 10^6 \text{ м}^{-1}$ ) все кривые практически сливаются и находятся в очень узком спектральном диапазоне, ширина которого составляет несколько сотен мегагерц с центральной частотой  $\omega_\infty = 14.7 \text{ THz}$ . При

стремлении  $\omega \rightarrow \omega_\infty$  выполняется условие  $\partial\omega/\partial\beta \rightarrow 0$ , т.е. имеет место существенное замедление поляритонных волн. С прикладной точки зрения представляет интерес тот факт, что в высокочастотной области существуют бистабильные состояния для симметричных волн (кривые 4,5), для которых одному значению толщины пленки может соответствовать два значения константы распространения. В рассматриваемом случае переход в бистабильное состояние происходит на частоте  $\omega \approx \omega_\infty$ . При достаточно большой толщине плёнки  $L$  константы распространения симметричных и антисимметричных мод вырождаются и перестают зависеть от толщины, что указывает на переход к случаю полубесконечной структуры ВТСП – диэлектрик.

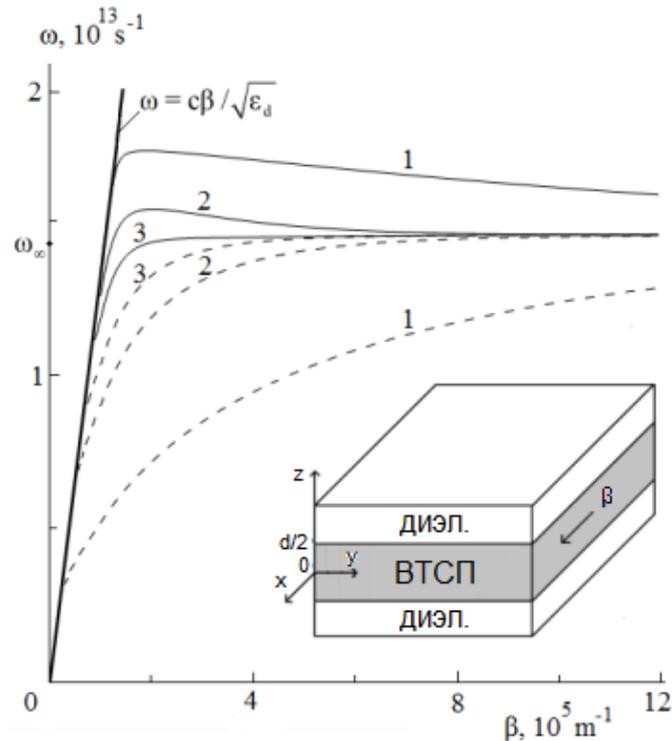


Рис. 1. Дисперсионные зависимости для толщин пленок  $d = 1, 5, 10 \mu\text{m}$  (кривые 1-3). Сплошные линии – высокочастотные моды, пунктир – низкочастотные. На вставке – геометрия рассматриваемой структуры.

Как показывает анализ, взаимодействие медленных ППП с потоком заряженных частиц может привести к его усилению. Подобное взаимодействие «электрический ток - волна» аналогично тому, что наблюдается в распределенных СВЧ-усилителях, например, лампах бегущей волны [1]. Максимальное усиление плазмон - поляритонной волны может быть получено в условиях фазового синхронизма, когда дрейфовая скорость тока сопоставима с фазовой скоростью волны  $v_0 \approx v_{ph}$ . В этом случае дисперсионное уравнение при наличии в среде токов может быть записано в виде  $(\omega - Gv_{ph})^3 - C^3\omega^3 = 0$ . При этом, получаемая из уравнения величина инкремента усиления  $g = (\sqrt{3}/2)C\omega/v_{ph}$  зависит от параметра  $C$ , который является полным аналогом параметра Пирса в СВЧ-технике и в свою очередь зависит от отношения  $v_{ph}/v_g$ . Анализ показывает, что групповая скорость высокочастотных мод практически на всем интервале принимает отрицательные значения. Имеются характерные значения  $\beta$ , при которых  $v_g \rightarrow 0$  (рис.2 б, сплошные кривые 1 и 2). При

реализации этого условия величина отношения  $v_{ph} / v_g$  будет значительно больше единицы и, параметр Пирса в этом случае также принимает значения, большие единицы. Это делает рассматриваемую ситуацию принципиально отличной от стандартной ситуации в лампах бегущей и обратной волны, для которых характерно  $C \ll 1$ .

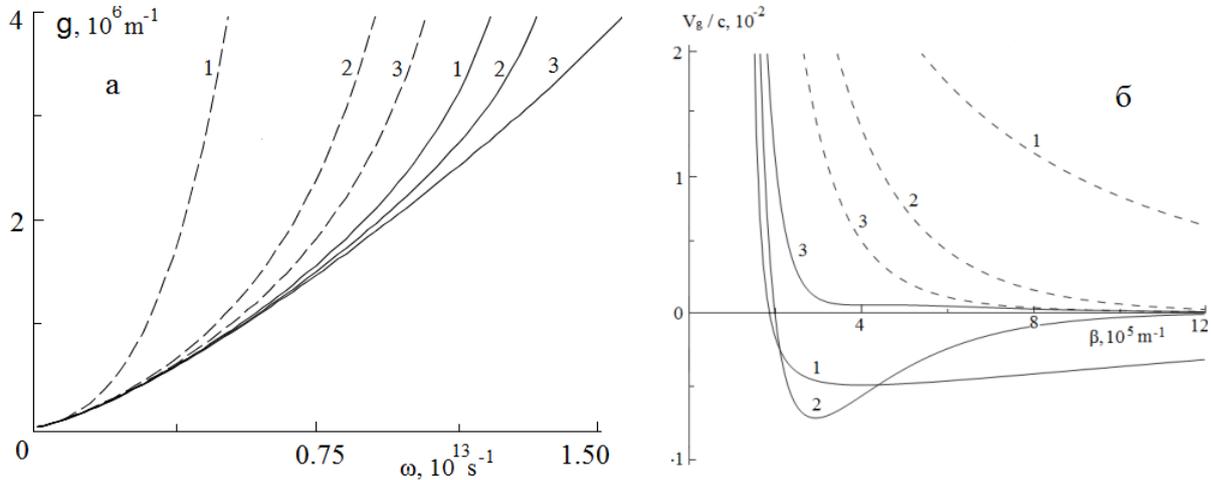


Рис.2. Зависимость инкремента усиления от частоты (а) и зависимость групповой скорости от постоянной распространения (б) для толщин пленок  $d = 1, 5, 10 \mu\text{m}$  (кривые 1-3).

В результате коэффициент интегрального усиления для поверхностной волны в рассматриваемом диапазоне может принимать огромные значения (рис. 2 а). Также определенный интерес представляет ситуация, когда  $|v_{ph} / v_g| \gg 1$ , но при этом  $v_g < 0$ . В этом случае мы получаем реализованный на ППП аналог лампы обратной волны (ЛОВ) с параметром Пирса, на несколько порядков выше по сравнению с СВЧ аналогом.

Таким образом, существует возможность усиления поверхностных плазмон-поляритонов за счет перекачки энергии от волны дрейфового тока в сверхпроводнике в поверхностную волну терагерцового диапазона, распространяющуюся вдоль границ раздела ВТСП – диэлектрик. На основании полученных результатов видно, что для высокочастотных мод вблизи частоты  $\omega_\infty$ , групповая скорость ППП является отрицательной и стремится к нулю  $v_g \rightarrow 0$ . При выполнении этого условия коэффициент усиления принимает огромные значения  $g > 10^6 \text{ м}^{-1}$  и значительно превосходит декремент затухания. Для низкочастотных мод подобных особенностей не выявлено.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (в рамках Государственного задания, проект № 14.Z50.31.0015).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Д.И. Трубецков, А.Е. Храмов “ Лекции по СВЧ электронике для физиков ”М.: Физматлит, 2003.
2. В.В. Шмидт. “Введение в физику сверхпроводников” М.:МЦНМО, 2000.
- 3.А.С. Абрамов, И. О. Золотовский, Д. Г. Санников, Д. И. Семенцов // ФТТ. 2015. Т. 57. Вып.4. С. 639.

## Генерация высших гармоник в щелевой модификации графена в присутствии статического и переменного электрических полей

П.В. Бадикова, С.Ю. Глазов

Волгоградский государственный социально-педагогический университет  
[polin.badicova@gmail.com](mailto:polin.badicova@gmail.com), [ser-glazov@yandex.ru](mailto:ser-glazov@yandex.ru)

В работе исследуется отклик щелевой модификации графена на внешние постоянное и переменное электрические поля без использования низкоэнергетического приближения для энергии носителей заряда, что позволяет изучать эффекты в более широкой области параметров приложенных электрических полей. Электронная система описана с помощью кинетического уравнения Больцмана в приближении постоянного времени релаксации. Изучена зависимость амплитуды высших гармоник от характеристик приложенных полей.

Несмотря на большое количество интересных эффектов, имеющих место в бесщелевом графене, для практической реализации многих электронных устройств наряду с высокой подвижностью носителей заряда необходимо наличие щели в энергетическом спектре образца. Такая запрещенная зона может возникать в графене помещенном на подложку. В монослойном графене на подложке h-BN запрещенная зона составляет 53 мэВ[1,2], на подложке SiC  $\approx 0.26$  эВ[1]. В другой модификации графена – графене энергетическая щель равна 5.4 эВ[3].

Энергетический спектр электронов в щелевой модификации графена в приближении сильной связи можно описать в виде

$$\varepsilon(\vec{p}) = \pm \sqrt{\Delta^2 + t^2 \left[ 1 + 4 \cos(p_y a / \sqrt{3}) \left( \cos(p_x a) + \cos(p_y a / \sqrt{3}) \right) \right]}, \quad (1)$$

где  $t \approx 2.7$  эВ,  $a = 3b / 2\hbar$ ,  $b = 0.142$  нм – расстояние между соседними атомами углерода в графене,  $\vec{p} = (p_x, p_y)$ . Разные знаки относятся к зоне проводимости и валентной зоне. Наличие запрещенной зоны в спектре (1) позволяет вести расчеты в однозонном приближении, накладывая условия на параметры внешних полей и температуру.

Рассмотрим отклик графена на действие постоянного и переменного электрических полей, приложенных вдоль оси  $x$ .  $\vec{E} = (E_1 + E_0 \cos \omega t, 0)$  – суммарная напряженность электрического поля,  $E_1$  – модуль напряженности постоянного электрического поля,  $E_0$  и  $\omega$  – амплитуда и частота переменного электрического поля. Плотность тока  $j_x$  текущего вдоль оси  $x$  определяется по формуле

$$j_x = e \sum_{\vec{p}} v_x(\vec{p}) f(\vec{p}), \quad (2)$$

где  $e$  – заряд электрона,  $f(\vec{p})$  – неравновесная функция распределения носителей. Для нахождения функции распределения носителей использовано классическое уравнение Больцмана в приближении постоянного времени релаксации. Будем считать электронный газ невырожденным.

Скорость движения электронов вдоль оси  $x$  имеет вид

$$v_x = - \frac{2at^2 \cos(p_y a / \sqrt{3}) \sin(p_x a)}{\sqrt{\Delta^2 + t^2 \left[ 1 + 4 \cos(p_y a / \sqrt{3}) \left( \cos(p_x a) + \cos(p_y a / \sqrt{3}) \right) \right]}}. \quad (3)$$

Разложив скорость носителей в ряд Фурье, подставив решение уравнения Больцмана в (2) после преобразований, получим окончательное выражение для плотности тока

$$j_x = j_0 \sum_l B_l \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin \varphi_n J_n \left( l \frac{eE_0 a}{\omega} \right) \cos \left( l \frac{eE_0 a}{\omega} \sin \omega t - n \omega t - \varphi_n \right), \quad (4)$$

где  $j_0 = 4aent^2/\pi\Delta$ ,  $n$  – концентрация электронов в зоне проводимости,  $J_n(x)$  – функция Бесселя 1-го рода  $n$ -го порядка,

$$B_l = \frac{1}{A} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\cos(y) \sin(z) \sin(lz) dz}{\sqrt{1 + \gamma [1 + 4 \cos(y) (\cos(z) + \cos(y))]}]} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-\delta \sqrt{1 + \gamma [1 + 4 \cos(y) (\cos(x) + \cos(y))]}]) \cos(lx) dx dy,$$

$$A = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-\delta \sqrt{1 + \gamma [1 + 4 \cos(y) (\cos(x) + \cos(y))]}]) dx dy, \quad \sin \varphi_n = \frac{1}{\sqrt{1 + (l\Omega/v + nw)^2}}, \quad \delta = \Delta/k_B T,$$

$\Omega = eE_1 a$ ,  $\gamma = (t/\Delta)^2$ ,  $w = \omega/v$ ,  $v$  – частота столкновений.

Таким образом, основная информация об исследуемом полупроводниковом материале содержится в коэффициентах  $B_l$  и  $j_0$ .

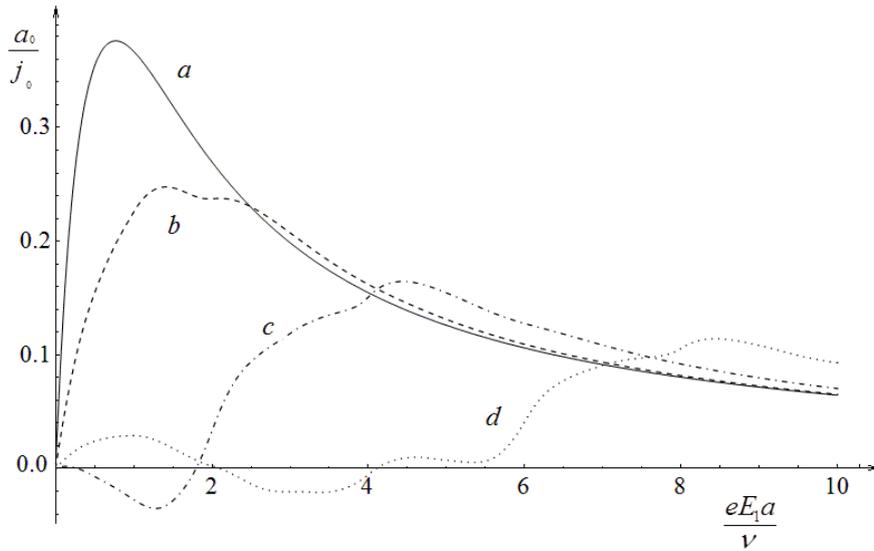


Рис.1 Зависимость постоянной составляющей плотности тока от постоянного электрического поля при  $\omega/v=2$ , a)  $eE_0 a/v = 0,1$ ; b)  $eE_0 a/v = 1,5$ ; c)  $eE_0 a/v = 4,0$ ; d)  $eE_0 a/v = 8,0$ .

Для нахождения гармоник тока разложим функцию плотности тока (4) в ряд Фурье:

$$j(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t), \quad (5)$$

где  $a_0 = j_0 \sum_l B_l \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2 \left( \frac{eE_0 a l}{\hbar \omega} \right) \sin \varphi_n \cos \varphi_n$ ,

$$a_k = j_0 \sum_l B_l \left\{ J_0 \left( \frac{eE_0 a l}{\hbar \omega} \right) J_k \left( \frac{eE_0 a l}{\hbar \omega} \right) (\sin \varphi_k \cos \varphi_k + (-1)^k \sin \varphi_{-k} \cos \varphi_{-k}) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n} \left( \frac{eE_0 a l}{\hbar \omega} \right) \left[ J_{k-2n} \left( \frac{eE_0 a l}{\hbar \omega} \right) (\sin^2 \varphi_{k-2n} - (-1)^{k-2n} \sin^2 \varphi_{-(k-2n)}) - J_{k+2n} \left( \frac{eE_0 a l}{\hbar \omega} \right) \times \right. \\
 & \times (\sin^2 \varphi_{k+2n} - (-1)^{k+2n} \sin^2 \varphi_{-(k+2n)}) \left. \right] + J_{2n-1} \left( \frac{eE_0 a l}{\hbar \omega} \right) \left[ J_{k+2n-1} \left( \frac{eE_0 a l}{\hbar \omega} \right) \times \right. \\
 & \times (\sin \varphi_{k+2n-1} \cos \varphi_{k+2n-1} - (-1)^{k+2n-1} \sin \varphi_{-(k+2n-1)} \cos \varphi_{-(k+2n-1)}) - J_{k-2n+1} \left( \frac{eE_0 a l}{\hbar \omega} \right) \times \\
 & \times (\sin \varphi_{k-2n+1} \cos \varphi_{k-2n+1} - (-1)^{k-2n+1} \sin \varphi_{-(k-2n+1)} \cos \varphi_{-(k-2n+1)}) \left. \right] \Big\} \\
 b_k = & j_0 \sum_{l,s} B_l \left\{ -J_0 \left( \frac{eE_0 a l}{\hbar \omega} \right) J_k \left( \frac{eE_0 a l}{\hbar \omega} \right) (\sin^2 \varphi_k - (-1)^k \sin^2 \varphi_{-k}) + \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n} \left( \frac{eE_0 a l}{\hbar \omega} \right) \times \right. \\
 & \times \left[ J_{k-2n} \left( \frac{eE_0 a l}{\hbar \omega} \right) (\sin \varphi_{k-2n} \cos \varphi_{k-2n} + (-1)^{k-2n} \sin \varphi_{-(k-2n)} \cos \varphi_{-(k-2n)}) - J_{k+2n} \left( \frac{eE_0 a l}{\hbar \omega} \right) \times \right. \\
 & \times (\sin \varphi_{k+2n} \cos \varphi_{k+2n} + (-1)^{k+2n} \sin \varphi_{-(k+2n)} \cos \varphi_{-(k+2n)}) \left. \right] + J_{2n-1} \left( \frac{eE_0 a l}{\hbar \omega} \right) \times \\
 & \times \left[ J_{k-2n+1} \left( \frac{eE_0 a l}{\hbar \omega} \right) (\sin^2 \varphi_{k-2n+1} + (-1)^{k-2n+1} \sin^2 \varphi_{-(k-2n+1)}) - J_{k+2n-1} \left( \frac{eE_0 a l}{\hbar \omega} \right) \times \right. \\
 & \times (\sin^2 \varphi_{k+2n-1} + (-1)^{k+2n-1} \sin^2 \varphi_{-(k+2n-1)}) \left. \right] \Big\} .
 \end{aligned}$$

Амплитуда  $k$ -ой гармоники плотности тока  $j_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ .

На рис.1 представлена зависимость постоянной составляющей плотности тока от напряженности постоянного электрического поля при  $\omega/\nu=2$ . На рис.2 приведена зависимость первой гармоники плотности тока от амплитуды переменного электрического поля при  $\omega/\nu=2$ .

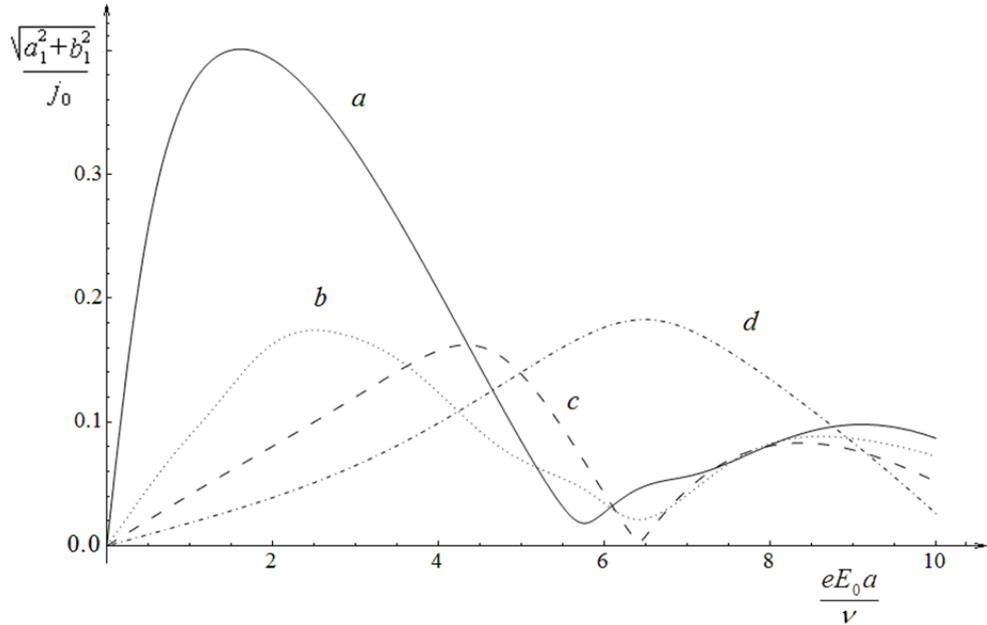


Рис.2 Зависимость первой гармоники плотности тока от амплитуды переменного электрического поля при  $\omega/\nu=2$ ,

a)  $eE_1 a / \nu = 0,1$ ; b)  $eE_1 a / \nu = 1,0$ ; c)  $eE_1 a / \nu = 4,0$ ; d)  $eE_1 a / \nu = 6,0$ .

Зависимости амплитуд высших гармоник плотности тока от характеристик приложенных к системе полей имеют немонотонный характер. Это дает возможность в широком интервале значений управлять амплитудой гармоники. Меняя характеристики приложенных полей  $E_1$ ,  $E_0$  и  $\omega$ , можно добиться существенного подавления или усиления соответствующей гармоники (см. рис.3).

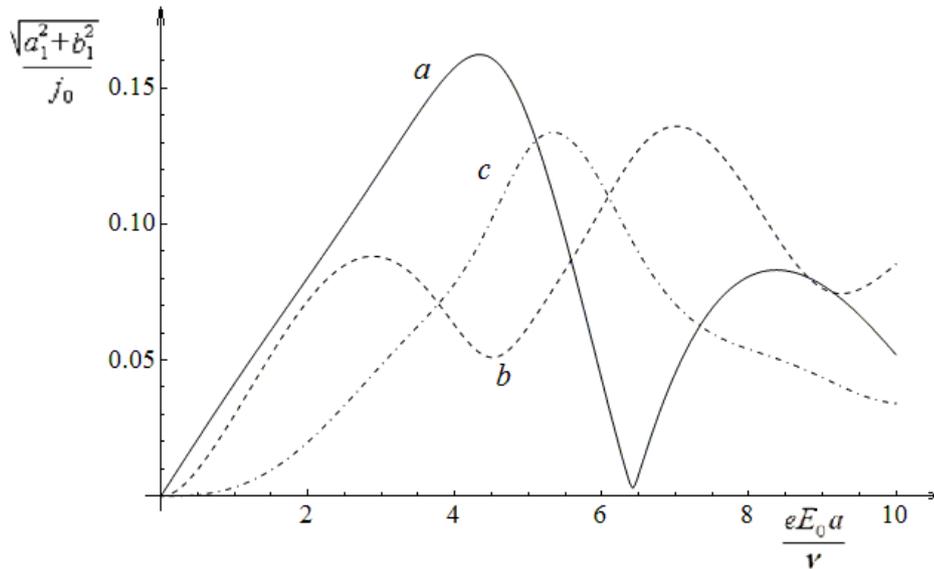


Рис. 3 Зависимость амплитуды первой (а), второй (b) и третьей (c) гармоник от амплитуды переменного электрического поля при  $\omega/v=2$ ,  $eE_1 a / v =4,0$ .

Условия применимости однозонного приближения:  $k_B T \ll 2\Delta$ ,  $\hbar\omega \ll 2\Delta$ ,  $eE\lambda \ll \varepsilon_g$ ,  $\lambda$  – средняя длина свободного пробега носителей заряда (для графена  $\lambda \approx 10^{-4} - 10^{-5}$  см),  $\varepsilon_g$  – ширина зоны проводимости ( $\varepsilon_g = 3t$ ). Сделаем численные оценки:  $\Delta = 1.2$  эВ,  $T \leq 300$  К,  $\omega \leq 10^{14}$  с $^{-1}$ ,  $E \leq 10^5$  В/см,  $n \approx 10^{10}$  см $^{-2}$ ,  $v \approx 10^{11} - 10^{12}$  с $^{-1}$ ,  $j_0 \approx 0.4$  А/см.

В заключении сформулируем основные выводы из данной работы:

1. Исследована постоянная составляющая плотности тока в щелевой модификации графена в присутствии постоянного и переменного электрических полей. Найдены значения параметров приложенных полей, при которых возможен эффект абсолютной отрицательной проводимости.

2. Получено и численно проанализировано выражение для амплитуд высших гармоник плотности тока в щелевой модификации графена под воздействием постоянного и переменного электрических полей.

3. Зависимость амплитуд гармоник плотности тока от характеристик приложенных к системе полей имеет немонотонный, осциллирующий характер. Это дает возможность в широком интервале значений управлять амплитудой гармоник за счет повышения вероятности многоквантовых процессов с ростом интенсивности поля.

4. При определенных соотношениях параметров приложенных полей выявлено существенное превалирование одних гармоник над другими.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. S.Y. Zhou // Nature Mater. 2007. No. 6. P. 770.
2. G. Giovannetti // Phys. Rev. B. 2007. No.76. P. 073103.
3. D.S. Elias // Science. 2009. No. 323. P. 610.

## Модель решётки спиралеобразных ректенн, обладающей круговой диаграммой направленности

К.Т.Ч. Ву, Р.В. Егоров, Д.А. Михеев, В.Л. Саввин  
Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.  
[kt.vu@physics.msu.ru](mailto:kt.vu@physics.msu.ru)

Беспроводная передача энергии на сегодняшний день может найти множество применений. Например, существуют проекты космических электростанций, передающих энергию с орбиты на землю, а также беспроводных линий электропередач, позволяющих обеспечить энергией населённые пункты, расположенные в труднодоступных местах. Поэтому проблема беспроводной передачи энергии является актуальной [1, 2, 3].

Существует несколько основных идей осуществления такого рода передачи. В данной работе рассматривается устройство, предназначенное для приёма и преобразования энергии электромагнитных волн в СВЧ диапазоне, то есть внимание уделяется микроволновому способу передачи энергии. Изучаемым устройством является ректенна. Она представляет собой структуру, состоящую из принимающего излучения элемента (антенны), соединённого с преобразователем переменного тока в постоянный. В данной работе для этого используется диод с барьером Шоттки. Для улучшения приёмных характеристик применяется отражатель.

Ректенны имеют относительно небольшие размеры, что может позволить их использование в питании небольших переносных устройств: мобильных телефонов, планшетных компьютеров и прочих. Однако типичная ректенна не способна быть источником большой мощности, поэтому для осуществления подзарядки устройств, требующих много энергии, например, беспилотных летательных аппаратов предлагается использовать множество ректенн, соединённых в решётку.

Целью данной работы являлось построение и изучение модели решётки ректенн, которая обладала бы круговой диаграммой направленности. Такая диаграмма означает, что элемент принимает излучение одинаково хорошо со всех сторон, что особенно важно для их использования на подвижных устройствах. Исследование проводилось при помощи численного моделирования и изучения экспериментальной модели.

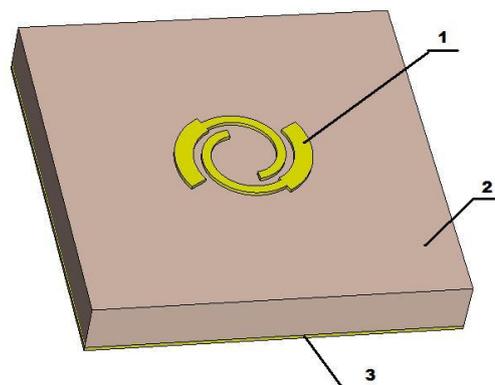


Рис. 1. Структура модели ректенны. 1 – спиралеобразная антенна, 2 диэлектрический слой, 3 — металлический отражатель.

Основной целью численного моделирования было нахождение такой структуры принимающего элемента ректенны, который обеспечивал бы круговую диаграмму

направленности и обеспечивала бы резонанс на требуемой частоте. Вид полученной модели представлен на рисунке 1.

Конструкция модели была следующей. Плоская спиралеобразная антенна располагалась на диэлектрической подложке. Они были размещены над слоем металла, играющем роль отражателя, на расстоянии четверти длины волны от антенны. Резонансной частотой было выбрано 2,6 ГГц. Для моделирования был использован метод конечных интегралов во временной области с преобразованием излучения в ближней зоне в излучение в дальней зоне [4, 5].

Желание получить круговую диаграмму направленности уже на одном элементе обусловлено тем, что достижение такого результата позволило бы существенно облегчить решение задачи взаимного расположения ректенн в решётке. В полученной модели разница между наибольшим и наименьшим значением диаграммы направленности составила 0,286 дБи. Её коэффициент отражения на резонансной частоте — -4,52 дБ.

Численное моделирование позволило рассчитать размеры принимающего элемента для создания экспериментального образца.

Для экспериментального изучения была построена решётка из четырёх ректенн, соединённых на единую нагрузку после преобразования тока. Проводились измерения резонансных характеристик структуры, зависимость принимаемого излучения от угла поворота всей конструкции и зависимость мощности от сопротивления. Фотография получившегося устройства представлена на рисунке 2.

Каждый элемент изготовлен методом травления из меди на текстолитовой подложке. Ректенны расположены в вершинах квадрата со стороной, равной половине длины волны. Можно заметить, что их ориентация чередуется. Предполагалось, что это позволит получить гораздо более равномерную диаграмму направленности.

В ходе измерений, было установлено, что структура настроена в резонанс на частоте, приблизительно равной 2,5 ГГц. Дальнейшие измерения проводились на частоте, соответствующей резонансу. Путём вращения структуры под излучением, было установлено, что зависимость получаемого на нагрузке структуры напряжения от угла её поворота является достаточно равномерной. Эта зависимость представлена на рисунке 3.

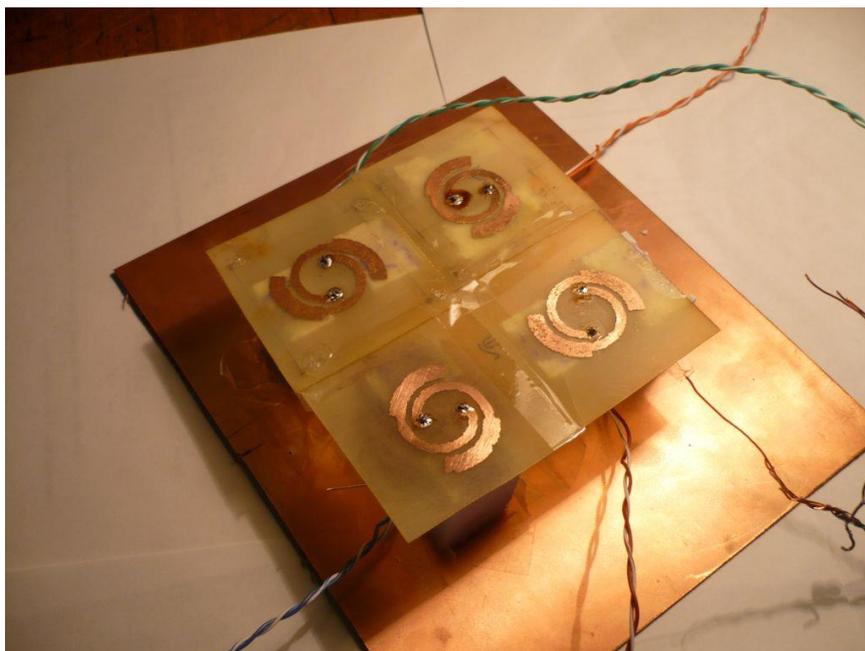


Рис. 2: Экспериментальный образец

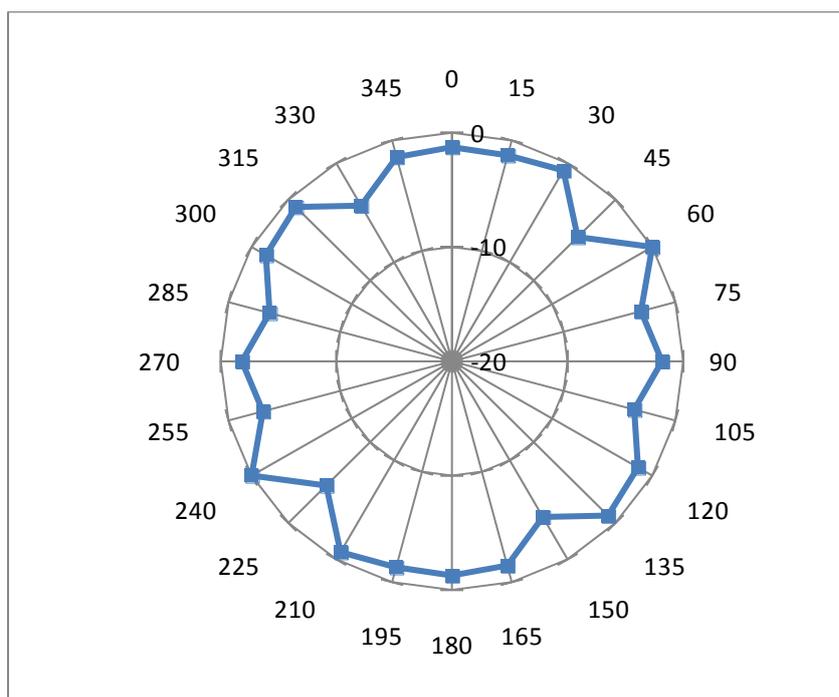


Рис. 3: Диаграмма направленности экспериментальной модели решётки ректенн.

В результате работы было установлено следующее. Теоретически и экспериментально показана возможность создания ректенных элементов для преобразования энергии микроволн в энергию электрического тока. Изучены приемные и нагрузочные характеристики экспериментальных ректенных элементов. Обнаружено, что полученная модель решётки ректенн обладает круговой диаграммой направленности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Казарян Г.М. Повышение эффективности передачи, приёма микроволнового излучения с преобразованием в постоянный ток. Дисс. к.ф.м.н., МГУ, физ. ф-т, 2007.
2. URSI White Paper on Solar Power Satellite (SPS) Systems. - URSI Inter-commission Working Group on SPS. - September 2006, <http://www.ursi.ca/SPS-2006sept.pdf>
3. S. Sheik Mohammed, K. Ramasamy, T. Shanmuganatham // International Journal of Computer Applications. 2010. V. 1. No. 13. P. 100-103.
4. Михайлов Е.В. Исследование возможностей метода конечных интегралов при прогнозировании распространения радиоволн в неоднородных анизотропных средах. // Сборник докладов III Всероссийской конференции «Радиолокация и радиосвязь». М.: изд. ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, 2009.
5. Understanding the Finite-Difference Time-Domain Method, John B. Schneider, [www.eecs.wsu.edu/~schneidj/ufdtd](http://www.eecs.wsu.edu/~schneidj/ufdtd), 2010.

## Эффект абсолютной отрицательной проводимости, индуцированный высокочастотным электромагнитным полем в сверхрешетке

С.В. Крючков<sup>1,2</sup>, Е.И. Кухарь<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Волгоградский государственный социально-педагогический университет, Лаборатория физики низкоразмерных систем

<sup>2</sup> Волгоградский государственный технический университет  
[eikuhar@yandex.ru](mailto:eikuhar@yandex.ru)

Электрические свойства низкоразмерных структур со сверхрешеткой (СР) привлекают в последнее время повышенное внимание исследователей [1-3]. Сильное электрическое поле, приложенное вдоль оси СР, приводит при определенных условиях к кардинальному изменению электронного спектра [4-6]: непрерывный спектр преобразуется в набор эквидистантных энергетических уровней (так называемая штарковская лестница). В [7,8] построена общая теория электропроводности полупроводников, учитывающая конечность зоны проводимости и электрон-фононное взаимодействие. В [9] на основе общего метода, развитого в [7,8], показана возможность в СР электрофононного резонанса (ЭФР), предсказанного в [10] для объемных полупроводников.

Ниже вычислена плотность тока, возникающего вдоль оси квантовой СР, помещенной в квантующее электрическое поле и в поле высокочастотного (ВЧ) электромагнитного (ЭМ) излучения. В настоящей работе учитываются процессы поглощения и излучения квантов ВЧ поля, что делает полученные результаты отличными от [11].

Рассмотрим 2D структуру со СР, помещенную в плоскости  $xu$  таким образом, что  $Ox$  – ось СР. В приближении сильной связи динамика электронов в минизоне в ряде полупроводниковых СР описывается следующим законом дисперсии ( $\hbar = 1$ ):

$$\varepsilon(\vec{p}) = \frac{p_y^2}{2m} + 2\Delta \sin^2 \frac{p_x d}{2}, \quad (1)$$

где  $\vec{p}$  – квазиимпульс,  $m = \text{const}$  – эффективная масса, соответствующая движению электрона в направлении  $Oy$ ,  $\Delta$  – ширина минизоны,  $d$  – период СР.

Пусть рассматриваемая структура облучается ЭМ волной, напряженность электрического поля которой совершает осцилляции в плоскости  $xu$  с амплитудой  $E_0$  и частотой  $\omega$ . Кроме того, считаем, что вдоль оси СР приложено сильное постоянное электрическое поле напряженностью  $\vec{E}$ , для которого выполнены следующие условия:

$$\Omega_{St} \ll \varepsilon_g, \quad \Omega_{St} \tau \gg 1, \quad (2)$$

где  $\Omega_{St} = eEd$  – штарковская частота,  $\tau$  – время релаксации,  $\varepsilon_g$  – щель в зонной структуре. Первое неравенство (2) позволяет использовать одноминизонное приближение. Второе условие (2) позволяет проявиться квантованию энергии движения носителей заряда вдоль оси СР [4]:  $\varepsilon = \varepsilon_{p_y} + \nu \Omega_{St}$ . Здесь  $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $\varepsilon_{p_y} = p_y^2/2m$  – энергия поперечного движения.

Согласно общей теории ток  $j_x$ , возникающий вдоль оси СР под действием указанных полей, с учетом неупругого рассеяния носителей заряда на фонах равен [7]:  $j_x = j_+ + j_-$ , где

$$j_{\pm} = 2\pi edn_0 \sum_{\nu} \sum_{\vec{q}} \sum_{p_y} \sum_{p'_y} \nu f(p_y) |C_{\vec{q}}|^2 |M_{\nu}(q_x)|^2 \times \\ \times \sum_s |G_s(q_y)|^2 \left( N_{\vec{q}} + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right) \delta(\varepsilon_{p'_y} - \varepsilon_{p_y} \pm \omega_{\vec{q}} - \nu\Omega_{St} - s\omega) \delta_{p'_y, p_y - q_y}. \quad (3)$$

Здесь  $N_{\vec{q}}$  – число фононов с волновым вектором  $\vec{q}$ ,  $|C_{\vec{q}}|^2 = g/q^2$ ,  $g$  – константа связи электронов с фононами [12],  $n_0$  – поверхностная концентрация свободных носителей заряда,  $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Функция распределения электронов по поперечным составляющим квазиимпульса  $f(p_y)$ , входящая в (3) и учитывающая разогрев электронного газа, вызванный ВЧ ЭМ полем, является решением уравнения баланса [7,8]. В приближении сильной связи квадрат матричного элемента  $M_{\nu}(q_x)$  оператора, учитывающего влияние квантующего электрического поля, равен [6]:

$$|M_{\nu}(q_x)|^2 = J_{\nu}^2 \left( \frac{\Delta}{\hbar\Omega_{St}} \sin \frac{q_x d}{2} \right),$$

где  $J_{\nu}(x)$  – функция Бесселя. В приближении эффективной массы квадрат матричного элемента  $G_s(q_y)$  оператора, учитывающего влияние электрического поля ЭМ волны, имеет вид [6]:  $|G_s(q_y)|^2 = J_s^2(a_0 dq_y)$ , где  $a_0 = eE_0/m\omega^2 d$ .

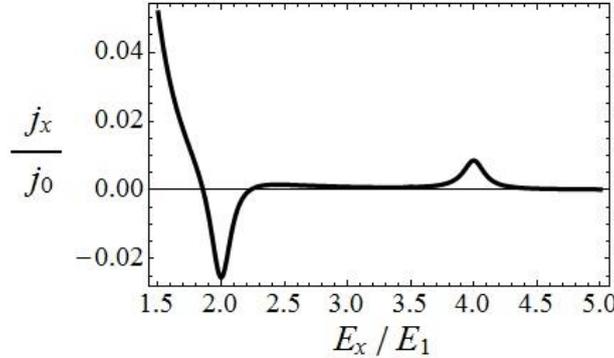


Рис. 1. Зависимость плотности тока от напряженности квантующего электрического поля.  $\omega = 3\omega_0$ ,  $\omega_0\tau = 10$ ,  $a_0 = 0.1$ .

Полагаем температуру настолько малой, что выполнено условие:  $N_{\vec{q}} \ll 1$ . В этом случае, как видно из (3), процессы, идущие с поглощением фононов, можно не учитывать. Кроме того, считаем, что энергия поперечного движения, усредненная по каноническому ансамблю, значительно меньше  $\Omega_{St}$ . Это позволяет пренебречь поперечной дисперсией электронов. Полагая  $\Omega_{St} \gg \Delta$ ,  $g = \text{const}$  и пренебрегая дисперсией фонона ( $\omega_{\vec{q}} = \omega_0 = \text{const}$ ), перепишем (3) с учетом выше сказанного:

$$j_x = \frac{\pi edn_0 g}{2} \left( \frac{\Delta}{\hbar\Omega_{St}} \right)^2 \sum_{\nu=\pm 1} \sum_s \sum_{\vec{q}} \frac{\nu}{q^2} J_s^2(a_0 dq_y) \sin^2 \left( \frac{q_x d}{2} \right) \delta(\omega_0 - \nu\Omega_{St} - s\omega). \quad (4)$$

Из (4) следует, что плотность тока испытывает резонанс, если  $\omega_0 = \nu\Omega_{St} + s\omega$ . Ситуация, когда  $s = 0$  соответствует ЭФР [9,10]. Для количественного анализа вольт-амперной характеристики СР необходимо учесть конечность ширины резонансов и значений тока в них. Уширение резонансов может быть вызвано, например, столкновениями носителей с акустическими фононами, наличием дисперсии оптических фононов и т.д. В связи с этим заменим в (4)  $\delta$ -функции их лоренцевскими представлениями. В случае ЭМ излучения малой амплитуды ( $eE_0 \ll m\omega^2 d$ ) имеем:

$$j_x = j_0 \left( \frac{\omega_0}{\Omega_{St}} \right)^2 \left[ \frac{\pi}{1 + (\omega_0 - \Omega_{St})^2 \tau^2} + \frac{4a_0}{3} \left( \frac{1}{1 + (\omega_0 - \Omega_{St} - \omega)^2 \tau^2} + \frac{1}{1 + (\omega_0 - \Omega_{St} + \omega)^2 \tau^2} - \frac{1}{1 + (\omega_0 + \Omega_{St} - \omega)^2 \tau^2} \right) \right], \quad (5)$$

где обозначено:  $j_0 = ed^3 \Delta^2 n_0 g \tau / 4\pi^2 \omega_0^2$ . График зависимости плотности тока от напряженности квантующего электрического поля, построенный по формуле (5) показан на рисунке 1 (здесь  $E_1 = \omega_0 / ed$ ). Из графика видно, что если выполняется условие:

$$\omega = \omega_0 + \Omega_{St}, \quad (6)$$

то возникает резонанс отрицательного тока. Эта ситуация соответствует абсолютной отрицательной проводимости (АОП): ток течет против постоянного электрического поля. Электронные переходы, ответственные за этот эффект, сопровождаются поглощением кванта ВЧ поля и излучением фонона (рис. 2). Вдали от ЭФР ( $|\omega_0 - \Omega_{St}| \tau \gg 1$ ) плотность тока в резонансе, соответствующем условию (6), равна:

$$j_x \sim - \frac{j_0 \omega_0^2 e E_0}{m d \omega^2 \Omega_{St}^2}. \quad (7)$$

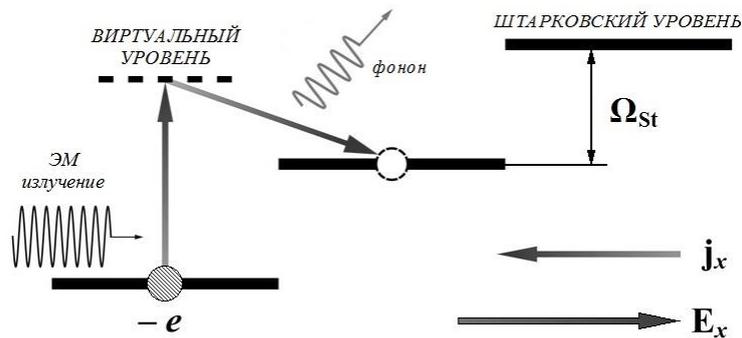


Рис. 2. Схема процесса (эффект АОП).  $\omega = \Omega_{St} + \omega_0$ .

В случае сильного ЭМ излучения ( $eE_0 \gg m\omega^2 d$ ) плотность тока равна:

$$j_x = \frac{j_0}{a_0} \left( \frac{\omega_0}{\Omega_{St}} \right)^2 \left[ \frac{\ln a_0}{1 + (\omega_0 - \Omega_{St})^2 \tau^2} + \sum_{s=1}^{\infty} \left( \ln a_0 - \psi \left( s + \frac{1}{2} \right) \right) \right] \times$$

$$\times \left[ \frac{1}{1 + (\omega_0 - \Omega_{St} - s\omega)^2 \tau^2} + \frac{1}{1 + (\omega_0 - \Omega_{St} + s\omega)^2 \tau^2} - \frac{1}{1 + (\omega_0 + \Omega_{St} - s\omega)^2 \tau^2} \right], \quad (8)$$

где  $\psi(x)$  – дигамма-функция. График зависимости плотности тока от напряженности квантующего электрического поля, построенный по формуле (8) показан на рисунке 3.

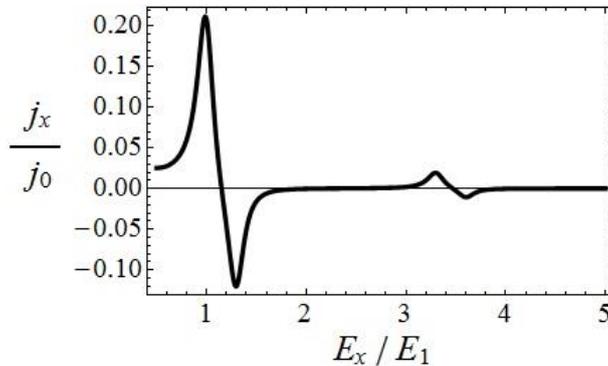


Рис. 1. Зависимость плотности тока от напряженности квантующего электрического поля.  $\omega=2.3\omega_0$ ,  $\omega_0\tau=10$ ,  $a_0=10$ .

Предсказанный эффект АОП не зависит от вида статистики электронного газа. Возможность такого эффекта является следствием закона сохранения энергии в условиях штарковского квантования. Действительно, при выполнении условия (6) возникают электронные переходы между штарковскими уровнями с поглощением фотона и излучением фонона (рис. 2). В результате энергия электрона повышается, и он движется против поля. Таким образом, необходимым условием возникновения АОП необходима передача энергии электронной подсистеме. Последнее достигается за счет облучения образца ВЧ ЭМ волной. Как видно из (6) в отсутствие ЭМ волны ( $E_0 = 0$ ) эффект АОП исчезает. Существует некая аналогия данного эффекта с эффектом поглощения света атомом. При этом электрон переходит на более высокий энергетический уровень, “удаляясь” от атомного ядра. Таким образом, электрон “движется” в направлении противоположном направлению кулоновской силы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России на выполнение государственных работ в сфере научной деятельности в рамках базовой части государственного задания №2014/411 (код проекта: 522).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. A. Ka Chun Cheung, M. Berciu // *Physical Review B*. 2013. V. 88. P. 035132.
2. A.G. Balanov et al. // *Physics of Wave Phenomena*. 2015. V. 23. P. 28.
3. M. Barbier, P. Vasilopoulos, F. M. Peeters // *Physical Review B*. 2010. V. 81. P. 075438.
4. M. Gluck, A.R. Kolovsky, H.J Korsch // *Physics Reports*. 2002. V. 366. P. 103.
5. G. Wang et al. // *Superlattices and Microstructures*. 1994. V. 16. P. 321.
6. С.В. Крючков, В.А. Яковлев // *ФТП*. 1976. Т. 10. С. 171.
7. В.В. Брыксин, Ю.А. Фирсов // *ЖЭТФ*. 1971. Т. 61. С. 2373.
8. И.Б. Левинсон, Я. Ясевичюте // *ЖЭТФ*. 1982. Т. 62. С. 1902.
9. С.В. Крючков, Н.П. Михеев // *ФТП*. 1982. Т. 16. С. 2043.

10. V.V. Bryksin, Yu. A. Firsov. S.A. Ktitorov // Solid State Communication. 1981. V. 39. P. 385.
11. С.В. Крючков, Н.П. Михеев // ФТП. 1984. Т. 18. С. 1296.
12. K. Hacker. Physica Status Solidi. 1969. V. 33. P. 607.

## Эффект подавления осцилляций де Газа - ван Альфена в графене высокочастотным электромагнитным излучением

С.В. Крючков<sup>1,2</sup>, Е.И. Кухарь<sup>1</sup>, П.В. Назаров<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Волгоградский государственный социально-педагогический университет, Лаборатория физики низкоразмерных систем

<sup>2</sup>Волгоградский государственный технический университет  
[eikuhar@yandex.ru](mailto:eikuhar@yandex.ru)

Развитие экспериментальных методов изучения электрических и оптических свойств графена привело к тому, что графен приобретает все больший интерес в области физики электронных систем с пониженной размерностью [1-5]. Вблизи так называемых дираковских точек зоны Бриллюэна закон дисперсии графена линеен по абсолютному значению квазиимпульса, что соответствует безмассовым частицам [6]. Этот факт дает возможность использовать графен для проверки релятивистских эффектов. Большое значение для понимания свойств так называемых дираковских фермионов в твердых телах [7] имеют исследования влияния внешних электромагнитных (ЭМ) полей на намагниченность электронной подсистемы графена [8-11]. В [8] исследованы магнитные осцилляции де Газа-ван Альфена в графене. Влияние постоянного однородного электрического поля на осцилляции де Газа-ван Альфена в этом материале изучено в [9], где показана возможность подавления этих осцилляций при определенных значениях напряженности постоянного электрического поля.

В настоящей работе исследовано влияние высокочастотного (ВЧ) ЭМ излучения на осцилляции де Газа-ван Альфена в графене. Пусть графеновый лист, расположенный в плоскости  $xу$ , находится в квантующем магнитном поле с напряженностью  $\vec{H}$ , направленной вдоль оси  $Oz$ . Кроме того, считаем, что вдоль оси  $Oz$  распространяется ВЧ ЭМ излучение с частотой  $\omega$  и амплитудой электрического поля  $E_0$ . Векторный потенциал результирующего поля в плоскости  $xу$  равен ( $c=1$ ):  $\vec{A}(t) = (- (E_0/\omega) \sin \omega t, Hx)$ . Спинор  $\psi$ , описывающий движение электрона в графене в указанных полях, удовлетворяет уравнению ( $\hbar=1$ ):  $i\partial_t \psi = v_F (\vec{p} + e\vec{A}) \cdot \vec{\sigma} \psi$ . Здесь  $\vec{p} = (p_x, p_y)$  – оператор квазиимпульса,  $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  – матрицы Паули,  $v_F$  – скорость на поверхности Ферми. После некоторых преобразований имеем:

$$-\frac{1}{v_F^2} \partial_t^2 \psi = \left[ (\hat{p}_x - p_E \sin \omega t)^2 + \left( \hat{p}_y + \frac{x}{\lambda_H} \right)^2 + \frac{\sigma_z}{\lambda_H^2} - \frac{i\omega p_E \sigma_x}{v_F} \cos \omega t \right] \psi. \quad (1)$$

Здесь  $\lambda_H = 1/\sqrt{eH}$  – ларморовский радиус,  $p_E = eE_0/\omega$ . Считаем, что выполнено неравенство:  $v_F/\lambda_H \gg T$ , позволяющее считать магнитное поле квантующим ( $T$  – температура, выраженная в энергетических единицах).

Решение уравнения (1) удовлетворяет теореме Флоке [12-17]:  $\psi(t) = u(t) \exp(-i\varepsilon_{\text{eff}} t)$ , где  $u(t)$  – спинор, компоненты которого являются периодическими функциями с периодом  $2\pi/\omega$ ,  $\varepsilon_{\text{eff}}$  – квазиэнергия [12-17]. Считаем, что частота ВЧ излучения удовлетворяет условию:  $\omega \gg v_F/\lambda_H$ . Воспользовавшись методом усреднения [12-18], определим квазиэнергию:

$$\varepsilon_{ns} = \sqrt{\frac{v_F^2}{\lambda_H^2} \left[ \sqrt{1+16a^2} (2n+1) - (-1)^s \right] + 2\omega^2 a^4}. \quad (2)$$

Здесь  $a = p_E v_F / 2\sqrt{2}\omega$ ,  $n = 1, 2, \dots, s$  – номер подрешетки.

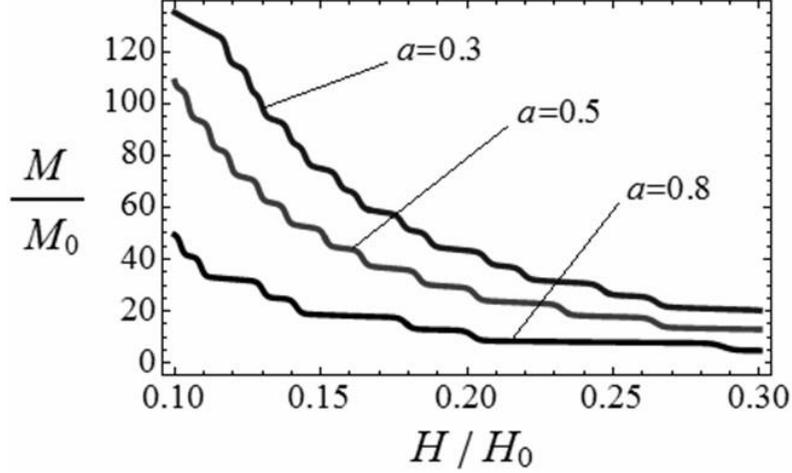


Рис. 1. Зависимость магнитного момента электронной подсистемы графена от напряженности квантующего магнитного поля

ТД потенциал электронной системы в магнитном поле равен [19]:

$$\Omega(T, H) = -T \sum_{n,s} \ln \left[ 1 + \exp \left( \frac{\mu - \varepsilon_{n,s}}{T} \right) \right], \quad (3)$$

где  $\mu$  – химический потенциал. Магнитный момент электронной подсистемы графена вычисляется согласно формуле [19]:  $\vec{M} = -(\partial_{\vec{H}} \Omega)_{T, \mu}$ . После подстановки (2) в (3), получаем:

$$M = \frac{e v_F^2}{2} \sum_{n,s} \frac{f(\varepsilon_{n,s})}{\varepsilon_{n,s}} \left( \sqrt{1+16a^2} (2n+1) - (-1)^s \right), \quad (4)$$

где  $f(\varepsilon)$  – функция распределения Ферми-Дирака. Зависимости магнитного момента электронной подсистемы от напряженности квантующего магнитного поля, построенные по формуле (4) для различных значений параметра  $a$  (безразмерной амплитуды ВЧ поля), показаны на рисунке 1 (здесь  $H_0 = \omega^2 / e v_F^2$ ,  $M_0 = e v_F^2 / \omega$ ).

В случае предельно низких температур функцию  $f(\varepsilon)$  можно заменить на  $\theta$ -функцию:  $f(\varepsilon_{n,s}) \rightarrow \theta(\mu - \varepsilon_{n,s})$ . Тогда вместо (4) запишем:

$$M = \frac{e v_F^2}{2} \sum_{n,s} \frac{\theta(\mu - \varepsilon_{n,s})}{\varepsilon_{n,s}} \left( \sqrt{1+16a^2} (2n+1) - (-1)^s \right). \quad (5)$$

Из (2) и (5) видно, что осцилляции де Газа-ван Альфена подавляются, если параметр  $a$  удовлетворяет неравенству:

$$a > \sqrt{\frac{\mu}{\sqrt{2}\omega}}. \quad (6)$$

Из рисунка 1 видно, что магнитный момент испытывает осцилляции с изменением напряженности магнитного поля, причем частота этих осцилляций зависит от параметра  $a$ . Чтобы определить зависимость периода магнитных осцилляций, от параметра  $a$  воспользуемся формулой Пуассона [19]. В случае  $T \ll \mu$  для осциллирующей части магнитного момента получим:

$$M_{\text{osc}} = -\frac{\pi T(\mu^2 - 2\omega^2 a^4)}{e v_F^2 H^2 \sqrt{1+16a^2}} \sum_s \theta_s \times \\ \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{sh}^{-1} \left( \frac{2\pi^2 \mu T}{e v_F^2 H \sqrt{1+16a^2}} \right) \sin \left[ \pi k \left( \frac{\mu^2 - 2\omega^2 a^4}{e v_F^2 H \sqrt{1+16a^2}} + \alpha_s \right) \right]. \quad (7)$$

Здесь:

$$\alpha_s = \frac{(-1)^s}{\sqrt{1+16a^2}} - 1, \quad \theta_s = \begin{cases} 1, & \mu > \varepsilon_{0s}, \\ e^{-(\varepsilon_{0s}-\mu)/T}, & \mu < \varepsilon_{0s}. \end{cases}$$

Из (7) видно, что период осцилляций по обратному магнитному полю равен:

$$\Delta \left( \frac{1}{H} \right) = \frac{2e v_F^2 \sqrt{1+16a^2}}{|\mu^2 - 2\omega^2 a^4|}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России на выполнение государственных работ в сфере научной деятельности в рамках базовой части государственного задания №2014/411 (код проекта: 522).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. E.V. Kurganova et al. // Physical Review B. 2013. V. 87. P. 085447.
2. Y. Kim et al. // Physical Review Letters. 2013. V. 110. P. 227402.
3. M. Titov et al. // Physical Review Letters. 2013. V. 111. P. 166601.
4. G.L. Yu et al. // Nature Physics. 2014. V. 10. P. 525.
5. R.V. Gorbachev et al. // Science. 2014. V. 346. P. 448.
6. P.R. Wallace. Physical Review. 1947. V. 71. P. 622.
7. H. Fukuyama et al. // Physica B. 2012. V. 407. P. 1943.
8. S G Sharapov, V P Gusynin, H Beck // Physical Review B. 2004. V. 69. P. 075104.
9. S. Zhang, N, Ma, E. Zhang // Journal of Physics: Condensed Matter. 2010. V. 22. P. 115302.
10. L. Heße, K. Richter // Physical Review B. 2014. V. 90. P. 205424.
11. C.J. Tabert, J.P. Carbotte, E.J. Nicol // Physical Review B. 2015. V. 91. P. 035423.
12. T. Oka, H. Aoki // Physical Review B. 2009. V. 79. P. 081406(R).
13. H.L. Calvo et al. // Applied Physics Letters. 2011. V. 98. P. 232103.
14. Z. Gu et al. // Physical Review Letters. 2011. V. 107. P. 216601.
15. M. Busl, G. Platero, A.-P. Jauho // Physical Review B. 2012. V. 85. P. 155449.
16. S.V. Syzranov et al. // Physical Review B. 2013. V. 88. P. 241112.
17. S.V. Kryuchkov, E.I. Kukhar' // Physica B. 2014. V. 445. P. 93.
18. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц «Механика» М.: Физматлит, 2002.
19. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц «Статистическая физика. Часть 1» М.: Физматлит, 2002.

## Электродинамические свойства водных растворов

А.О. Моисеев<sup>1</sup>, Г.М. Стеркин<sup>1</sup>, В.Г. Артёмов<sup>2</sup>, А.Ф. Королев<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова

<sup>2</sup> Институт общей физики имени А.М. Прохорова РАН

[wonderwally@yandex.ru](mailto:wonderwally@yandex.ru)

Чистая вода является диэлектриком с относительно низкой протонной проводимостью  $\sigma_{dc} = 5.5 \cdot 10^{-8} \text{ Ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$ . Небольшое количество растворенного вещества, однако, резко повышает электропроводность на порядки ( $\sigma_{dc}^S = 2.1 \cdot 10^{-3} \text{ Ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$  уже при 0.01 моль/л NaCl). Исследование явления проводимости в водных электролитах ведется уже более столетия (со времен Кольрауша и Аррениуса), однако теории, связанные с именами Онзагера, Дебая, Хюккеля, Фалькенхагена, строятся на представлениях о переносе заряда в электролитах «на постоянном токе», где движение ионов может возмущаться взаимодействием, которое не учитывается.

В работе [1], на основе анализа широкополосного спектра было показано, что высокочастотная (дебаевская) проводимость воды  $\sigma_D$  может быть связана с наличием в воде большого количества (до 1%) собственных ионов в виде  $\text{H}_3\text{O}^+$  и  $\text{OH}^-$ , что фактически делает ее сильным электролитом. Низкочастотная проводимость воды является, при этом, результатом коллективного перераспределения кулоновски взаимодействующих зарядов, что является причиной их низкой подвижности и как следствие низкой  $\sigma_{dc}$ .

Представление о воде как о сильном электролите с большим количеством собственных ионов было расширено на растворы в работе [2]. Показывается, что низкочастотная проводимость растворов  $\sigma_{dc}^S$  является не следствием миграции ионов растворенного вещества, а результатом его взаимодействия с собственными ионами воды  $\text{H}_3\text{O}^+$  и  $\text{OH}^-$ , приводящего к повышению подвижности последних. Вывод подтверждается тем фактом, что высокочастотный предел проводимости растворов  $\sigma_D^S$  не зависит от концентрации и остается в пределах того же значения  $\sigma_D$  наблюдаемого для чистой воды.

В работе Дж. Поллака [3] было установлено, что вода может накапливать и сохранять заряд в течении долгого времени, что качественно подтверждает представления о большом количестве собственных ионов в воде. Суть эксперимента заключалась в следующем: через воду пропускался электрический ток, затем, спустя некоторое время после размыкания цепи, в ячейку вносились вспомогательные электроды, и вода замыкалась на сопротивление, таким образом, часть заряда была восстановлена.

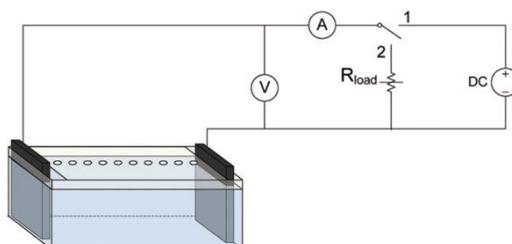


Рис. 1. Схема установки Дж. Поллака.

Также было замечено соответствие между рН и распределением заряда по объему. Благодаря специальному красителю, наблюдалась динамика изменения рН во время

зарядки и разрядки. Для того чтобы исключить влияние остаточных зарядов на заряжающих электродах, а также влияние молекул краски, были проведены контрольные эксперименты.

Другой эксперимент, демонстрирующий зарядание каплей воды, был продемонстрирован еще в 1867 году Лордом Кельвином, получивший впоследствии название «капельница Кельвина». Устройство работает по принципу положительной обратной связи, два металлических кольца создают электрическое поле, которое поляризует верхнюю банку с водой, капли справа и слева имеют противоположные заряды. Упав, капли попадают в банку, соответствующую своему заряду, тем самым увеличивают её заряд, что создаёт ещё большее электрическое поле, усиливая разделение зарядов верхней банки. Таким образом, капельница Кельвина преобразует потенциальную энергию воды в электрическую энергию между нижними банками.

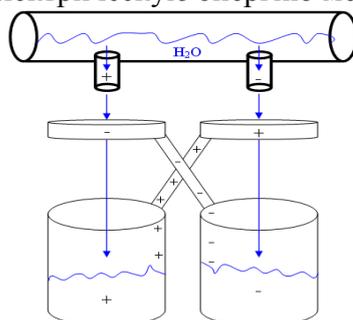


Рис. 2. Капельница Кельвина.

В докладе обсуждаются современные представления об электродинамических свойствах водных растворов, и рассматривается новый взгляд на проводимость электролитов, возникающий при анализе широкополосных диэлектрических спектров в диапазоне  $10^3$ - $10^{12}$  Гц.

## ЛИТЕРАТУРА

1. A.A. Volkov, V.G. Artemov and A.V. Pronin, A Radically New Suggestion about the Electrodynamics of Water: Can the pH Index and the Debye Relaxation be of a Common Origin? // EPL, – 2014. – 106. – P. 46004.
2. V.G. Artemov, A.A. Volkov, N.N. Sysoev, A.A. Volkov, Conductivity of aqueous HCl, NaOH and NaCl solutions: Is water just a substrate? // EPL, – 2015. – 109. – P. 26002.
3. Gerald H.Pollack // Langmuir 2009. V. 25 P. 542-547.

## Комплексный анализ базового элемента емкостных датчиков

М.А. Сивков, Ю.К. Алешин, М.А. Чоба  
Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова

Применение емкостных датчиков чрезвычайно многообразно. Они используются в системах регулирования и управления производственными процессами почти во всех отраслях промышленности, применяются для контроля заполнения резервуаров веществом. Но классическая формула для определения емкости конденсатора недостаточно точна, и не учитывает краевые эффекты и конечную толщину пластин, что приводит к большой погрешности в сверхточных измерениях с конденсаторами малых размеров, в которых расстояние между пластинами порядка линейного размера самих пластин. Анализ и учет факторов, влияющих на внесение погрешностей в показания датчика и посвящена данная работа.

Вышесказанное приводит к следующей задаче: учет влияния краевых эффектов и способы их устранения. Проблема в том, что задача об определении поля конденсатора решается точно лишь для очень узкого круга примеров. В основном это уединенные проводники, обладающие при этом определенной симметрией. Поэтому для определения емкости конденсаторов различных форм применяются специальные методы расчета. В данной работе подсчет произведен методом средних потенциалов.

Исходя из вариационного принципа Гаусса, для емкости можно написать неравенство

$$C \geq C[\sigma] = \frac{\{\int ds_i \sigma(r_i)\}^2}{\sum_{i=1,2} \int ds_i \sigma(r_i) \varphi(r_i)}, \quad (1)$$

где

$$\varphi(r_i) = \sum_{j=1,2} \int \frac{ds_j}{|r_i - r_j|} \sigma(r_j). \quad (2)$$

В формулах (1) и (2)  $ds_i$  – элемент площади проводника,  $\sigma(r_i)$  – поверхностная плотность зарядов,  $\varphi(r_i)$  – потенциал.

Функционал  $C[\sigma]$  достигает своего максимального значения  $C$  на точном решении задачи, соответствующим минимуму энергии электростатического поля (теорема Томсона). Истинное распределение заряда чаще всего неизвестно, и в методе средних потенциалов задается фиктивное распределение зарядов по поверхности или в объеме тел, заменяющих проводники. При этом поверхности каждого из тел приписывается постоянный потенциал, равный среднему арифметическому значений потенциала во всех точках тела. Эту величину называют средним потенциалом проводника. При указанном способе определения значения потенциала наиболее распространенным является допущение о том, что заряд распределен по поверхности равномерно. Таким образом потенциал пластин находится по формуле

$$U_{cp} = \frac{Q}{4\pi\epsilon S^2} \int dS' \int \frac{dS}{R}, \quad (3)$$

Здесь интегралы берутся по поверхности  $S$  рассматриваемого проводника,  $Q$  – полный заряд на поверхности,  $R$  – расстояние между точками поверхности проводника.

Данным методом было получено точное решение для емкости кругового плоскопараллельного конденсатора

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left( \frac{4h}{a^2} + \frac{32}{3\pi a} \left( 1 - \frac{1-q^2}{q^3} K(q) + \frac{1-2q^2}{q^3} E(q) \right) \right) \quad (4)$$

Здесь  $a$  – радиус пластин,  $h$  – расстояние между пластинами,  $K(q)$  и  $E(q)$  – эллиптические интегралы первого и второго родов соответственно,  $q^2 = \frac{4a^2}{h^2+4a^2}$ .

Сравнение значений емкостей, полученных с помощью формулы (4) и классической формулы  $C = \frac{\epsilon\pi a^2}{h}$ , представлено на рисунке 1. Видно, что уже при значениях  $h/a$  больших 0.4 разница в значениях емкостей составляет порядка 30% и возрастает с увеличением параметра  $h/a$ .

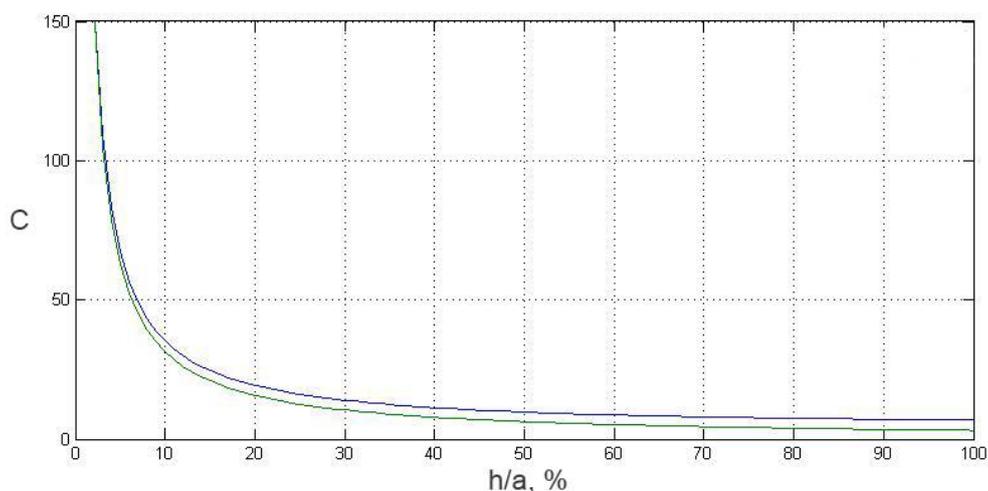


Рис. 1. Графики значений ёмкостей, полученных при использовании полученной и классической формул, по оси абсцисс отложено значение отношение  $h/a$  в процентах.

Однако пользоваться формулой (4) при значениях параметра  $h/a > 2.5$  нельзя, так как в при  $h/a \cong 2.7$  знаменатель (4) обращается в ноль. Это легко видеть на графике функции (4).

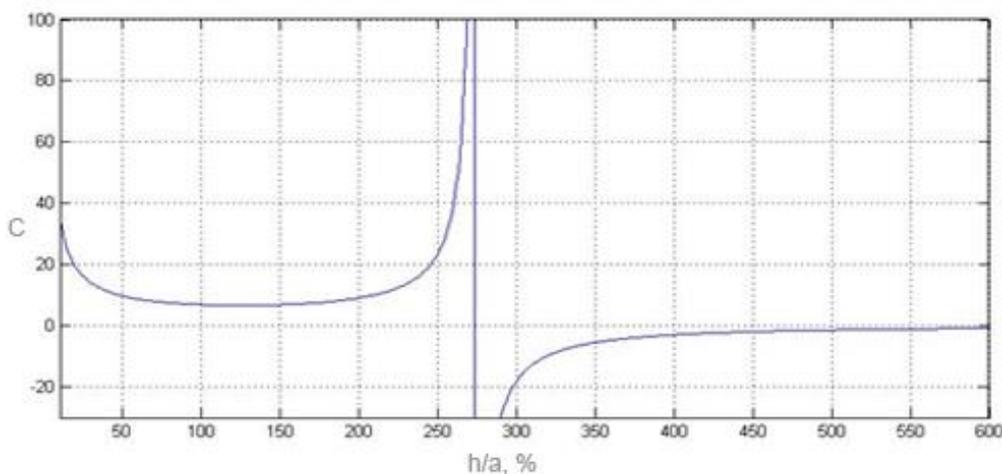


Рис 2. График функции (4) с особенностью в точке  $h/a \cong 2.7$ .

Обойти это можно, произведя разложение в ряд Тейлора подынтегральных выражений в эллиптических интегралах первого и второго родов по малому параметру  $q \ll 1$ .

$$K(q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 \varphi}} \cong \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + \frac{q^2 \sin^2 \varphi}{2} \right) d\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi q^2}{8}$$

$$E(q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - q^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \cong \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 - \frac{q^2 \sin^2 \varphi}{2} \right) d\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi q^2}{8}$$

$$q = \frac{2a}{h \sqrt{1 + \frac{4a^2}{h^2}}} \cong \frac{2a}{h} \left( 1 - \frac{2a^2}{h^2} + \frac{a^4}{2h^4} \right)$$

Подставляя в (13) для  $h/a > 2.5$ , получаем формулу

$$C \cong \frac{4\varepsilon a}{1 - \frac{2a}{\pi h} \left( 1 - \frac{7}{12} \left( \frac{a}{h} \right)^2 + \frac{33}{40} \left( \frac{a}{h} \right)^4 \right)} \quad (5)$$

График функции (5) представлен на рисунке 3. Следует также отметить, что формула (5) при  $h/a > 2.5$  обеспечивает точность с погрешностью  $|\delta| < 2.9\%$ , а при  $h/a > 5$ ,  $|\delta| < 0.4\%$ .

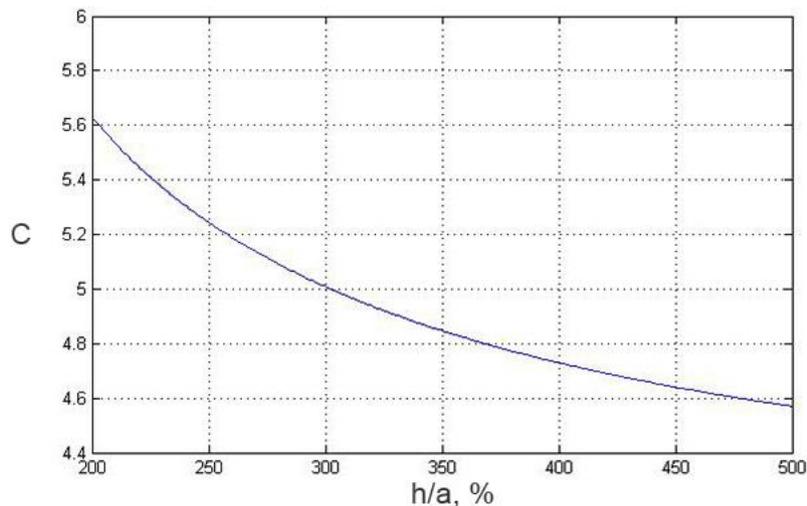


Рис. 3. График функции (5).

Таким образом, методом средних потенциалов получено точное решение для емкости плоскопараллельного кругового конденсатора. Получены асимптотики этого решения.

#### ЛИТЕРАТУРА.

1. Я.С. Сойбельман. Асимптотика емкости конденсатора с пластинами произвольной формы. Сибирский математический журнал, 1984, т. 26, № 6, стр. 167-181.
2. Ю.Я. Йоссель. Измерение электрической емкости. Москва: Энергоиздат, 1981.
3. А.П. Кононов. Расчет емкости плоского конденсатора с учетом краевого эффекта. Электромеханика, № 3, 1966, стр 241-243.
4. А. Гурвиц, Р. Курант. Теория функций. М.: Наука, 1968.

## Заряжание капель воды при свободном падении в электрическом поле

Г.М. Стеркин<sup>2</sup>, А. Моисеев<sup>2</sup>, П.О. Капралов<sup>1</sup>, В.Г. Артёмов<sup>1</sup>, А.Ф. Королев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт общей физики имени А.М. Прохорова РАН

<sup>2</sup>Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова

[sterkin.gleb@gmail.com](mailto:sterkin.gleb@gmail.com)

Задолго до того как люди получили знания об атомарной структуре вещества и об элементарном электрическом заряде, Кельвином было продемонстрировано простое устройство накопления электрического заряда, принцип работы которого основан на поляризации капель воды (капельница Кельвина) [1]. Несмотря на многолетнюю историю и многочисленные экспериментальные установки, принцип работы устройства долгое время остается загадкой для исследователей.

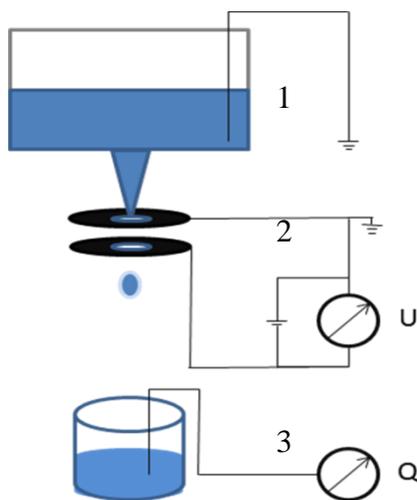


Рис.1. Схема экспериментальной установки. 1 – резервуар с дистиллированной водой; 2 –металлические кольца с потенциалом  $\varphi$ ; 3 – кювета; U – высоковольтный генератор; Q – киловольтметр.

В настоящей работе, мы исследовали механизмы поляризации капель воды различного диаметра в однородном электрическом поле в диапазоне 0-20 кВ/см. Показано, что накопление электрического заряда в момент отрыва капли, помещенной во внешнее однородное электрическое поле, обусловлено физическим разделением собственных ионов  $\text{H}_3\text{O}^+$  и  $\text{OH}^-$ , концентрация которых составляет около 0.5 моль/л. Полученные результаты свидетельствуют о необходимости пересмотра представлений о показателе pH и о концентрации собственных ионов в воде.

### ЛИТЕРАТУРА

1. [https://ru.wikipedia.org/wiki/Капельница\\_Кельвина](https://ru.wikipedia.org/wiki/Капельница_Кельвина)