

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУКАХ

Квазиволны в нелинейной активной среде, компьютерное моделирование

А.А. Быков 3

Метод гомотопии и метод Галеркина для расчета направляемых мод поперечно неоднородных волноводов

А.А. Быков 7

Сеточные методы решения задач с пограничным слоем

А.А. Белов, Н.Н. Калиткин 11

Математическое моделирование волноведущих систем

А.Г. Свешников, А.Н. Боголюбов, Н.А. Боголюбов, А.Л. Делицын 13

Синтез слоистого кирально-диэлектрического волновода

Н.А. Боголюбов, Ю.В. Мухартова, И.А. Буткарев 17

Локализация собственных функций оператора Лапласа в областях сложной формы

А.Л. Делицын, Д.А. Гребеньков 21

Дисперсионные кривые и проблема резонансного возбуждения волноводов с анизотропным заполнением

А.Л. Делицын, И.К. Трошина 23

Обратная задача восстановления характеристик мета-атома по измеренным значениям прохождения и отражения метапленки

Ж.О. Домбровская, А.В. Журавлев, Г.В. Белокопытов, А.Н. Боголюбов 25

Моделирование дифракции на сложных объектах методом конечных элементов

Д.А. Коняев 28

Оптические частотные гребенки и платиконы в микрорезонаторах с нормальной дисперсией групповой скорости

В.Е. Лобанов, Г.В. Лихачев, М.Л. Городецкий 32

Влияние внешнего магнитного поля на доменный транспорт в полупроводниковой наноструктуре

*В.В. Макаров, В.А. Максименко, А.О. Сельский, А.Е. Храмов, А.А. Короновский,
А.Г. Баланов* 325

Применение показателей Ляпунова для анализа дискретно-непрерывных систем со сложной динамикой	
<i>В.А. Максименко, В.В. Макаров, А.Е. Храмов, А.А. Короновский, К.Н. Алексеев, А.Г. Баланов</i>	38
Моделирование транспорта заряда в цепочке полупроводниковых периодических наноструктур, разделенных сильнолегированными областями	
<i>В.А. Максименко, В.В. Макаров, А.Е. Храмов, А.А. Короновский, К.Н. Алексеев, А.Г. Баланов</i>	41
Математическое исследование особенности электромагнитного поля волновода в окрестности ребра диэлектрического клина	
<i>И.Е. Могилевский</i>	44
Численное моделирование волновых процессов в связанных структурах на основе магнитных кристаллов	
<i>М.А. Морозова, Е.Н. Бегинин, А.Ю. Шараевская</i>	48
Математическое моделирование дифракции электромагнитного поля в компактном полигоне	
<i>А.В. Никитенко, А.Н. Боголюбов</i>	51
Применение гибридных численных методов для решения задач анализа и синтеза многослойных дифракционных решеток	
<i>А.А. Петухов</i>	54
Математическое моделирование задач маскировки с помощью метода волнового обтекания	
<i>В.В. Ровенко, И.Е. Могилевский</i>	56
Геометрическая фаза и метод катящегося конуса Могена-Пуанкаре	
<i>И.В. Тимофеев, В.А. Гуняков, В.С. Сутормин, С.А. Мысливец, Н.В. Рудакова, В.Г. Архипкин, С.Я. Ветров, В. Ли, В.Я. Зырянов</i>	60
Математическое моделирование рассеяния на рефлекторе коллиматора	
<i>Ф.Б. Хлебников, Н.Е. Шапкина</i>	65
Расчет собственных мод трехззорного резонатора со скругленными углами	
<i>А.В. Шкитин, А.Н. Боголюбов, А.И. Ерохин</i>	68

Квазиволны в нелинейной активной среде, компьютерное моделирование

А.А. БЫКОВ

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет
abkov@yandex.ru

1. Введение. Мы рассматриваем в данной работе квазиволны в нелинейных активных средах. Для определенности, будем трактовать изучаемый процесс как процесс генерации и распространения тепла за счет некоторой реакции. Квазиволна (КВ) есть решение квазилинейного или нелинейного эволюционного уравнения в нелинейной среде, обеспечивающей (1) источник тепла за счет реакции некоторых веществ, присутствующих изначально в рассматриваемой области, (2) накопление тепла за счет теплоемкости среды, причем коэффициент теплоемкости зависит от концентрации, (3) изменение (уменьшение или увеличение) плотности веществ, участвующих в реакции, (4) диффузионный перенос тепла, (5) нелокальный перенос тепла за счет излучения, (6) радиационный обмен с окружающей средой. Таким образом, мы рассматриваем систему эволюционных уравнений

$$\rho u_t = (\mathcal{G}u_x)_x + \int_G G(x, \xi) u(\xi) d\xi + \sum_m \gamma_m f_m(u, v_1, \dots, v_n), \quad (1)$$

$$(v_m)_t = -f_m(u, v_1, \dots, v_n), \quad m = 1, \dots, n, \quad (2)$$

$$\rho = \beta_0(u) v_0(x) + \sum_m \beta_m(u) v_m, \quad (3)$$

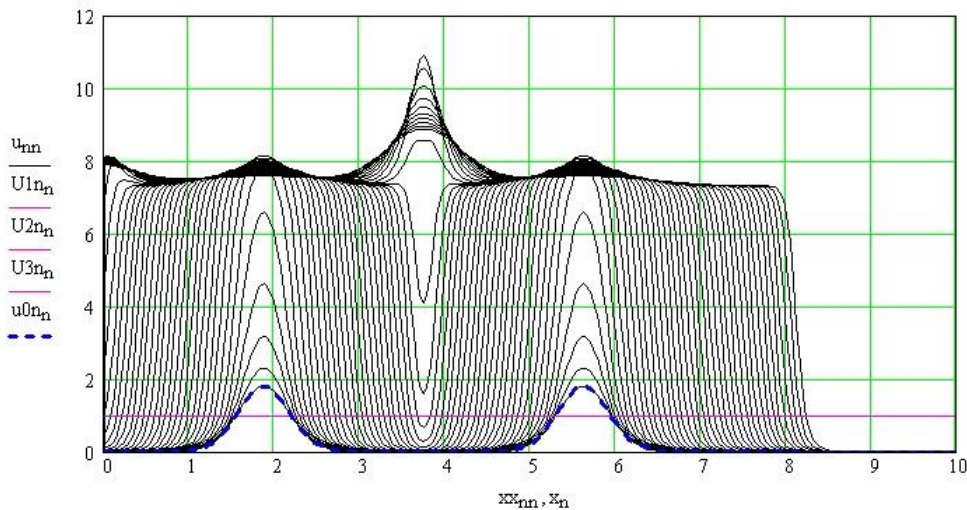


Рис. 1. Семейство мгновенных снимков профиля температуры.

где $u(x, t)$ – температура вещества, $v_m(x, t)$ – концентрация m -й реагирующей компоненты, $v_m \geq 0$, $v_0(x)$ – концентрация пассивной (не участвующей в реакции) компоненты вещества, $v_0 > 0$, $\rho(x, t)$ – теплоемкость вещества, $\beta_0(u)$ – удельная теплоемкость пассивной компоненты, $\beta_m(u)$ – удельная теплоемкость m -й активной компоненты, $\mathcal{G}(v_0, v_1, \dots, v_n)$ – коэффициент теплопроводности, $f_m(u, v_1, \dots, v_n)$ –

интенсивность реакции m -й компоненты, γ_m —тепловой поток от m -й компоненты, $G(x, \xi)$ —коэффициент радиационного теплообмена. Уравнение (1) описывает изменение температуры, обусловленное диффузией, нелокальным (радиационным) теплообменом, а также каждым типом протекающих реакций. Уравнения (2) описывают изменение плотности каждой реагирующей компоненты, причем плотность пассивной компоненты считается константой во времени, (3) дает выражение полной теплоемкости через парциальные теплоемкости каждой компоненты. Отметим, что система (1-3) позволяет адекватно описать, например, распространение лесного пожара, горение смеси, детонацию и т.п. Мы не включаем уравнения динамики, считая скорость механического перемещения среды заданной. Для исследования задачи (1-3) мы используем компьютерный код, основанный на конечно-разностной аппроксимации каждого уравнения, обеспечивающей на дискретном уровне точное выполнение законов сохранения вещества и энергии.

2. Квазиволны в среде с одной реагирующей компонентой. Рассмотрим модель, включающую одну пассивную и одну активную компоненты,

$$(\beta_0 v_0 + \beta_1 v_1) u_t = (\mathcal{D}u_x)_x + \gamma f(u, v), \quad v_t = -f(u, v), \quad (4)$$

используем широко распространенные [1] степенные аппроксимации интенсивности реакции, $f(u, v) = (u - u_0)^\eta$ при $u > u_0$, $f(u, v) = 0$ при $u \leq u_0$, где u_0 —пороговая температура реакции горения. На рис.1 показан процесс распространения КВ в среде для $\eta = 1$ и $\nu = 1$, показан профиль температуры. Показан также процесс образования нескольких КВ из двух заданных в начальный момент времени всплесков температуры. В правой части рисунка можно видеть фронт КВ, движущийся направо. На рис.2 виден фронт той же КВ для концентрации активной компоненты. В начальный момент времени концентрация активной компоненты была равна 1 во всей области.

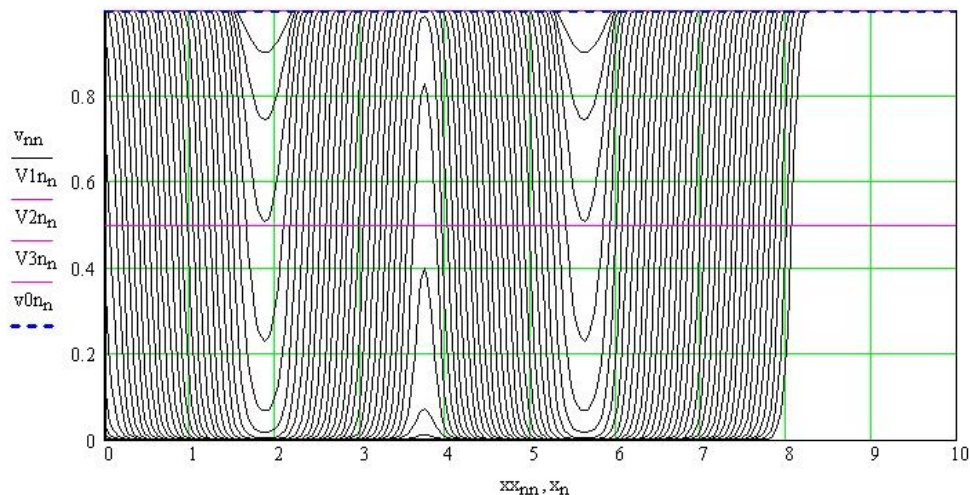


Рис. 2. Семейство мгновенных снимков профиля концентрации активной компоненты.

Расчет скорости дрейфа W квазиволны приводит к краевой задаче для функций $u(x, t) = U(x - Wt)$, $v(x, t) = V(x - Wt)$,

$$-W(\beta_0 v_0 + \beta_1 v_1) U_x = (\mathcal{G} U_x)_x + \gamma f(U, V), \quad -W V_x = -f(U, V), \quad (5)$$

с граничными условиями $U(+\infty) = 0$, $U(-\infty) = U_0$, $V(-\infty) = 0$, $V(+\infty) = V_0$. Из задачи для одного уравнения второго порядка и одного уравнения первого порядка с четырьмя граничными условиями находятся две величины, U_0 и W . Заметим, что U_0 может быть явно найдена из закона сохранения энергии. Для решения нелинейной задачи на собственные значения мы используем метод стрельбы. Можно доказать, что эта задача имеет единственное решение при некоторых достаточно общих условиях на параметры.

3. Взаимное разрушение двух квазиволн при столкновении. В одномерной задаче возможно распространение множества КВ в двух направлениях. Разрушение происходит при столкновении КВ с границей или при столкновении двух КВ, движущихся навстречу. При столкновении совместное действие диффузии приводит к всплеску температуры, что может быть важно на практике. Процесс разрушения при столкновении также показан на рис.1 и рис.2. После быстрого разрушения столкнувшихся КВ, сопровождающегося быстрым всплеском температуры, происходит медленное диффузионное рассасывание всплеска.

3. Квазиволны в среде с нелокальным радиационным переносом. Рассмотрим модель $(\beta_0 v_0 + \beta_1 v_1) u_t = (\mathcal{G} u_x)_x + \int_a^b G(x, \xi) u(\xi) d\xi + \gamma f(u, v)$, $v_t = -f(u, v)$, для среды с экспоненциальным экранированием, $G(x, \xi) = d^{-1} e^{-|x-\xi|/d}$, включающую одну пассивную и одну активную компоненты,

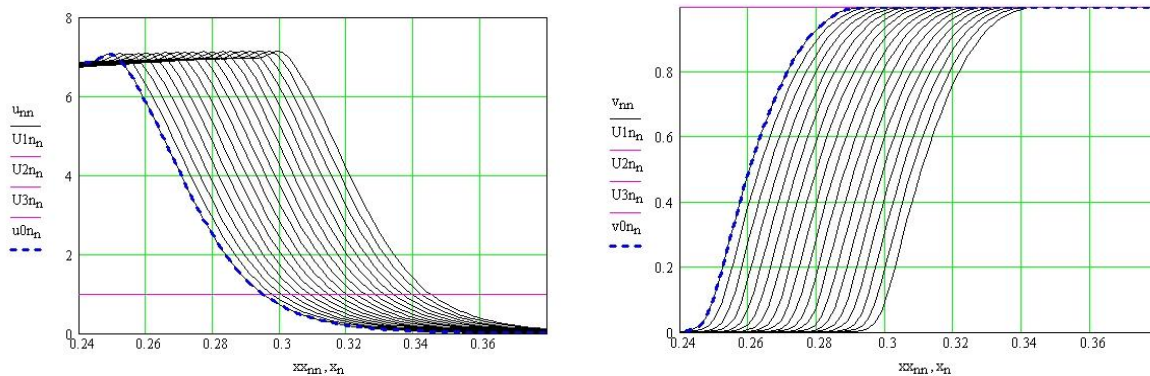


Рис. 3. Семейство мгновенных снимков профилей температуры и концентрации активной компоненты.

Рис.3 показывает, что в этом случае имеется эффект выброса на заднем фронте КВ, амплитуда которого определяется средней дистанцией экранирования d , показателем степени плотности источников η , и другими параметрами. Для задачи радиационного переноса, так же как для диффузионного переноса, можно составить задачу на собственные значения. Но теперь получим интегро-дифференциальное нелинейное уравнение, которое может быть эффективно решено итерационным методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я.Б. Зельдович и др. “Математическая теории горения и взрыва” М.: Наука, 1980.

Метод гомотопии и метод Галеркина для расчета направляемых мод поперечно неоднородных волноводов

А.А. Быков

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет
abkov@yandex.ru

1. Введение. Задача расчета собственных волн поперечно неоднородных волноводов привлекает к себе внимание на протяжении нескольких десятилетий. Разработаны и обоснованы методы конечных разностей, конечных элементов, вариационные, проекционные, интегральных уравнений, разделения переменных, частичных областей и другие. Практически всегда поиск собственной моды включает два этапа, (1) составление и решение характеристического уравнения, (2) расчет профиля, фазовых и энергетических характеристик найденной моды. Таким образом, на этапе решения характеристического уравнения профиль волны неизвестен, так что поиск волны заданной структуры требует апостериорного анализа свойств волны, соответствующей найденному корню. Заметим, что вариационные методы требуют нахождения всех волн низшего порядка для поиска волны заданной структуры. В данной работе мы предлагаем метод, который позволяет найти моду заданной пространственной структуры.

2. Метод гомотопии. В данной работе мы рассмотрим проблему поиска волны заданной структуры при условии наличия большого количества мод различной структуры. Запишем задачу поиска собственной моды в виде $L(\gamma)u = 0$, где L есть оператор краевой задачи на собственные значения, определение которого включает как дифференциальные уравнения, выводимые из уравнений Максвелла, так и условия сопряжения полей на границах раздела диэлектриков и на металлических проводящих или резистивных поверхностях. Здесь γ есть спектральный параметр, который требуется найти из условия существования нетривиального решения. Обычно γ есть продольное волновое число, вообще говоря, комплексное. Проблема в том, что характеристическое уравнение $|A(\gamma)| = 0$ может иметь много корней, и заранее неясно, какой из корней соответствует интересующей нас моде. Здесь $|A(\gamma)|$ есть определитель характеристической матрицы, составленной тем или иным методом. Предлагаемый в данной работе метод гомотопии состоит в том, что мы погружаем задачу $L(\gamma)u = 0$ в семейство краевых задач на собственные значения

$$M(\gamma, \tau)u = 0, \quad (1)$$

где $\tau \in [0;1]$ есть параметр гомотопии. Операторную функцию $M(\gamma, \tau)$ выберем так, чтобы было верным равенство $M(\gamma, 1) = L(\gamma)$, а уравнение $M(\gamma, 0)u = 0$ имело легко вычисляемые характеристические числа $\gamma_j(0) = \gamma_{j0}$. Соответствующие нетривиальные решения $u_j(x, 0) = u_{j0}(x)$ допускают классификацию в соответствии с выбранным признаком селекции. Далее мы строим гладкие функции $\gamma_j(\tau)$, для каждой из которых $M(\gamma_j(\tau), \tau)u_j(\tau) = 0$, причем $\gamma_j(0) = \gamma_{j0}$. Таким образом, решением поставленной задачи будет $\gamma_j(1)$ и $u_j(1)$. Теоретически, эти условия допускают

значительный произвол при выборе расширения операторной функции $L(\gamma) \rightarrow M(\gamma, \tau)$. Однако, обоснование метода получается наиболее полным для случая, когда операторная функция $M(\gamma, \tau)$ соответствует задаче поиска собственных волн волновода, боковая поверхность которого или профиль показателя преломления зависят от параметра гомотопии так, что при $\tau = 0$ заданный волновод трансформируется в прямоугольный или цилиндрический круговой волновод с однородным заполнением, собственные моды которого находятся аналитически.

3. Гомотопия в задаче с кусочно-константной диэлектрической проницаемостью. Мы проиллюстрируем метод с помощью простой задачи о собственных волнах планарного диэлектрического волновода, а затем сформулируем обобщенный метод гомотопии в комбинации с методом Галеркина.

Рассмотрим задачу поиска собственных мод планарного волновода,

$$u_{xx} + u_{yy} + k_0^2 \varepsilon(x) u = 0, \quad u(x, y) = v(x) e^{i\tau y}, \quad u(0, y) = 0, \quad u(b, y) = 0. \quad (2)$$

Для $v(x)$ получим задачу $v_{xx} + k_0^2 \varepsilon(x) v - \gamma^2 v = 0$, $v(0) = v(b) = 0$. Пусть $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) = \varepsilon_{10}$ при $0 < x < b_1$, $\varepsilon(x) = \varepsilon_2(x) = \varepsilon_{20}$ при $b_1 < x < b$. Введем параметр гомотопии: $\varepsilon_1(x, \tau) = \varepsilon_{10}$ при $0 < x < b_1$, $\varepsilon_2(x, \tau) = \varepsilon_{10} + \tau(\varepsilon_{20} - \varepsilon_{10})$ при $b_1 < x < b$. При $\tau = 0$ получим $\gamma_{j0} = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_{10} - (\pi j/b)^2}$, $v_{j0}(x) = \sin(\pi j x/b)$.

Характеристическое уравнение имеет вид $|A(\gamma, \tau)| = 0$, где $a_{11} = \sin(q_1 d_1)$, $a_{12} = \sin(q_2 d_2)$, $a_{21} = q_1 \cos(q_1 d_1)$, $a_{22} = -q_2 \cos(q_2 d_2)$, $d_1 = b_1$, $d_2 = b - b_1$.

Дифференцированием по τ , получим задачу Коши $d\gamma/d\tau = -S_2(\gamma, \tau)/S_1(\gamma, \tau)$, где $S_{1,2}(\gamma, \tau)$ есть функции от γ , параметра гомотопии τ , а также от параметров, задающих свойства волновода, в данном случае ε_{10} , ε_{20} , b_1 , b_2 и их производных по τ . Явные выражения приводить не будем, покажем пример реализации метода: Для $\varepsilon_{10} = 2$, $\varepsilon_{20} = 4$, $b_1 = 3$, $b_2 = 2$ получим такую зависимость $\gamma(\tau)$ (рис.1). На рис.1 показана также точность решения характеристического уравнения как функция от параметра гомотопии. Этот рисунок показывает, что решение дифференциального уравнения для $\gamma(\tau)$ позволяет получить корни характеристического уравнения с точностью, соответствующей погрешности округления ПЭВМ. Мы взяли начальные условия, соответствующие третьей по счету моде с двумя корнями внутри волновода.

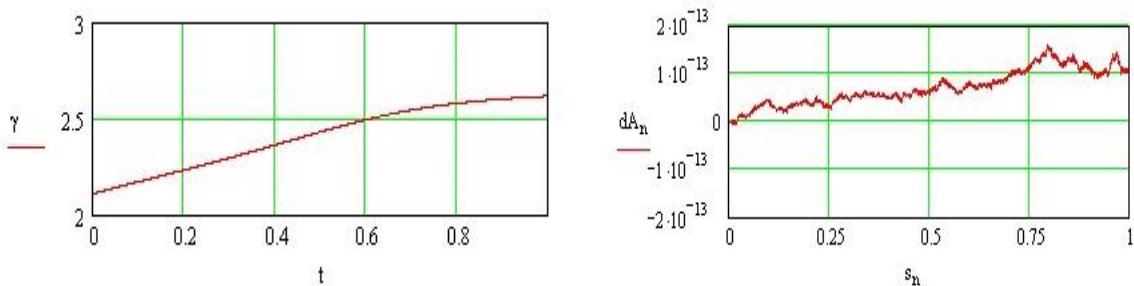


Рис. 1. Зависимость продольного волнового числа от параметра гомотопии, точность.

4. Гомотопия и метод Галеркина для задачи о собственных волнах планарного волновода с неоднородным диэлектрическим заполнением. Теперь сформулируем метод, основанный на сочетании метода гомотопии и метода Галеркина для одномерной задачи. Решение краевой задачи на собственные значения

$$u_{xx} + u_{yy} + k_0^2 \varepsilon(x, \tau) u = 0, \quad u(x, y, \tau) = v(x, \tau) e^{i\gamma(\tau)y}, \quad u(0, y, \tau) = 0, \quad u(b, y, \tau) = 0, \quad (3)$$

будем искать в виде

$$v^{(n)}(x, \tau) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) C_k(\tau), \quad \varphi_k(x) = \sqrt{2/b} \sin \pi k x / b, \quad (4)$$

более коротко $V^{(n)}(x, \tau) = \Phi^T(x) C(\tau)$, где $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))^T$, $C(\tau) = (C_1(\tau), \dots, C_n(\tau))^T$. Предполагаем, что при $\tau = 0$ функция $\varepsilon(x, 0)$ есть константа, так что начальные условия гомотопии определяются из явного решения уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Используя метод Галеркина [1], получим линейную однородную алгебраическую систему (задачу на собственные значения)

$$k_0^2 \langle \Phi | \varepsilon | \Phi \rangle C - M^2 C = \gamma^2 C, \quad (5)$$

где $\langle \Phi | \varepsilon | \Phi \rangle_{m,k} = \int_0^b \varphi_m(x) \varepsilon(x, \tau) \varphi_k(x) dx$. Дифференцирование (5) дает

$$k_0^2 \langle \Phi | \varepsilon | \Phi \rangle \frac{dC}{d\tau} - M^2 \frac{dC}{d\tau} - \gamma^2 \frac{dC}{d\tau} = 2\gamma \frac{d\gamma}{d\tau} C - k_0^2 \left\langle \Phi \left| \frac{d\varepsilon}{d\tau} \right| \Phi \right\rangle C. \quad (6)$$

Так как однородная система (6) имеет нетривиальное решение (5), то условие разрешимости системы (6) в соответствии с теоремой Фредгольма имеет вид $C^T 2\gamma d\gamma/d\tau C - k_0^2 C^T \langle \Phi | d\varepsilon/d\tau | \Phi \rangle C = 0$, откуда получим дифференциальное уравнение для нахождения $\gamma(\tau)$:

$$d\gamma/d\tau = (2\gamma C^T C)^{-1} k_0^2 C^T \langle \Phi | d\varepsilon/d\tau | \Phi \rangle C. \quad (7)$$

Уравнение (7) следует дополнить начальным условием, которое получается так же, как в предыдущем параграфе, обсуждать его не будем. Заметим, что задача Коши для $C(\tau)$ получается из (6) и имеет вид $dC/d\tau = F(C, \gamma, \tau) + \nu(\tau)C$, причем $\nu(\tau)$ есть произвольная гладкая функция, которую можно выбрать из условия заданного нормирования собственной моды. На рис.2 показано семейство профилей собственных мод с двумя корнями на интервале $(0, b)$ для нескольких значений параметра гомотопии (более точно, $\tau = 0; 0,1; \dots; 0,9; 1$). Рис.2 показывает, что метод гомотопии позволяет получить волну заданного типа, используя начальные данные в виде волны того же типа.

Теорема. Пусть $\varepsilon(x, \tau)$ есть дифференцируемая функция в прямоугольнике $\tau \in [0; 1]$, $x \in [0, b]$ за исключением, может быть, конечного числа гладких кривых вида $x = x(\tau)$, на которых эта функция разрывна, но имеет конечный предел по каждую сторону от кривой. Тогда найдется такой интервал $\tau \in [0, \tau_0]$, $0 < \tau_0 \leq 1$, на котором

задача Коши (7) имеет единственное решение. В точке τ_0 функция $\gamma^2(t)$ обращается в нуль и меняет свой знак.

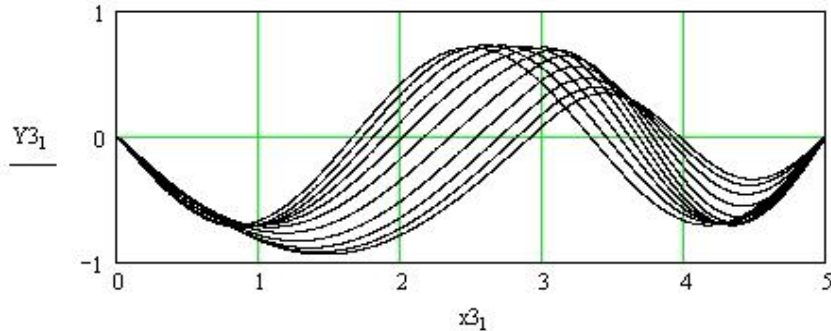


Рис. 2. Семейство профилей направляемых мод при деформации волновода типа гомотопии

5. Гомотопия и неполный метод Галеркина для задачи о собственных волнах цилиндрического волновода с неоднородным диэлектрическим заполнением.

Решение краевой задачи на собственные значения

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + k_0^2 \varepsilon(x, y, \tau) u = 0, \quad u(x, y, z, \tau) = v(x, y, \tau) e^{i\gamma(\tau)z}, \quad u|_{\Gamma}(x, y, z, \tau) = 0, \quad (8)$$

или аналогичной векторной задачи для компонент полей будем искать в виде

$$v^{(n)}(x, y, \tau) = \sum_{k=1}^n \psi_k(y) C_k(x, \tau). \quad (9)$$

Коэффициенты суммирования найдем из семейства проекционных соотношений,

$$\int_0^b \psi_m(y) (v_{xx} + v_{yy} - \gamma^2 v + k_0^2 \varepsilon v) dy = 0, \quad 0 < x < b, \quad 1 \leq m \leq n. \quad (10)$$

Подставив (9) в (10) и используя ортогональность координатной системы, получим краевую задачу на собственные значения для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$k_0^2 \langle \Psi | \varepsilon | \Psi \rangle C + \Psi \Psi^T C_{xx} - M^2 C = \gamma^2 C, \quad 0 < x < b, \quad C(0) = C(b) = 0 \quad (11)$$

(или условия второго рода, или условия третьего рода для открытых волноводов). Гомотопия проводится по параметру $\tau \in [0; 1]$. Дифференцирование (11) по τ приводит к системе

$$(C_\tau)_{xx} + k_0^2 \langle \Psi | \varepsilon | \Psi \rangle C_\tau - M^2 C_\tau - \gamma^2 C_\tau = 2\gamma\gamma_\tau C - k_0^2 \langle \Psi | \varepsilon_\tau | \Psi \rangle C. \quad (12)$$

Соответствующая однородная система имеет нетривиальное решение (11), поэтому система (12) разрешима при условии ортогональности правой части нетривиальному решению системы (11). Это даст обыкновенное дифференциальное уравнение для нахождения $\gamma(\tau)$, выписывать которое мы уже не будем. В докладе приводятся также детали реализации и численные результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. М.К. Гавурин “Численные методы” М.: Наука, 1971.
2. А.Г. Свешников. // ЖВИиМФ. 1963. V. 3. No 2. P. 314.

Сеточные методы решения задач с пограничным слоем

А.А. Белов^{1,2}, Н.Н. Калиткин²

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет

²Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

belov_25.04.1991@mail.ru, kalitkin@imamod.ru

В электродинамике существует ряд важных прикладных задач, в которых возникают пограничные слои на границе раздела двух сред. Примерами являются скалярная задача дифракции на металлических поверхностях, поверхностный индукционный нагрев при закалке стальных деталей, диффузия магнитного поля в сжимающую оболочку в магнитокумулятивных генераторах сверхсильных полей. В этих случаях внешнее поле лишь неглубоко проникает внутрь области G , у границы которой Γ возникает скин-слой.

Задачи скин-слоя описываются уравнением диффузии с малым параметром

$$\mu^2 \operatorname{div}(k(\mathbf{r}) \operatorname{grad} u) - \kappa(\mathbf{r})u = -f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in G, \kappa(\mathbf{r}) > 0 \quad (1)$$

где внешняя среда заменяется постановкой граничных условий на Γ , а $\mu \ll 1$. В решении (1) обычно выделяют узкий пограничный слой ширины $\sim \mu$ и регулярную внутреннюю часть. Из-за малости μ численный расчет таких задач традиционно считается трудным.

В докладе отмечается, что 1) серьезную трудность представляет также переходная зона между пограничным слоем и регулярной частью решения; 2) такие задачи можно единообразно решать сеточными методами, если строить адаптивную сетку, содержащую достаточно много узлов в каждом из отмеченных участков решения; 3) можно строить алгоритм с гарантированной (асимптотически точной) оценкой математической погрешности, если использовать адаптивные сетки и многосеточный метод Ричардсона для оценки погрешности. Для сравнения заметим, что многочисленные пакеты-решатели оценок таких оценок точности не содержат.

Предлагаемый метод включает следующие этапы. 1) Строится бесконечно гладкая производящая функция адаптивной сетки, обеспечивающая приблизительно одинаковое число узлов сетки в пограничной, переходной и регулярной зонах. Это позволяет построить последовательность вложенных друг в друга квазиравномерных сеток с удваивающимся числом N интервалов по каждой переменной. 2) На полученных сетках строится разностная схема. Наилучшие результаты дают консервативные схемы (в зарубежной литературе их иногда называют нейтральными). 3) На каждой сетке решают полученную систему линейных алгебраических уравнений. На произвольных сетках это можно делать методами типа сопряженных градиентов; на прямоугольных сетках существует гораздо более быстрые методы. 4) Сравнивая решения на соседних вложенных сетках, методом Ричардсона получают апостериорную асимптотически точную (тем самым, строгую и неулучшаемую) оценку погрешности.

Численные примеры показывают, что в областях простой формы (прямоугольник) можно уверенно решать задачи даже с очень малым $\mu \sim 10^{-7}$. При этом можно получать высокую относительную точность $\sim 10^{-3} \div 10^{-5}$ на всех участках решения, используя довольно скромные сетки $N \sim 200 \div 500$ узлов по каждой переменной.

Проиллюстрируем этот подход на примере задачи (1) в квадрате $x \in [-1, 1]$, $y \in [-1, 1]$ при

$$k(x, y) = 1, \quad \kappa(x, y) = 1 \quad (2)$$

$$f(x, y) = \cos\left(\frac{\pi}{4}(x+y)^2\right) \cos\left(\frac{3\pi}{4}(y-x)\right) \quad (3)$$

$$u(x, y) = 2.5(x+y) \quad (4)$$

На рис. 1 а) показано сечение решения по диагонали квадрата. Отчетливо видны узкий пограничный слой, переходная зона и регулярная часть решения, содержащие примерно одинаковое число узлов сетки. На рис. 1 б) приведена зависимость погрешности от N для различных значений μ в двойном логарифмическом масштабе. Эти линии выходят на прямые с наклоном 2; это подтверждает, что используемая консервативная схема имеет второй порядок точности. Видно также, что даже для очень тонких слоев можно получить хорошую точность на достаточно скромных сетках.

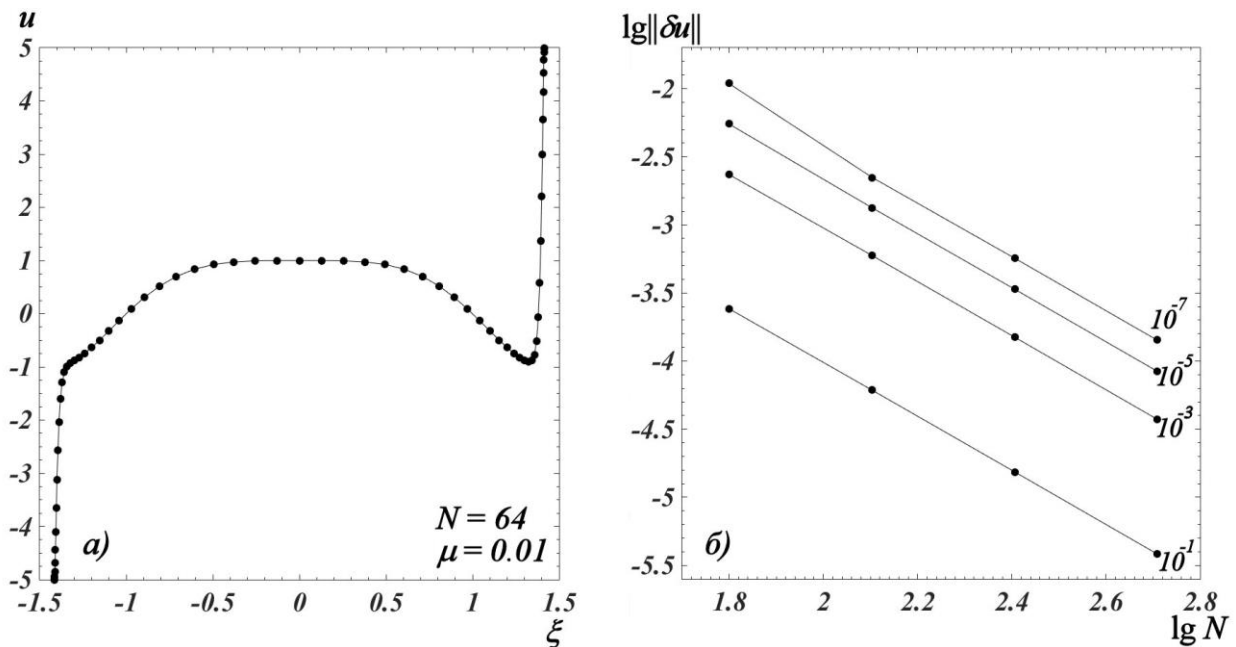


Рис. 1. а) Решение задачи (2) – (4) для $\mu = 10^{-2}$ (сечение плоскостью $x = y$); б) Погрешности по методу Рундсона, цифры около линий – значения μ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Н. Калиткин // ДАН. Т. 402. № 4. С. 467-471.
2. А.А. Болтнев, Н.Н. Калиткин, О.А. Качер // ДАН. Т. 404. № 2. С. 177.
3. Н.Н. Калиткин, А.А. Белов // ДАН. Т. 452. № 3. С. 261.
4. А.А. Белов, Н.Н. Калиткин // Матем. моделирование. Т. 26. № 9. С. 47.
5. А.А. Белов, Н.Н. Калиткин. Эволюционная факторизация и сверхбыстрый счет на установление. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Препринт № 69 за 2013 год.
6. Н.Н. Калиткин, А.Б. Альшин, Е.А. Альшина, Б.В. Рогов “Вычисления на квазиравномерных сетках” М.: Физматлит, 2005.
7. Н.Н. Калиткин, П.В. Корякин. Численные методы (в двух книгах). Книга 2. Методы математической физики. М.: Академия, 2013.

Математическое моделирование волноведущих систем

А.Г. Свешников, А.Н. Боголюбов, Н.А. Боголюбов, А.Л. Делицын
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
bogan7@yandex.ru

Одним из первых исследователей волноведущих систем был лорд Дж. У. Рэлей, который изучал акустические волны в органических трубах. Эти исследования были выполнены в конце XIX века на чисто физическом уровне строгости.

Начало строгой математической теории волноведущих систем было положено в 1947-1948 годах классическими работами А.Н.Тихонова и А.А.Самарского. В опубликованной в 1947 году работе «О возбуждении радиоволноводов», вышедшей в двух частях в «Журнале технической физики» [1],[2], для уравнения Гельмгольца в цилиндрической области была впервые построена функция Грина и выделена ее особенность, что потребовало доказательства полноты системы собственных функций регулярного волновода. Проведенные фундаментальные исследования послужили основой для создания строгой математической теории возбуждения регулярных радиоволноводов произвольным распределением заданного тока. В опубликованной в 1948 году в «Журнале технической физики» работе «О представлении поля в волноводе в виде суммы полей ТЕ и ТМ» [3] было строго доказано, что любое электромагнитное поле в регулярном волноводе в области свободной от внешних зарядов и токов может быть представлено в виде суперпозиции поперечномагнитных и поперечноэлектрических волн ТМ и ТЕ полей, каждое из которых можно описать в виде краевой задачи для скалярного уравнения Гельмгольца. Эти результаты позволили П.Е.Краснушкину ввести понятие нормальной волноводной волны (или моды), нашедшее широкое применение в дальнейшем развитии теории радиоволноводов [4].

Можно сказать, что после фундаментальных работ А.Н.Тихонова, А.А.Самарского, В.Г.Кисунько, П.Е.Краснушкина, Де Бройля и ряда других ученых высокочастотная электродинамика волноведущих систем из чисто технической области радиофизики превратилась в бурно развивающуюся строгую математическую теорию, определившую новое научное направление в математической физике.

Наряду с теорией регулярных волноводов, то есть однородных по длине прямолинейных волноводов постоянного сечения, в конце сороковых - начале пятидесятых годов появились работы по развитию методов расчета влияния различных плавных нерегулярностей в волноводе на распространяющуюся в нем основную волну - моду. Расчет волноводов данного класса потребовал разработки специальных математических методов.

Одним из первых методов расчета волноводов с плавными нерегулярностями явился метод поперечных сечений предложенный в 1955 году в работах С.А.Щелкунова и П.Е.Краснушкина [4]. Следует отметить, что в работах по применению метода поперечных сечений обоснование сходимости этого метода и возможности решения краевых задач для полученных бесконечных систем уравнений методом редукции было проведено на физическом уровне строгости лишь для случая слабо нерегулярных волноводов.

Основной трудностью реализации метода поперечных сечений является необходимость на каждом шаге численно решать спектральную задачу, что сильно снижает его эффективность. Этот недостаток был преодолен в начале 60-х годов в предложенном А.Г.Свешниковым неполном методе Галеркина [5].

В докторской диссертации А.Г.Свешникова «Методы исследования распространения колебаний в нерегулярных волноводах», защищенной в 1963 году, были развиты эффективные алгоритмы исследования волноведущих систем, основанные на разработанных им проекционных методах решения широкого круга задач математической физики, возникающих при математическом моделировании радиоволноводов и в теории дифракции в неоднородных средах. Однако в отличие от большинства работ, посвященных исследованию нерегулярных волноводов, переход осуществляется не к бесконечной системе, а, пользуясь основной идеей метода Галеркина, к конечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Это позволило провести строгое математическое доказательство сходимости метода при условиях значительно более общих, чем удавалось сделать в случае сведения задачи к бесконечной системе уравнений. А.Г.Свешниковым был предложен общий принцип формулировки проекционных соотношений неполного метода Галеркина, при котором имеет место сходимость метода в энергетических нормах операторов с разрывными коэффициентами.

Основная сложность численной реализации неполного метода Галеркина заключается в необходимости решать жесткую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, что приводит к необходимости использовать различные достаточно трудоемкие специальные методы, в частности, метод направленной ортогонализации, разработанный и успешно реализованный А.А.Быковым [4]

Одним из самых мощных и универсальных методов численного решения задач расчета волноведущих систем со сложной геометрией и сложным, в частности, киральным заполнением является метод конечных разностей (МКР). основополагающими работами в области метода конечных разностей являются работы А.А.Самарского [4].

Для расчета волноведущих систем метод конечных разностей применялся вначале весьма ограниченно. Однако с середины семидесятых годов прошлого века появился ряд работ, посвященных исследованию нерегулярных диэлектрических и метало-диэлектрических волноводов методами конечных разностей в прямой и вариационной постановках (метод конечных элементов).

Можно выделить два класса стационарных задач, методика применения метода конечных разностей для которых совершенно различна. Первый класс – это задачи возбуждения, заключающиеся в расчете неоднородных по длине волноведущих систем, таких как ответвители, согласующие переходы, изгибы, волноводные трансформаторы и т.д.. Второй класс – это спектральные задачи, заключающиеся в расчете однородных по длине волноведущих систем с неоднородной геометрией поперечного сечения и произвольным изменением свойств заполняющей среды в поперечном направлении.

При решении нестационарных задач расчета волноведущих систем существенное значение имел базовый алгоритм метода конечных разностей во временной области для решения задач электродинамики, который был впервые предложен американским ученым Кейном Йе в 1966 г. Непосредственное использование алгоритма Йе для расчета волноведущих систем с различными вставками на основе метаматериалов связано с определенными трудностями. Для вычисления нестационарных полей в би-изотропных средах Алким Акиюуртлу предложила новый вариант метода конечных разностей во временной области - метод BI-FDTD, основанный на аддитивном разложении волнового поля [4].

Метод конечных элементов (МКЭ) завоевал всеобщее признание как весьма эффективный метод для решения самых разнообразных задач математической физики и техники. В своей основе метод конечных элементов является вариационным, или в

более широком плане, проекционным методом. Его возникновение связано с классическими работами Б.Г. Галеркина, И.Г. Бубнова и В. Ритца. Математические основы метода конечных элементов были сформулированы известным математиком Р. Курантом в 1943 году. Первые попытки применения метода конечных элементов к расчету волноведущих систем относятся к середине шестидесятых годов прошлого века. К этому времени техника этого метода была хорошо разработана, и он успешно применялся для решения граничных задач механики. В работах Берка, Куросавы, В.В. Никольского и других авторов были выписаны и исследованы вариационные функционалы для волноводов произвольного типа [4].

В методе конечных элементов используется слабая формулировка исходной задачи, когда искомое решение должно удовлетворять не дифференциальной краевой задаче, а некоторому интегральному соотношению. Исходная область, в которой ищется решение, разбивается на подобласти стандартного вида, в качестве которых используются, как правило, четырехугольники или треугольники. Решение локально аппроксимируется кусочно-полиномиальными функциями. Локальная аппроксимация решения аналогична разложению его по системе финитных базисных функций, носителями которых являются подобласти разбиения (конечные элементы). Для определения этих коэффициентов используется либо вариационный подход, когда коэффициенты находятся из условия минимизации функционала (методы типа Ритца), или проекционный подход, когда коэффициенты определяются из проекционных соотношений (метод типа Галеркина). В результате исходная задача сводится к системе алгебраических уравнений (СЛАУ) весьма высокого порядка с сильно разреженной матрицей, то есть к разностной схеме. Таким образом, проекционно-сеточные методы, как это и следует из их названия, являются комбинацией собственно проекционным методов и конечно-разностных (сеточных) методов.

Отметим, что получаемая при применении метода конечных элементов СЛАУ имеет ряд особенностей. Матрицы этих систем являются незнакоопределенными разреженными матрицами высокого порядка. До публикации диссертации Джемса Банча в 1969 году (Калифорнийский университет в Беркли) не существовало устойчивого алгоритма для обработки симметричных незнакоопределенных матриц [4].

Одним из перспективных подходов в плане применения метода конечных элементов к математическому моделированию волноведущих систем является использование суперэлементов. Этот метод был предложен в работах Л.Г. Страховой и Р.П. Федоренко более 25 лет назад и использовался для решения ряда сложных задач диффузии, теории упругости, кинетики ядерных реакций и в некоторых других областях. Отметим также метод атомарных функций, разработанный В.Ф.Кравченко и развитый в работах его учеников [4].

В процессе применения проекционно-сеточных методов к расчету волноведущих систем было выяснено, что не все решения, получаемые проекционно-сеточными методами, имеют физический смысл и соответствуют реально распространяющимся модам. Проблема борьбы с фиктивными решениями, называемыми часто «духами», является весьма актуальной и сложной [5].

При применении метода конечных разностей и ряда других методов возникает также проблема ограничения области, в которой ищется решение. Одним из наиболее удобных и экономичных методов является использование эффективных интегральных граничных условий, которые ставятся на некоторой границе (виртуальной или точной), сводя исследуемую задачу к задаче в ограниченной области. В 50-х годах прошлого века А. Г. Свешниковым были введены парциальные условия излучения, которые в случае внешних задач дифракции на локальной неоднородности позволяют

редуцировать их к задачам в ограниченных областях с нелокальными граничными условиями [4]. Использование разностных аналогов парциальных условий излучения оказалось наиболее эффективным методом для построения численных алгоритмов решения данного класса задач.

Задачи синтеза волноведущих систем составляют специальный класс обратных задач математической физики. Они ставятся как задачи математического проектирования для определения основных характеристик синтезируемого объекта, при которых этот объект обладает требуемыми техническими и эксплуатационными характеристиками. Характерной особенностью задач синтеза является то, что в отличие от обратных задач распознавания в задачах синтеза, как правило, отсутствует требование единственности решения.

Методы решения задач синтеза волноведущих систем, особенно неоднородных диэлектрических и металло-диэлектрических волноводов, разработаны в гораздо меньшей степени, чем методы решения прямых задач анализа

Наиболее полный и универсальный подход к решению задач синтеза волноведущих систем заключается в рассмотрении таких задач как математически некорректных, с применением для их решения метода регуляризации А.Н.Тихонова. Такой подход был предложен в работах А.Г.Свешникова и А.С.Ильинского [7]. При этом используются вариационные постановки задач синтеза, когда строится оценивающий функционал и затем ищется его экстремум.

Особенностью рассматриваемой задачи синтеза, является то, что она представляет собой задачу с нелинейным и несамосопряженным оператором, для которой достаточно подробно исследован только случай квадратичной целевой функции. Большинство эффективных методов, используемых для минимизации функционала в рассматриваемом случае неприменимо. Одним из наиболее надежных и универсальных методов минимизации функционала при наличии ограничений, если нет дополнительной информации о свойствах минимизируемого функционала, является метод Нелдера-Мида, называемый также методом поиска по деформируемому многограннику [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. А.А. Самарский, А.Н. Тихонов // Журнал технич. физики. 1947. Т.27 № 11. С. 1283.
2. А.А. Самарский, А.Н. Тихонов // Журнал технич. физики. 1947. Т.27 № 12. С. 1431.
3. А.А.Самарский, А.Н. Тихонов // Журнал технич. физики. 1948. Т.28. № 7. С. 959.
4. А.Н.Боголюбов, Н.А.Боголюбов, А.Г.Свешников // Физические основы приборостроения. 2013. Т.2. №1. С. 10.
5. А.Г.Свешников // Журнал выч. мат. и мат. физ. 1963. Т. 3. № 1. С. 170.
6. А.Н. Боголюбов, А.Л. Делицын // Вестник Моск. ун-та. Серия 3. Физ. Астрон. 1996. Т. 37. № 1. С. 9-13.
7. Свешников А.Г., Ильинский А.С. Задачи проектирования в электродинамике // ДАН СССР. 1972. Т. 204. № 5. С. 1077.
8. А.Н. Боголюбов и др. // Математическое моделирование. 2000. Т. 12. № 1. С. 13.

Синтез слоистого кирально-диэлектрического волновода

Н.А. Боголюбов, Ю.В. Мухартова, И.А. Буткарев
Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова
russell67@yandex.ru

В настоящее время большие перспективы в высокочастотной электродинамике, волновой и интегральной оптике связывают с устройствами, построенными с использованием мезоскопических систем. Мезоскопические системы – это искусственно созданные структурированные материалы (метаматериалы) с характерными размерами структурных элементов от единиц до сотен нанометров.

Для произвольной линейной среды связывающие векторы электрического и магнитного полей материальные уравнения имеют следующий вид [1]:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \alpha_{11} \mathbf{E} + \alpha_{12} \mathbf{H}, \\ \mathbf{B} &= \alpha_{21} \mathbf{E} + \alpha_{22} \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (1)$$

Материальные параметры α_{11} , α_{22} , α_{21} и α_{12} зависят от выбора конкретной модели среды. Линейные среды общего вида называются би-анизотропными. Если материальные параметры являются скалярами или псевдоскалярами, то соответствующие среды носят название би-изотропных. Киральные среды характеризуются тремя параметрами: диэлектрической проницаемостью ϵ ($\alpha_{11} = \epsilon$), магнитной проницаемостью μ ($\alpha_{22} = \mu$) и параметром киральности χ ($\alpha_{12} = -\alpha_{21} = i\chi$). При стремлении параметра киральности к нулю среда вырождается в диэлектрик или магнетик.

Рассмотрим регулярный волновод прямоугольного сечения с идеально проводящей стенкой и слоистым кирально-диэлектрическим заполнением (рис. 1).

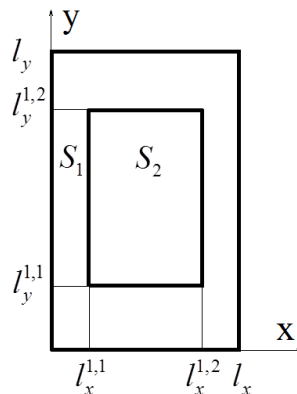


Рис.1. Поперечное сечение кирально-диэлектрического волновода

Задачи синтеза (математического проектирования) волноведущих систем составляют специальный класс обратных задач математической физики и состоят в определении таких значений оптимизационных параметров, определяющих геометрию данной волноведущей системы и свойства применяемого в ней материала заполнения, при которых данная система обладает требуемыми свойствами.

Наиболее полный и универсальный подход к решению задач синтеза волноведущих систем был предложен в работах А.Г. Свешникова и А.С. Ильинского [2]. Алгоритм основан на многократном решении прямой задачи с направленными изменяемыми оптимизационными параметрами. Такая методика решения задачи синтеза определяет структуру программы решения задачи синтеза, которая состоит из трех блоков: блока решения прямой задачи, блока оптимизации и вспомогательного блока. Построенная по данной методике программа обладает большой универсальностью, так как для перехода к решению новой задачи синтеза достаточно только заменить блок решения прямой задачи.

Поскольку в процессе решения задачи синтеза происходит многократное решение прямой задачи, то к алгоритму решения прямой задачи предъявляются весьма жесткие требования. Для решения прямой задачи используется алгоритм, основанный на методе конечных элементов с использованием лагранжевых элементов. Однако, как это хорошо известно, при использовании лагранжевых конечных элементов для расчета волноведущих систем при решении спектральных задач возможно появление не имеющих физического смысла посторонних решений, так называемых «духов», борьба с которыми сильно снижает эффективность используемых алгоритмов [3]. В работе [4] была предложена новая постановка спектральной краевой задачи, при применении которой с использованием лагранжевых конечных элементов для численного расчета не возникают нефизические решения.

Рассмотрим решение одной из весьма важных задач синтеза прямоугольного волновода с диэлектрической сердцевиной и киральной оболочкой, обладающего максимальной полосой одномодового режима. При данном режиме работы в волноводе существует только одна мода в частотном диапазоне от первой (основной) моды до второй (следующей) моды. Таким образом, в одномодовом режиме не существует межмодовой дисперсии, вносящей искажения в распространяемый по волноводу сигнал.

В оптимизационном блоке осуществляется решение задачи минимизации функционала:

$$F[\varepsilon] = \frac{A}{\Delta V_{cut\ off}} + \rho_1 \Phi[\varepsilon], \quad (2)$$

где $\Delta V_{cut\ off} = V_{cut\ off\ 2} - V_{cut\ off\ 1}$, $V_{cut\ off\ i}$ ($i = 1, 2$) — i -я частота отсечки, ρ_1 и ρ_2 — весовые множители, $\Phi[\varepsilon]$ — стабилизатор.

Поскольку рассматриваемая задача синтеза представляет собой задачу с нелинейным и несамосопряженным оператором, для которой достаточно подробно исследован только случай квадратичной целевой функции, то большинство эффективных методов, используемых для минимизации функционала в рассматриваемом случае неприменимо. В данной работе используется метод Нелдера-Мида, предложенного Нелдером и Мидом в 1964 году [5] и называемый также методом поиска по деформируемому многограннику. Метод Нелдера-Мида является развитием симплексного метода Спендли, Хекста и Химсфорта [6]. В случае отсутствия дополнительной информации о свойствах минимизируемого функционала этот метод является одним из наиболее надежных и универсальных методов минимизации функционала. Так как при решении рассматриваемой задачи синтеза встает вопрос о необходимости минимизации функционалов в ограниченных областях, в работе применяется основанный на методе Нелдера-Мида метод скользящего допуска,

позволяющий искать минимум при наличии ограничений на область, как в виде неравенств, так и в виде равенств.

Оптимизационная задача состоит в определении таких значений оптимизационных параметров, определяющих геометрию данного волновода и свойства применяемого в нем материала заполнения, при которых частотный диапазон одномодового режима будет максимальным. Причем предполагается, что оптимальный режим достигается при постоянных значениях параметров, определяющих физические свойства заполнения волновода. При решении задачи синтеза волокна с киральной оболочкой в качестве оптимизационных выбирались следующие параметры (см.

рис. 1): $\alpha_1 = l_x^{1,1} = l_x - l_x^{1,2}$; $\beta_1 = l_y^{1,1} = l_y - l_y^{1,2}$; $s_{12} = \chi$ — мнимая часть параметра киральности.

Проведенные численные эксперименты позволяют сделать следующие выводы.

- 1) Добиться решения рассматриваемой оптимизационной задачи получения максимальной полосы одномодового режима для чисто диэлектрического (без использования метаматериалов) волновода в однородной оболочке s_1 ($\epsilon_1 = 1,5$, $\epsilon_1 = 1,5$) при постоянных значениях параметров сердцевины волновода s_2 ($\epsilon_2 = 2,1$, $\epsilon_2 = 2,1$) возможно в том случае, когда сердцевина исчезает и получается однородное по сечению волокно со значением диэлектрической проницаемости, равной значению диэлектрической проницаемости оболочки.

Значительное увеличение частотной полосы одномодового режима в случае чисто диэлектрического заполнения можно добиться, если рассматривать волокно с переменными параметрами сердцевины, как это сделано в работе [7], посвященной синтезу градиентного волокна, обладающего максимальной полосой одномодового режима.

- 2) Аналогичные выводы можно сделать относительно волновода с би-изотропной сердцевиной s_2 и оболочкой s_1 из обычного диэлектрика при тех же значениях диэлектрических проницаемостей.
- 3) Наибольший эффект достигается для волновода, обладающего диэлектрической сердцевиной s_2 и би-изотропной оболочкой s_1 .

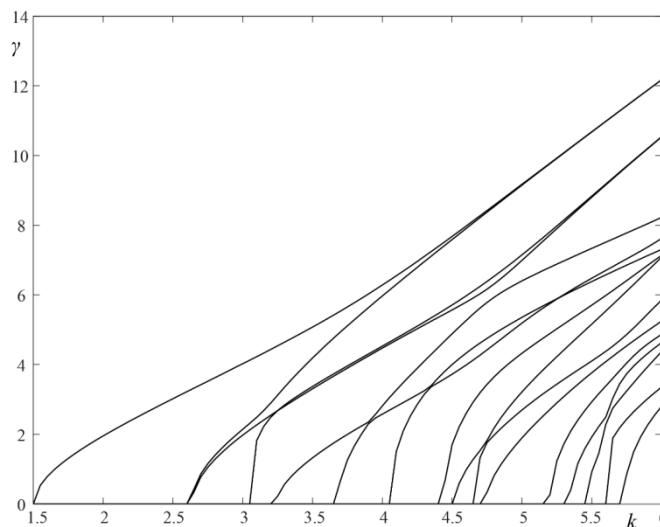


Рис. 2. Дисперсионные кривые трехслойного волокна кирал-диэлектрик-кирал типа «сэндвич».

ЛИТЕРАТУРА

1. Laszlo Solymar and Ekaterina Shamonina. "Waves in Metamaterials". Oxford University Press. 2009
2. А.Г. Свешников, А.С. Ильинский // ДАН СССР. 1972. Т.204. №5.С.1077.
3. А.Н. Боголюбов, Н.А. Боголюбов, А.Г. Свешников А.Г // Физические основы приборостроения. 2013. Т.2. №1. С.10.
4. Н.А.Боголюбов, Ю.В.Мухартова // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т.54. №6. С.969
5. J.A. Nelder, R. Mead // The Comp. J. 1965. V.7, P.308.
6. W. Spendly, G.R. Next, F.R. Himsforth // Technometric. 1962. V.4. P.441.
7. А.Г.Свешников, А.Н. Боголюбов, А.В. Красильникова // Вестник Моск. ун-та. Серия 3. Физика. Астрономия. 1996. Т.37. №5. С.12.

Локализация собственных функций оператора Лапласа в областях сложной формы

А.Л. Делицын¹, Д.А. Гребеньков²

¹*МГУ им М.В. Ломоносова, физический ф-т., каф. Математики,* ²*Ecole Polytechnique, Laboratoire de
Physique de la Matière Condensée*

delisyn@mail.ru

Локализация собственных функций оператора Лапласа в областях различной формы является мало исследованным вопросом. Эта задача вызывает, в настоящий момент времени интерес как чисто математического характера, так и связанный с приложениями в электродинамике, акустике, исследовании вибраций конструкций.

Как вычисления, так и эксперимент показывают, что моды областей сложной геометрии могут быть локализованы в некоторой подобласти, при этом в остальной области их величины незначительны. В настоящий момент времени вопрос о локализации собственных функций мало разработан. Это связано со сложностью описания зависимости собственной функции от геометрии области.

Мы рассматриваем три типа локализации. Первый локализация волноводного типа. Подобный тип локализации связан с наличием более или менее обширной области, в которой сосредоточена собственная функция и ответвлений, в которой она экспоненциально убывает.

Основной результат, полученный нами, заключается в оценке скорости убывания при достаточно произвольной геометрии ответвления. Основная техника доказательства связана с получением дифференциальных неравенств для норм решения в ответвлениях.

Следует заметить, что применяемый метод, основанный на дифференциальных неравенствах для норм собственных функций, применим как для краевых задач с условиями Дирихле, так и для задач с условиями третьего рода. Условие затухания собственной функции в ответвлении формулируется в терминах оценок собственных значений в основной области и в сечении ответвления. Результаты получаются достаточно единообразно как в двумерном, так и в трехмерном случае.

Второй тип локализации связан с разделением области на две путем введения разреза. Для областей с определенной простой геометрией, например, для прямоугольника с разрезом удается доказать локализацию собственной функции в одной из подобластей. Точнее, удается получить соотношение между нормами собственных функций в двух подобластях. Для исследования этой задачи используется техника сшивания мод в подобластях, позволяющая при своей элементарности получить достаточно полные результаты.

Подобная техника оказывается применимой к задаче иной физической природы, но близкой по применяемому методу исследования, а именно задаче о резонансном рассеянии на двух барьерах в волноводе. Как известно, при рассеянии на двух барьерах в волноводе при частоте близкой к частоте резонатора, возникающего при полном перегораживании барьерами волновода, возникает эффект прохождения волны через барьер вместо ее отражения.

Строгая теория этого эффекта основана на довольно сложных методах абстрактной теории рассеяния. Используемый в настоящей работе метод, основанный на сшивании мод, дает возможность дать элементарное доказательство того, что при частоте близкой к резонансной коэффициент прохождения стремится к единице.

На сечение волновода не накладываються никаких ограничений. Для простоты барьеры предполагаются бесконечно тонкими. Роль малого параметра играет диаметр отверстия в барьерах. Отверстие в барьерах может иметь произвольную форму. Следует отметить, что полученное доказательство для задачи с краевыми условиями Дирихле может быть использовано и для случая условий третьего рода.

Третий тип локализации относится к локализации мод типа мод шепчущей галереи. Типичным примером подобной задачи является задача в области, состоящей из круга и присоединенного к нему сектора.

При определенном соотношении параметров возможно существование решения локализованного у внешней границы сектора. Исследование мод шепчущей галереи основано, как правило, на рассмотрении асимптотик собственных функций определенного вида в высокочастотной области. В нашей работе не делается подобных предположений, и полученные оценки норм собственных функций не используют подобных методов.

ЛИТЕРАТУРА

1. B.-T. Nguyen, D. S. Grebenkov, and A. L. Delitsyn // *Contemp. Math.* 2014. V. 630 P. 337.
2. A. L. Delitsyn, B.-T. Nguyen, and D. S. Grebenkov // *Eur. Phys. J. B* 2012. V. 85. P. 371.
3. A. L. Delitsyn, B.-T. Nguyen, and D. S. Grebenkov // *Eur. Phys. J. B.* 2012. V. 85. P. 176.
4. D. S. Grebenkov and B.-T. Nguyen // *SIAM Reviews.* 2013. V. 55. P. 601.
5. B.-T. Nguyen and D. S. Grebenkov // *SIAM J. Appl. Math.* 2013. V. 73. P. 780.

Дисперсионные кривые и проблема резонансного возбуждения волноводов с анизотропным заполнением

А.Л. Делицын, И.К. Трошина.

МГУ им. М.В. Ломоносова, физический ф-т., каф. математики

delitsyn@mail.ru

Задача возбуждения регулярного волновода сторонним током относится к числу классических задач электродинамики. В случае, когда рассматривается стационарная задача, т.е. предполагается, что ток гармонически зависит от времени и колебания поля являются установившимися, существует ряд различных схем ее решения, представляющих по сути варианты метода Фурье для решения краевой задачи для системы уравнений Максвелла в цилиндре.

Для постановки краевой задачи в цилиндре необходимо поставить условия излучения. Постановка условий излучения осуществляется, как правило, исходя из условия отсутствия приходящих из бесконечности волн. Обоснованием постановки условий излучения служит применение принципа предельной амплитуды. Его применение к задаче о возбуждении волновода и формулировка условий излучения в виде условий названных парциальными условиями излучения были осуществлены в работах А.Г. Свешникова [1]-[3].

В то же время при постановке парциальных условий излучения предполагалось, что частота колебаний тока не совпадает с частотой отсечки волновода. Под частотой отсечки понимают частоту, при которой возникает или исчезает бегущая мода в волноводе. При частоте равной частоте отсечки не происходит стабилизации решения и возбуждение волновода происходит в резонансном режиме. В отличие от резонатора, для которого при резонансе поле растет на резонансной частоте линейно, в волноводе при возбуждении на частоте отсечки поле растет как корень из времени. Следует заметить, что исследование задачи о резонансном возбуждении волновода проводилось для полого волновода.

При наличии в волноводе заполнения задача о возбуждении волновода принципиально усложняется. Это связано с ее несамосопряженным характером. При этом, возникают два новых эффекта – комплексные волны и обратные волны. Под комплексными волнами понимают моды волноводов, у которых постоянная распространения имеет ненулевую вещественную и комплексную части в отсутствие затухания в среде, заполняющей волновод. При исчезновении комплексных мод возникает пара, состоящая из прямой и обратной волны. Под обратной волной понимают волну, у которой фазовая и групповая скорости имеют противоположное направление.

В настоящий момент времени качественная теория дисперсионных кривых отсутствует. Существует ряд работ, посвященных вычислению дисперсионных кривых для конкретных волноводов. В настоящей работе рассмотрен достаточно частный случай задачи о волноводе с постоянным, но анизотропным заполнением. Особенностью задачи является возможность выписать ее решение в явном виде. Это позволяет проследить эволюцию дисперсионных кривых в зависимости от изменения коэффициентов анизотропии. Показано, что волноводная мода, соответствующая некоторой дисперсионной кривой может иметь три частоты отсечки, которые соответствуют возникновению бегущих прямой и обратной волны при исчезновении комплексных волн, исчезновению обратной волны при пересечении дисперсионной кривой с осью абсцисс и возникновению прямой волны при повторном пересечении

этой дисперсионной кривой с осью. При определенном выборе коэффициентов анизотропии пересечение дисперсионной кривой с осью абсцисс сводится к касанию (см. рис. 1).

В работе доказано возбуждение обратных волн для соответствующих участков дисперсионных кривых. Для возбуждения волновода на частоте, соответствующей касанию дисперсионной кривой с осью абсцисс, доказано, что поле в волноводе нарастает линейно, а не как корень из времени.

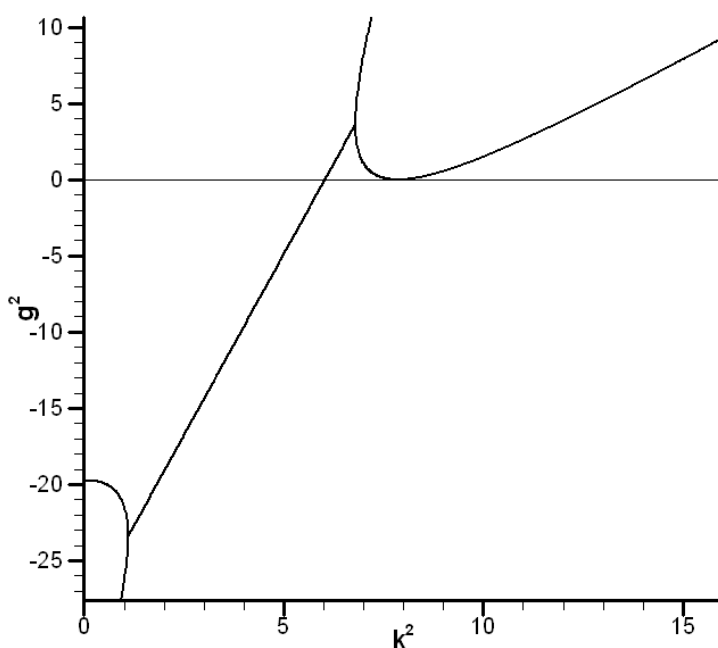


Рис.1. Касание дисперсионной кривой с осью абсцисс.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Г. Свешников // ДАН СССР. 1950. Т. 73. No 5. С. 917.
2. А.Г. Свешников // ДАН СССР. 1951. Т. 80. No 3. С. 345.
3. А.Г. Свешников // ЖВМ и МФ. 1963. Т. 3. No 2. С. 314.
4. А.Н. Боголюбов, А.Л. Делицын, А.Г. Свешников // Докл. РАН. 1999. Т. 369. С. 458.
5. А.Н. Боголюбов, А.Л. Делицын, А.Г. Свешников // ЖВМ и МФ. 1998. Т. 38. No 11. С. 1891.
6. А.Л. Делицын. // Известия РАН, сер. Мат. 2007. Т. 71 No 3. С. 61.
7. А.Л. Делицын, И.К. Трошина // Радиотехника и Электроника. Т.5. No 7. С. 215

Обратная задача восстановления характеристик мета-атома по измеренным значениям прохождения и отражения метапленки

Ж.О. Домбровская, А.В. Журавлев, Г.В. Белокопытов, А.Н. Боголюбов

МГУ им. М.В. Ломоносова
dombrovskaya@physics.msu.ru

Введение. В настоящий момент одной из актуальных задач прикладной оптики является синтез двумерных метаматериалов (метапленок). Расчету их электродинамических характеристик (т.е. решению прямой задачи) посвящено много работ, использующих численные алгоритмы. Альтернативой численному моделированию является аналитический подход [1-3], в котором коэффициенты прохождения T и отражения R метапленки рассчитываются по известной матрице поверхностной плотности поляризуемости $\|\alpha_s\|$ субволновых частиц. Этот подход гораздо менее требователен к вычислительным ресурсам.

Для синтеза метапленок с заданными электродинамическими характеристиками в широком диапазоне углов падения θ существующие алгоритмы сводятся к многократному решению прямой задачи с направленно изменяемыми геометрическими параметрами структуры. Такие многократные расчеты являются исключительно трудоемкими, поэтому актуально построение эффективного алгоритма для решения обратной задачи.

Алгоритм решения прямой задачи. В настоящей работе используется аналитический подход, который состоит из двух этапов. 1) Производится определение матрицы поляризуемости одиночной частицы. 2) Осуществляется переход к поверхностной плотности поляризуемости. Зная ее, можно записать эффективные граничные условия для метапленки [4]. Это приводит к уравнениям для коэффициентов

T и R . В случае наклонного падения на метапленку ТМ-поляризованной волны

(см. Рис. 1) при временной зависимости $e^{i\omega t}$ они имеют следующий вид [5]:

$$T(\theta) = \frac{1 + e(\theta)m(\theta)}{1 - e(\theta)m(\theta) - e(\theta) + m(\theta)}; \quad R(\theta) = \frac{e(\theta) + m(\theta)}{1 - e(\theta)m(\theta) - e(\theta) + m(\theta)}, \quad (1)$$

где $e(\theta) = -(ik_0/2)\alpha_{es}^{xx} \cos \theta$, $m(\theta) = (ik_0/2 \cos \theta)(\alpha_{ms}^{yy} + \alpha_{es}^{zz} \sin^2 \theta)$, k_0 – волновой вектор, ω – частота падающей волны, α_{es}^{xx} , α_{ms}^{yy} и α_{es}^{zz} – поверхностные электрические и магнитная плотности поляризуемости, которые записываются следующим образом [1]:

$$\alpha_{es}^{xx} = \frac{N\langle\alpha_e^{xx}\rangle}{1 - N\langle\alpha_e^{xx}\rangle/4r}; \quad \alpha_{ms}^{yy} = \frac{N\langle\alpha_m^{yy}\rangle}{1 - N\langle\alpha_m^{yy}\rangle/4r}; \quad \alpha_{es}^{zz} = \frac{N\langle\alpha_e^{zz}\rangle}{1 - N\langle\alpha_e^{zz}\rangle/2r}. \quad (2)$$

Здесь $N = 1/l^2$ – концентрация мета-атомов, l – период метапленки, $r \approx 0.6956l$ – радиус области влияния [1], α_e^{xx} , α_m^{yy} и α_e^{zz} – электрические и магнитная поляризуемости; угловые скобки обозначают усреднение по поверхности метапленки.

Алгоритм решения обратной задачи. Решение задачи восстановления свойств мета-атома осуществляется по известным значениям коэффициентов прохождения и отражения метапленки. Они могут быть определены как в численном, так и в натурном экспериментах. Проводя достаточное число измерений при нескольких фиксированных значениях θ (например, одно при нормальном падении и одно при наклонном падении), мы получаем систему уравнений относительно элементов матрицы $\|\alpha_s\|$. В случае нормального падения ($\theta = \theta_0 \equiv 0$) эту систему можно обратить [6-7]:

$$e(0) = \frac{R(0) + T(0) - 1}{R(0) + T(0) + 1}; \quad m(0) = -\frac{R(0) - T(0) + 1}{R(0) - T(0) - 1}. \quad (3)$$

Таким образом, найдены 2 компоненты поверхностной плотности восприимчивости

$$\alpha_{es}^{xx} = \frac{2i}{k_0} e(0); \quad \alpha_{ms}^{yy} = \frac{2i}{k_0} m(0), \quad (4)$$

Оставшиеся компоненты получаем, решая систему уравнений (1) при наклонном падении под углом θ_1

$$\alpha_{es}^{zz} = -\frac{\alpha_{ms}^{yy}}{\sin^2 \theta_1} + \frac{2i}{k_0} \frac{e(\theta_1) \cos \theta_1}{\sin^2 \theta_1}. \quad (5)$$

Элементы матрицы поверхностной плотности поляризуемости $\|\alpha_s\|$ являются постоянными величинами для конкретной конфигурации структуры метапленки. Как только найдены значения α_{es}^{xx} , α_{ms}^{yy} и α_{es}^{zz} , подставляем их в (1) и рассчитываем коэффициенты T и R , но теперь уже для произвольного угла падения θ .

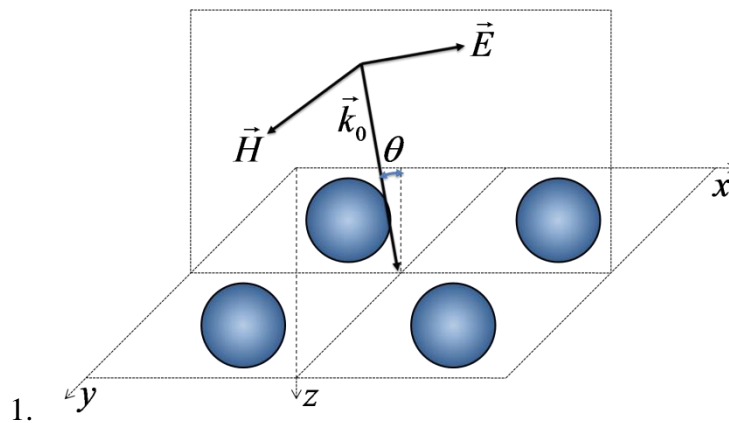


Рис. 1. Наклонное падение ТМ-поляризованной волны на метапленку из сферических частиц

Заключение. Предложен алгоритм, позволяющий решить задачу синтеза метапленок с заданными электродинамическими характеристиками из сферических резонаторов. Использование аналитических формул для определения компонентов матрицы поляризуемости составляющих частиц по спектрам прохождения и отражения позволяет существенно увеличить производительность численных расчетов характеристик метапленки. Алгоритм может быть легко распространен на случаи более сложной геометрии частиц (например, бианизотропных П-образных резонаторов). Также возможен учет статистического разброса геометрических параметров частиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. E.F. Kuester et al. // IEEE Trans. Antennas. Propag. 2003. V. 51, P. 2641.
2. C.L. Holloway et al. // IEEE Trans. Electromagn. Compat. 2005. V. 47. P. 853.
3. G.V. Belokopytov et al. // Phys. Wave Phenom. 2011. V. 19, P. 280.
4. M. Idemen // J. Phys. Soc. Japan. 1990. V. 59. P. 71.
5. C.L. Holloway et al. // IEEE Ant. Propag. Magaz. 2012. V. 54, P. 10.
6. Г.В. Белокопытов и др. // Труды VII Международной конференции ARMIMP.
2014. С. 15.
7. Г.В. Белокопытов и др. // Физические основы приборостроения. 2015. Т. 4, С. 5.

Моделирование дифракции на сложных объектах методом конечных элементов

Д.А. Коняев

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет,
математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

konyaev@physics.msu.ru

Целью работы является разработка комплекса программ, позволяющей строить численные решения для двумерных и трёхмерных скалярных задач дифракции на рассеивателях сложной формы. Существуют различные подходы к решению задачи дифракции, с основными из которых можно ознакомиться в [1-8]. Наиболее популярными из этих методов являются методы, основанные на сведении исходной краевой задачи к различным интегральным уравнениям. Однако при рассмотрении достаточно сложных областей эти методы встречают определённые трудности. Наиболее универсальным методом решения краевых задач в сложных областях является метод конечных элементов[9].

Исходная краевая задача для нахождения рассеянного поля ставится в бесконечной области. Для применения алгоритма построения численного решения этой задачи рассматриваемую область необходимо ограничить. Для этого воспользуемся в двумерном случае окружностью, а в трёхмерном случае сферой. В качестве граничных условий на внешней границе можно, например, использовать радиационные граничные условия первого порядка [4], которые можно получить, опираясь на результаты, представленные в работе [10]. Использование этих условий накладывает требование рассматривать фиктивную границу области на достаточно большом расстоянии от рассеивателя. При этом увеличение радиуса внешней границы приводит к росту затрат при построении численного решения. Однако, как показано в работах [11,12] уже в такой постановке можно достичь неплохих результатов.

В разработанном программном комплексе основными граничными условиями, используемыми на внешней границе, являются парциальные условия излучения, которые позволяют приблизить внешнюю границу максимально близко к границам рассеивателей.

Скалярную задачу дифракции в общем случае можно записать в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta(v(M) + v_0(M)) + k^2(M)(v(M) + v_0(M)) = 0, (M) \in \Omega_0; \\ \frac{\partial(v(M) + v_0(M))}{\partial n_w} + p_w(M)(v(M) + v_0(M)) = h_w(M), (M) \in \partial\Omega_w; \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \xi(r) \left(\frac{\partial v(M)}{\partial r} - ik_0 v(M) \right) = 0; \end{array} \right. \quad (1)$$

где v_0 – падающая волна, v - рассеянное поле, Ω_0 – область внешняя по отношению к непроницаемым рассеивателям, Ω_w – области непроницаемых рассеивателей, $k^2(M) = q(M)k_0^2$, $p_w(M)$, $h_w(M)$ – заданные функции.

Постановка задачи с парциальными условиями излучения [3] имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta(v(M) + v_0(M)) + k^2(M)(v(M) + v_0(M)) = 0, (M) \in \Omega_0; \\ \frac{\partial(v(M) + v_0(M))}{\partial n_w} + p_w(M)(v(M) + v_0(M)) = h_w(M), (M) \in \partial\Omega_w; \\ \frac{\partial v}{\partial r}\Big|_{r=R} = \Psi v(M) \end{cases} \quad (2)$$

где

$$\Psi v(M) = \Psi[v(r, \varphi)] = \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{k_0 H_m^{(1)'}(k_0 R)}{H_m^{(1)}(k_0 R)} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(R, \varphi) e^{-im\varphi} d\varphi \right] e^{im\varphi} \right) \quad (3)$$

в двумерном случае, и

$$\begin{aligned} \Psi v(M) &= \Psi[v(r, \theta, \varphi)] \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \left(\frac{k_0 H_{n+1/2}^{(1)'}(k_0 R)}{H_{n+1/2}^{(1)}(k_0 R)} - \frac{1}{2R} \right) \frac{(n - |m|)! (2n + 1)}{4\pi(n + |m|)!} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left[\int_0^\pi \int_0^{2\pi} v(R, \theta, \varphi) P_n^{(|m|)}(\cos \theta) e^{-im\varphi} \sin \theta d\theta d\varphi \right] P_n^{(|m|)}(\cos \theta) e^{im\varphi} \right\} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

в трёхмерном случае. Для упрощения постановки граничных условий на границах сложной формы в работе используется постановка задачи в виде краевой задачи поиска полного волнового поля [11 – 17].

Для построения численного решения задачи дифракции методом конечных элементов необходимо реализовать три основных этапа построения этого решения: генерацию треугольной сетки, построение матриц метода конечных элементов и решение полученной системы линейных алгебраических уравнений.

Генерация треугольной сетки производится методом граничной коррекции. Этот метод позволяет строить сетки высокой степени однородности. Кроме того скорость работы этого метода весьма высока. Входными данными при этом являются границы областей. Первая заданная граница задаёт основную область, остальные – вырезаемые подобласти и подобласти, заполняемые согласованной сеткой. Введение согласованной сетки внутри подобласти необходимо при решении задачи дифракции при наличии проницаемых тел в рассеивателях [11-17]. Общие сведения об алгоритмах генерации сеток изложены в [18-21].

Второй основной частью программного комплекса является сборка матриц метода конечных элементов для соответствующей краевой задачи. С процедурой сборки стандартных матриц метода конечных элементов можно ознакомиться в [9, 22]. С процедурой сборки матриц соответствующих парциальным граничным условиям можно ознакомиться в работе [22]. Полученные матрицы являются разреженными, поэтому для их хранения реализован разреженный строчный формат со стандартными операциями, производимыми над матрицами в этом формате хранения [23].

Третьей основной частью программного комплекса является реализация алгоритма решения СЛАУ большой размерности с разреженными матрицами. Для

этого используется реализация обобщённого метода минимальных невязок (GMRES)[24] с предобуславливанием в виде неполного LU разложения [24, 25].

Тестирование программы проводилось на задачах, имеющих точное аналитическое решение. Это задачи дифракции скалярной волны на непроницаемых бесконечном цилиндре и сфере [7]. Радиусы цилиндра и сферы были выбраны равными 1. С результатами тестирования можно ознакомиться в работах [11 – 17, 22]. Эти тесты показали хорошее согласие получаемых результатов с известными аналитическими решениями. Кроме того, проводилось сравнение полученных результатов с решениями, полученными при помощи программного комплекса FEKO. Эти сравнения показали хорошее согласие получаемых результатов.

В заключение, рассмотрим результат работы программы при рассеянии на 19 непроницаемых сферах. $k(x, y) = k_0 = 3$. Конфигурация рассеивателя и диаграмма рассеяния представлены на рисунке:

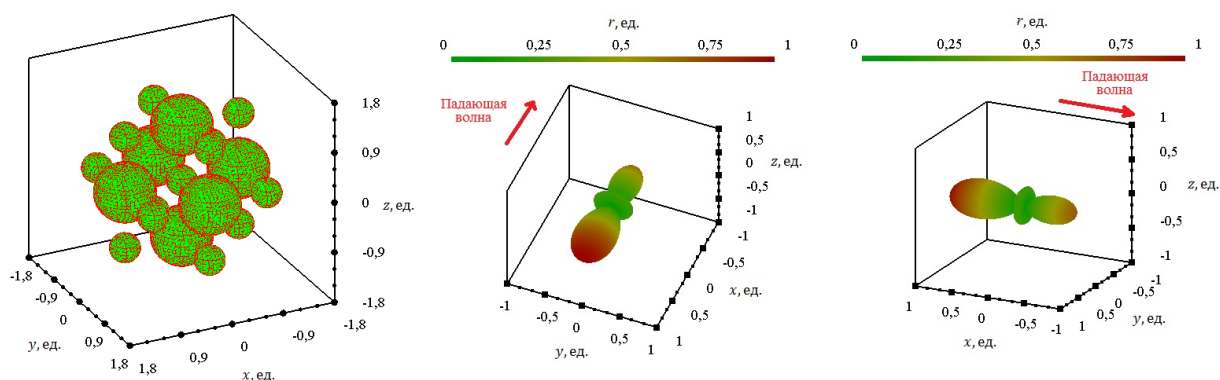


Рис. 1. Слева направо: рассеиватель и диаграмма рассеяния в двух ракурсах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т.Н. Галишникова, А.С. Ильинский Численные методы в задачах дифракции - Издательство Московского Университета 1987.
2. Ю.А. Ерёмин, А.Г. Свешников Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции - Издательство Московского Университета 1992.
3. А.С. Ильинский, В.В. Кравцов, А.Г. Свешников Математические модели электродинамики - Москва «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1991.
4. М.А. Ильгамов, А.Н. Гильманов Неотражающие условия на границах расчётной области - Москва ФИЗМАТЛИТ 2003.
5. М.Ю. Медведик // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2012. № 1. С. 83 –91.
6. Е.И. Нефедов, А.Т. Фиалковский Асимптотическая теория дифракции электромагнитных волн на конечных структурах. Наука, 1972.
7. К. Хёнл, А. Мауэ, Вестпфаль К. Теория дифракции - Издательство «МИР», Москва 1964.
8. J.H. Richmond. // IEEE Transaction on Antennas and Propagation, AP-13, 1965, N3, p. 334 – 341.
9. Г. Стренг, Дж. Фикс Теория метода конечных элементов - Издательство «МИР», Москва, 1977.
10. Д. Колтон, Р. Кресс Методы интегральных уравнений в теории рассеяния - Москва «МИР» 1987.

11. Д.А. Коняев // Вестник Московского Университета. Серия 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 2012. №4 стр. 30-36.
12. Д.А. Коняев, А.Л. Делицын // Математическое моделирование. 2014. Том 26. №8, стр. 48-64.
13. Д.А. Коняев, А.Л. Делицын // Журнал радиоэлектроники: электронный журнал. 2014. N4. URL: <http://jre.cplire.ru/jre/apr14/3/text.pdf>
14. Д.А. Коняев // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2012» / Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов, К.К. Андреев, М.В. Чистякова. [Электронный ресурс] — М.: МАКС Пресс, 2012.
15. Д.А. Коняев //Труды Российского научно-технического общества радиотехники электроники и связи имени А.С. Попова. Серия: Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации. Выпуск V, 2012г., стр. 41-43.
16. Д.А. Коняев //Труды Российского научно-технического общества радиотехники электроники и связи имени А.С. Попова. Серия: Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации. Выпуск VI, 2013г., стр. 67-69.
17. Д.А. Коняев // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2013» / Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов, К.К. Андреев, М.В. Чистякова. [Электронный ресурс] — М.: МАКС Пресс, 2013.
18. P.J. Frey, P.L. George Mesh Generation Application to Finite Elements - HERMES Science Europe Ltd, 2000.
19. В.В. Шайдуров Многосеточные методы конечных элементов - М., Наука, 1989.
20. М.П. Галанин, И.А. Щеглов Разработка и реализация алгоритмов трёхмерной триангуляции сложных пространственных областей: прямые методы - Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2006.
21. М.П. Галанин, И.А. Щеглов Разработка и реализация алгоритмов трёхмерной триангуляции сложных пространственных областей: итерационные методы - Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2006.
22. Д.А. Коняев Применение метода конечных элементов в задаче дифракции акустических и электромагнитных полей в сложных средах: дис. на соискание учёной степени к. ф.-м. н.: 05.13.18: защищена 20.03.15. — М., 2015. — 142 с.
23. С. Писсанецки Технология разреженных матриц - Москва «МИР», 1988.
24. М.Ю. Баландин, Э.П. Шурина Методы решения СЛАУ большой размерности - Новосибирск, издательство НГТУ, 2000.
25. Р.Р. Ахунов // Записки научных семинаров ПОМИ. 2012. Т. 405. С. 40-53.

Оптические частотные гребенки и платиконы в микрорезонаторах с нормальной дисперсией групповой скорости

В.Е. Лобанов¹, Г.В. Лихачев^{1,2}, М.Л. Городецкий^{1,2}

¹Российский квантовый центр, Сколково, 143025

²Физический факультет, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 119991

mg@rqc.ru

Показано существование нового типа диссипативных солитонных структур, «платиконов», в оптических микрорезонаторах с нормальной дисперсией групповой скорости (ДГС). Предложены методы генерации платиконов при накачке лазером непрерывной мощности с амплитудной модуляцией, двухчастотной накачке, использовании частотного сдвига накачиваемой моды микрорезонатора [1].

Оптические частотные гребенки представляют собой набор эквидистантных спектральных линий в ультрафиолетовом, видимом и инфракрасном диапазонах. Предоставляя точные частотные маркеры, оптические гребенки могут применяться в частотной метрологии и спектроскопии для точных измерений. На сегодняшний день в большинстве практических применений используются оптические гребенки, основанные на импульсном излучении фемтосекундных лазеров с синхронизацией мод [2]. За открытие оптических гребенок такого типа Т. Хэншу и Дж. Холлу была присуждена Нобелевская премия по физике в 2005 году.

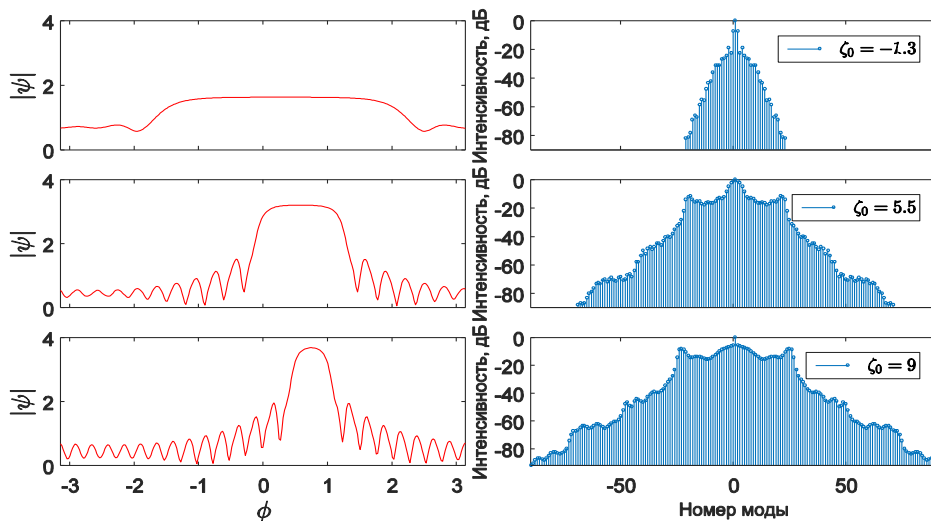


Рис. 1. Слева: численное моделирование формы оптических платиконов в микрорезонаторах с нормальной ДГС для различных значений отстройки лазера накачки. Справа: соответствующий оптический спектр платиконов.

В последние годы развивается использование оптических гребенок на основе нелинейных оптических микрорезонаторов с высокой добротностью [3]. Когда микрорезонатор с аномальной дисперсией групповой скорости накачивается лазером непрерывной накачки, оптическая частотная гребенка может возникнуть благодаря каскадному четырехволновому взаимодействию. Расстояние между линиями оптической гребенки соответствует области свободной дисперсии (ОСД) фундаментальных азимутальных мод микрорезонатора (типичные значения 10-100 ГГц). В отличие от частотных гребенок из фемтосекундных лазеров, оптическая

гребенка в микрорезонаторе, как правило, не соответствует сверхкоротким импульсам во временном представлении из-за произвольных фазовых соотношений между модами, полученных при формировании гребенки. Однако недавно были экспериментально продемонстрированы солитонные режимы в кристаллических объемных [4] и интегрированных кольцевых микрорезонаторах.

Получить аномальную дисперсию групповой скорости в микрорезонаторах в широком диапазоне для произвольной центральной частоты сложно, т.к. материальная ДГС в видимом и ближнем ИК диапазоне, как правило, нормальная. Поэтому важен поиск новых стратегий генераций оптических частотных гребенок в резонаторах с нормальной ДГС. Недавно такие оптические гребенки были теоретически предсказаны и спектр гребенки был экспериментально продемонстрирован в кристаллических микрорезонаторах с нормальной ДГС [5].

Известно, что спектр мод реального микрорезонатора значительно отличается от теоретического из-за эффекта нормального расщепления мод между модами различных семейств. При этом собственные частоты мод резонатора сдвигаются. При этом локально может образовываться область с аномальной дисперсией между центральной модой накачки и двумя симметричными боковыми модами, приводя к мягкому возбуждению оптической гребенки. В этом случае может возникнуть модуляционная нестабильность, приводящая к появлению первых боковых линий, которые могут привести к генерации уже широкой оптической гребенки.

Мы показали с помощью численного моделирования для системы уравнений связанных мод и уравнения Луджиато-Лефевра [1], что если мода накачки сдвинута по частоте, то возможна генерация коротких импульсов с плоским верхним плато, которые мы назвали «платиконы». Если сдвиг моды накачки достаточно велик (порядка единиц ширины моды микрорезонатора), платиконы могут быть сгенерированы спонтанно, когда лазер накачки перестраивается по частоте через точку эффективной нулевой отстройки высокочастотной моды. В этом солитоноподобном режиме можно непрерывно изменять длительность платиконов, изменяя отстройку лазера накачки.

Мы обнаружили, что генерация широких платиконов в микрорезонаторах с нормальной ДГС значительно эффективнее в смысле соотношения мощности боковых линий оптической гребенки и мощности лазера непрерывной накачки в центральную моду, чем для резонаторов с аномальной ДГС при одинаковом модуле дисперсии.

Мы показали, что генерация платиконов возможна и при отсутствии сдвига частоты моды накачки при условии двухчастотной или амплитудно-модулированной накачки. Такой подход эффективен, если частота амплитудной модуляции или разность частот между двумя волнами накачки близка к ОСД резонатора. Также показано, что фазовая модуляция лазера накачки не приводит к образованию платиконов в отличие от генерации светлых солитонов в резонаторах с аномальной ДГС.

Нами была продемонстрирована трансформация дискретного энергетического спектра темных солитонов уравнения Луджиато-Лефевра в квазинепрерывный спектр платиконов. По нашему мнению, вышеперечисленные свойства платиконов позволяют говорить о новом типе локализованных структур, отличном от диссипативных солитонов высокого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. V.E. Lobanov et al. // Opt. Express 2015. V. 23 P. 7713
2. J. L. Hall // Rev. Mod. Phys. 2006. V. 78 P. 1279
3. T. J. Kippenberg, R. Holzwarth, S. A. Diddams // Science 2011. V. 332 P. 555

4. T. Herr et al. // Nature Photon. 2014. V. 8 P. 145
5. W. Liang et al. // Opt. Lett. 2014. V 39 P. 2920

Влияние внешнего магнитного поля на доменный транспорт в полупроводниковой наноструктуре

В.В. Макаров^{1,2}, В.А. Максименко^{1,2}, А.О. Сельский^{1,2}, А.Е. Храмов^{1,2},
А.А. Короновский^{2,1}, А.Г. Баланов³

¹СГТУ им. Гагарина Ю.А. 410054, Саратов, Россия

²СГУ им. Н.Г. Чернышевского, 410012, Саратов, Россия

³Loughborough University, Loughborough, UK

vladmak404@gmail.com

Полупроводниковые сверхрешетки — наноструктуры, состоящие из нескольких (обычно несколько десятков или более) чередующихся полупроводниковых материалов с различной шириной запрещенной зоны. Впервые они были предложены в работах Л. Эсаки и Р. Тсу [1, 2] и независимо в работе [3] как одномерные структуры для изучения различных квантовых эффектов, связанных с резонансным туннелированием и блоховскими колебаниями. После публикации этих оригинальных работ были предложены и экспериментально реализованы различные типы полупроводниковых сверхрешеток с различными электромагнитными свойствами. В настоящее время полупроводниковые сверхрешетки являются удобными объектами как для изучения и понимания процессов физики твердого тела [2, 4], так и для исследования различных нелинейных явлений [5-7]. Кроме того, блоховские колебания и доменный транспорт, реализующийся в сильносвязанном типе сверхрешеток, а также ассоциирующиеся с ними нелинейные процессы [8], делают сверхрешетку перспективным элементом для генерации, усиления и детектирования высокочастотных (с частотой до нескольких десятков терагерц) сигналов [5].

В контексте использования полупроводниковых сверхрешеток для генерации суб-ТГц и ТГц излучения представляет большой интерес исследование взаимодействия наноструктуры с внешним магнитным полем. Подобное исследование имеет важность как с точки зрения улучшения характеристик и увеличения частоты генерации сверхрешетки, так и для обеспечения стабильной работы устройства под воздействием внешних полей.

В данной работе нами исследовано влияние внешнего наклонного магнитного поля на динамику заряда в полупроводниковой сверхрешетке. Для моделирования полупроводниковой наноструктуры нами использована полуклассическая модель, описанная в [9]. Воздействия магнитного поля на зависимость дрейфовой скорости электронов в наноструктуре было смоделировано с помощью подхода, предложенного в [10].

На рис. 1 (а-в) приведена пространственно-временная динамика носителей заряда в слоях полупроводниковой сверхрешетки для различных конфигураций внешнего магнитного поля. В случае, когда внешнее магнитное поле приложено под углом 0° , поведение доменов заряда не меняет характера по сравнению с автономной сверхрешеткой. Частота генерации в данном случае равна 13.7 ГГц. При увеличении угла наклона магнитного поля (рис. 1 (б)) можно заметить существенное увеличение частоты следования доменов, и как следствие, увеличение частоты генерации. Кроме того, хорошо прослеживается эффект смещения начала образования домена в сторону коллектора. Очевидно, что данный эффект напрямую связан с увеличением частоты генерации наноструктуру: сокращение эффективной длины сверхрешетки отражается в уменьшении времени прохода домена. Дальнейшее увеличение угла наклона внешнего

магнитного поля отражается в большем смещении точки образования домена в сторону коллектора, а следственно, усилении описанных выше эффектов. Таким образом, наклонное магнитное поле может быть успешно использовано для существенного повышения частоты генерации в полупроводниковой сверхрешетке.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 14-12-00222). В.А. Максименко выражает благодарность Фонду «Династия» за персональную поддержку.

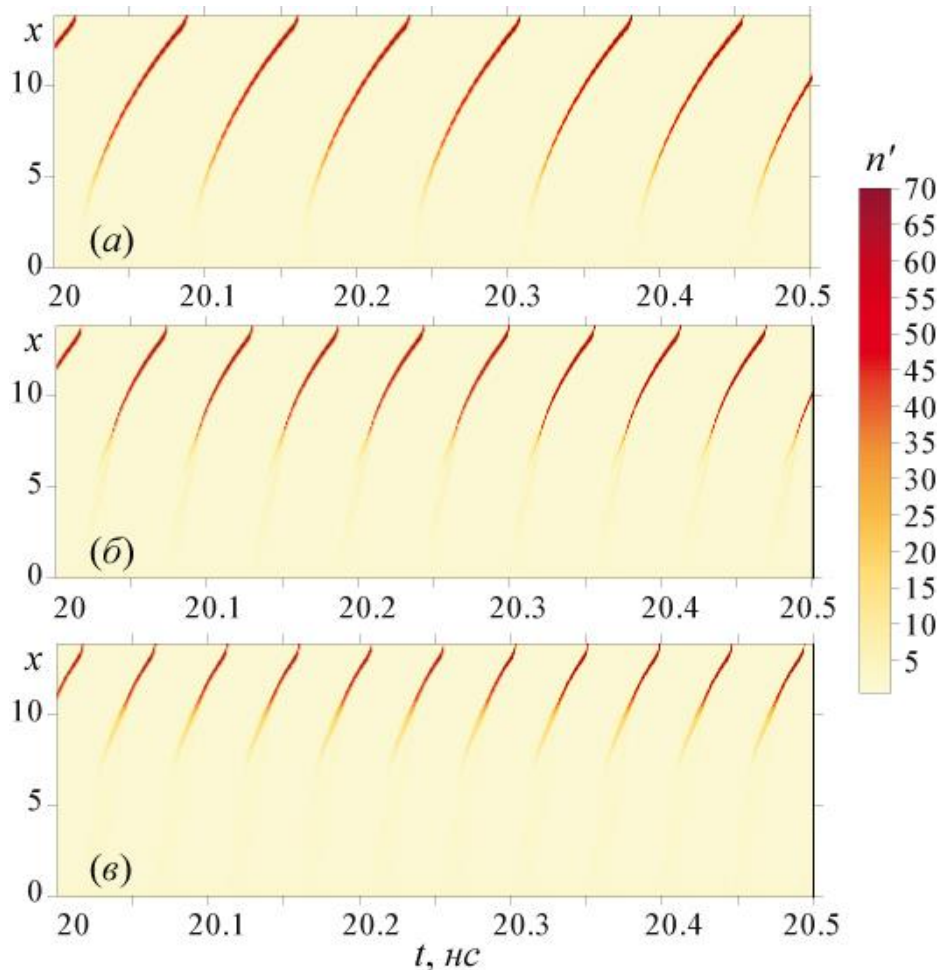


Рис. 1. Пространственно-временная динамика заряда в слоях полупроводниковой сверхрешетки для различных углов наклона внешнего магнитного поля: 0° (а), 30° (б), 40° (в). Индукция магнитного поля $B=12$ Тл.

ЛИТЕРАТУРА

1. Esaki L. and Tsu R. // IBM JRaD, 1970. V. 14, N. 1, P. 61.
2. Tsu R., Superlattices to nanoelectronics, Elsevier, 2005.
3. М. И. Овсянников, и др. // Физика и Техника Полупроводников. 1970. Т. 4. N. 12. С. 2225.
4. Greenaway M.T. et al. // Phys. Rev. B. 2009. V. 80. P. 205318.
5. Koronovskii A.A, et al. // Physics of wave phenomena. 2013. V. 21. N. 1 P. 48.
6. Wacker A. // Phys. Rep. 2002. V. 357. N. 1 P. 121.
7. Waschke C., et al. // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. P. 3319.
8. Hramov A.E., et al. // Physics of Plasmas. 2012. V. 19. N. 8 P. 082302.

9. Selskii A. O. et al. // Phys. Rev. B. 2011. V. 84. P. 235311.

10. Hramov A.E., et al. // Phys. Rev. Lett. 2014 V. 112. P. 116603.

Применение показателей Ляпунова для анализа дискретно- непрерывных систем со сложной динамикой

В.А. Максименко^{1,2}, В.В. Макаров^{1,2}, А.Е. Храмов^{1,2}, А.А. Короновский^{1,2},
К.Н. Алексеев³, А.Г. Баланов³

¹СГТУ им. Гагарина Ю.А. 410054, Саратов, Россия

²СГУ им. Н.Г. Чернышевского, 410012, Саратов, Россия

³Loughborough University, Loughborough, UK

maximenkov1@gmail.com

Динамические системы, описываемые при помощи переменных, зависящих как только от времени $X_i(t)$, так и от времени и пространственной координаты $Y_j(x,t)$ (дискретно-непрерывные системы), являются математическими моделями широкого класса реальных систем, представляющих интерес для современной физики. В частности, взаимодействие между распределённой и конечномерной системами встречается при построении математических моделей различных природных и технических объектов. К таким задачам относится, например, моделирование динамики биологических жидкостей самосогласованно с динамикой макроскопических параметров, определяющих состояние организма [1, 2]. В радиофизике задачи о взаимодействии распределённых и конечномерных систем могут возникать при рассмотрении динамики пространственно-распределённых моделей устройств СВЧ-электроники, взаимодействующих с внешними резонаторами, волноведущими системами и т.п. [3]. С учетом этого, изучение динамических режимов, реализующихся в дискретно-непрерывных системах, является актуальной задачей.

Среди наиболее известных инструментов для анализа сложных динамических режимов является спектр показателей Ляпунова. Данный метод активно применяется для анализа систем со сосредоточенными параметрами в различных областях науки [4-9]. Для систем, состояние которых определено в конечномерном фазовом пространстве при помощи набора величин $X_i(t)$, показатели Ляпунова рассчитываются при помощи алгоритма Бенеттина [10]. Применение данного подхода к пространственно-распределённым системам оказывается проблематичным [11]. Основной причиной этого является то, что состояние распределённых систем определяется в фазовом пространстве не конечномерным вектором малой размерности, а набором функций $Y_j(x,t)$, зависящих от времени и координаты, что требует модификации процедур ортогонализации и нормализации, необходимых для расчета спектра показателей Ляпунова [12].

Учитывая важность использования показателей Ляпунова при рассмотрении динамики распределённых систем, в ряде работ используются различные подходы для их расчета. Данные подходы основаны, главным образом, на оценке старшего показателя по временному ряду [13] или искусственной дискретизации пространственно-распределённой системы [14] и во многих случаях не позволяют корректно вычислить спектр показателей Ляпунова. Согласно исследованиям [15, 16], наиболее перспективным является метод, основанный на непрерывном в пространстве описании состояния системы и ее возмущений. С его помощью в работах [15, 16], был успешно проведен анализ эталонных распределённых систем электронной природы.

В настоящей работе предлагается метод расчета спектра показателей Ляпунова для дискретно-непрерывных систем. В качестве конкретного примера рассматривается динамическая система, представляющая собой колебательный RLC-контур, содержащий в качестве нелинейного элемента пространственно-распределённую

систему. Схематически исследуемая модель представлена на рисунке 1. В данном случае нелинейная вольтамперная характеристика $I(V_{TED})$ (б) пространственно-распределённого элемента (б) является его макроскопической характеристикой, определяющей его взаимодействие с колебательным контуром (а).

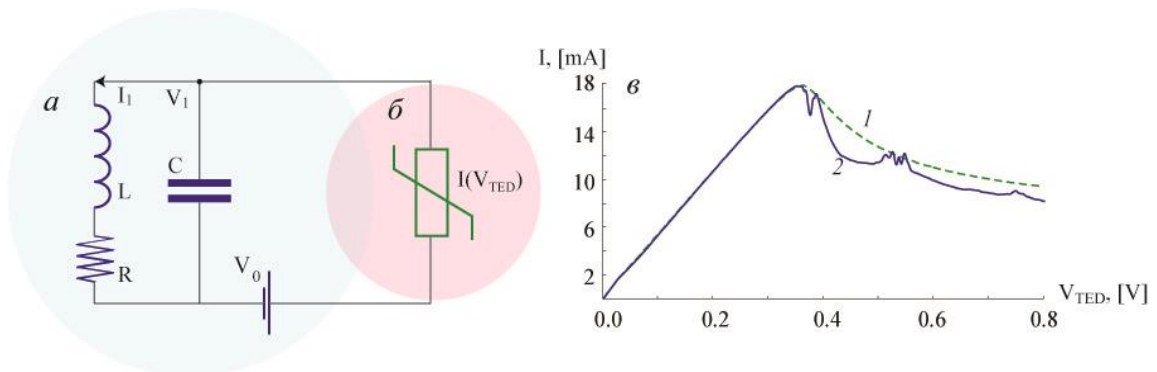


Рис. 1. RLC-контур (а), содержащего пространственно-распределённый нелинейный элемент (б) и вольтамперная характеристика (в) распределённой системы (штриховой линией показана вольтамперная характеристика автономной системы, сплошной линией - вольтамперная характеристика распределённой системы, связанной с колебательным контуром)

Динамика данной системы описывается самосогласованной системой дифференциальных уравнений, включающей обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ), описывающие колебательный контур, и уравнения в частных производных (уравнения непрерывности и Пуассона), описывающие пространственно-временную динамику распределенного элемента.

В работе обсуждается вопрос выбора состояния данной системы, описывается метод расчета показателей Ляпунова и его применение для диагностики сложных колебательных режимов.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 14-12-00224). В.А. Максименко выражает благодарность Фонду «Династия» за персональную поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. Gabe // *Physics in medicine and biology*. 1965. V. 10. N. 2. P. 271.
2. K. DeVault et al. // *Multiscale Modeling & Simulation*. 2008. V. 7. N. 2. P. 888
3. A.E. Hramov et al. // *Phys. Rev. Lett.* 2014. V. 112. P. 116603
4. W. M. Macek, S. Redaelli, // *Phys. Rev. E*. 2000. V. 62. N. 5. P. 6496.
5. R. Porcher, G. Thomas // *Phys. Rev. E*. 2001. V. 64. N. 1. P. 010902(R).
6. S.P. Kuznetsov, D.I. Trubetskov // *Radiophysics and Quantum Electronics*. 2004. V. 47. P. 341
7. S.P. Kuznetsov // *Phys. Rev. Lett.* 2005. V. 95. P. 144101
8. K. Pyragas // *Phys. Rev. E*. 1996. V. 54. P. 4508(R)
9. D.S. Goldobin, A.S. Pikovsky // *Phys. Rev. E*. 2005. V. 71. P. 045201
10. G. Benettin et al. // *Meccanica*. 1980. V. 15. P. 9.
11. П.В. Купцов // *Известия вузов. ПНД*. 2011. Т. 18, № 5. С. 93.
12. H. L. Yang, G. Radons // *Phil. Trans. R. Soc.* 2009. V. 367. P. 3197
13. Wolf et al. // *Physica D*. 1985. V. 16. P. 285.
14. S. Lepri, A. Politi, A. Torcini // *Chaos*. 1997. V. 7. P. 701

15. A.A. Koronovskii et al. // Phys. Rev. B. 2013. V. 88. P. 165304
16. A.E. Hramov et al. // Physics of Plasmas. 2012. V. 19. P. 082302

Моделирование транспорта заряда в цепочке полупроводниковых периодических наноструктур, разделенных сильнолегированными областями

В.А. Максименко^{1,2}, В.В. Макаров^{1,2}, А.Е. Храмов^{1,2}, А.А. Короновский^{1,2},
К.Н. Алексеев³, А.Г. Баланов³

¹СГТУ им. Гагарина Ю.А. 410054, Саратов, Россия

²СГУ им. Н.Г. Чернышевского, 410012, Саратов, Россия

³Loughborough University, Loughborough, UK

maximenkov1@gmail.com

Исследование полупроводниковых гетероструктур является перспективным направлением современной физики твердого тела, связанным как с выявлением фундаментальных закономерностей динамики отдельных заряженных частиц [1] и коллективного транспорта заряда [2], так и решением широкого круга прикладных задач по оптимизации существующих [3,4] и разработке новых твердотельных приборов электроники суб-ТГц и ТГц-диапазонов частот [5,6].

В настоящей работе рассматривается гетероструктура, представляющая собой N полупроводниковых сверхрешеток, разделенных областями сильнолегированного проводника. Подобные модели, в частности, структура, состоящая из $N=34$ сверхрешеток InAs-AlSb [7], и структура, основанная на сверхрешетках GaAs-AlGaAs [8], исследовались экспериментально и теоретически как системы, в которых возможна реализация терагерцового излучения за счет когерентных блоховских колебаний. При этом, нестационарный режим транспорта заряда, обусловленный эффектом Ганна, не рассматривался. В тоже самое время, согласно работам [9], нестационарный режим транспорта заряда (доменный транспорт) может быть также использован для генерации суб-ТГц и ТГц колебаний тока. Кроме того, в работе [10], установлено, что переход домена из одной среды в другую сопровождается нелинейными эффектами, влияющими на мощность возникающих колебаний тока. С учетом этого, исследование процессов коллективного транспорта заряда через гетероструктуру, состоящую из слоев полупроводника с различными свойствами, является интересным с позиций нелинейной динамики и прикладной физики.

На рисунке 1. представлена модель полупроводниковой гетероструктуры, состоящей из N сверхрешеток $SL_1...SL_N$, разделенных слоями сильнолегированного полупроводника $H_1...H_{N-1}$ ($n_H/n_D \sim 3$).

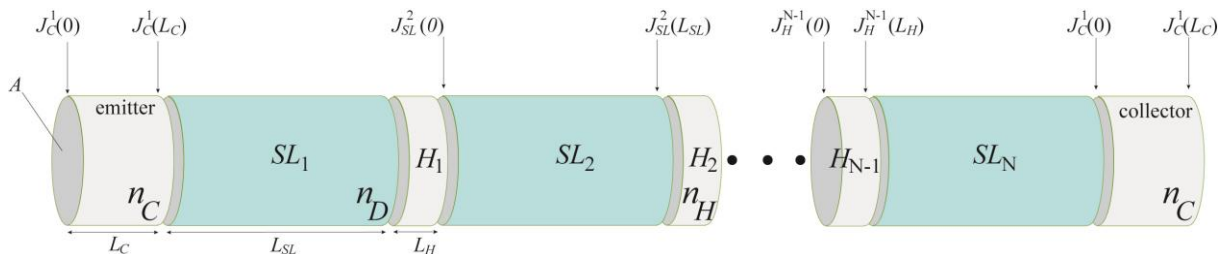


Рис. 1. Схематическое изображение полупроводниковой гетероструктуры, состоящей из полупроводниковых сверхрешеток GaAs-AlGaAs ($SL_1...SL_N$), разделенных сильнолегированными областями ($H_1...H_{N-1}$). n_C , n_D , n_H - равновесная концентрация носителей заряда на контактах, в сверхрешетках (SL) и в областях (H), A - площадь поперечного сечения, J - плотность тока.

Значения n_C , n_D , n_H определяют равновесную концентрацию носителей заряда на эмиттере и коллекторе структуры, в сверхрешетках и в областях полупроводника H , соответственно. L_C , L_{SL} , L_H определяют длины этих областей.

Рассматриваемые в данном случае сверхрешетки представляют собой периодические структуры GaAs-AlGaAs с сильносвязанными квантовыми ямами (период сверхрешетки меньше чем длина волны электрона). Согласно работам [11, 12], коллективная динамика носителей заряда в подобных сильносвязанных структурах, в рамках полуклассического приближения, может быть описана при помощи системы уравнений гидродинамики

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= -\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} (n - n_0), \\ \frac{\partial n}{\partial t} &= -\frac{1}{e} \frac{\partial J}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1)$$

При этом, для вычисления плотности тока необходимо использовать нелинейную зависимость средней дрейфовой скорости носителей заряда от напряженности электрического поля

$$J_{SL} = en \frac{\delta \Delta d}{2\hbar} \frac{eFd\tau / \hbar}{1 + (eFd\tau / \hbar)^2}. \quad (2)$$

Как было показано в работе [10], динамика носителей заряда в сильнолегированных полупроводниках может быть также описана при помощи системы (1), где плотность тока определяется на основании теории Друде [13] как

$$J_{C,H} = \frac{e^2 n \tau F}{m^*}. \quad (3)$$

Таким образом, интегрируя уравнения (1), (2), с учетом $n_0 = n_D$, вместе с уравнениями (1), (3), где $n_0 = n_C$ (для контактов) и $n_0 = n_H$ (для слоев сильнолегированного полупроводника), можно описать транспорт заряда через всю структуру.

На основании данного подхода в настоящей работе исследуется нестационарная динамика коллективного транспорта носителей заряда через полупроводниковую гетероструктуру и проводится анализ влияния ширины слоев полупроводника H на характеристики генерации. В частности, показана возможность работы данной связанной структуры в режиме последовательной реинжекции доменов заряда из сверхрешетки в сверхрешетку, что может позволить увеличить мощность генерируемых колебаний.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 15-32-20299) и Фонда некоммерческих программ «Династия».

ЛИТЕРАТУРА

1. A.O. Selskii et al. // Phys. Rev. B. 2011. V. 84. P. 235311
2. A.A. Koronovskii et al. // Phys. Rev. B. 2013. V. 88. P. 165304
3. H. Eisele et al. // IEEE Trans Microw. Theory. 2000. V. 48. P. 626
4. R. Kamoua // Solid-State Electronics. 1995. V. 38. N. 2. P. 269
5. H. Eisele, R. Kamoua // IEEE Trans Microw. Theory. 2004. V. 52. P. 2371
6. T. Hyart et al. // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 102. P. 140405

7. P.G. Savvidis // *Phys. Rev. Lett.* 2004. V. 92. P. 196802
8. J.C. Schmidt // *Superlattices and Microstructures.* 2012. V. 52. P. 1143
9. E. Schomburg et al. // *Appl. Phys. Lett.* 1999. V. 74. P. 2179.
10. V.A. Maksimenko et al. // *Europhysics Letters.* 2015. V. 109. P. 47007
11. T.M. Fromhold et al. // *Nature.* 2004. V. 428. P. 726.
12. L. Esaki, R. Tsu // *IBM J. Res. Dev.* 1970. V. 14. P. 61
13. P. Drude // *Ann. Phys.* 1900. V. 306. P. 566.

Математическое исследование особенности электромагнитного поля волновода в окрестности ребра диэлектрического клина

И.Е. Могилевский

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
mogilev@phys.msu.ru

В настоящее время является весьма актуальным расчет электромагнитного поля в волноведущих системах сложного заполнения, а также при наличии ребер на их границах. Хорошо известно, что наличие угловых точек у границы и у линий разрыва диэлектрической проницаемости в сечении волновода приводит к появлению особенностей у электромагнитного поля в окрестности особой точки границы или неоднородности заполнения [1]. Это существенно усложняет применение численных методов для расчета подобных систем.

Эффективным способом преодоления этих проблем является выделение особенности решения в явном виде, то есть построение асимптотики электромагнитного поля в окрестности ребра границы в волноводе [2,3], а также асимптотического представления электромагнитного поля в окрестности диэлектрического ребра внутри волновода [4]. При этом существенно используются результаты по асимптотике решения эллиптических краевых задач, представленные в работе В.А. Кондратьева [5], а также С.А. Назарова и Б.А. Пламеневского [6].

Рассматривается регулярный металлический радиоволновод с диэлектрическим заполнением, неоднородным в поперечном сечении. Предполагается, что электромагнитное поле волновода имеет гармоническую зависимость от времени вида $e^{-i\omega t}$. Боковая поверхность считается идеально проводящей, волновод представляет собой цилиндр $Q = \{(x, y) \in \Omega, z \in (-\infty, +\infty)\}$. Магнитная проницаемость среды, заполняющей волновод, равна $\mu \equiv 1$. Диэлектрическая проницаемость ε — кусочно непрерывная скалярная вещественная функция.

При указанных условиях для компонент электромагнитного поля в работе [7] получена следующая математическая постановка задачи (для собственных векторов)

$$\begin{aligned} -\operatorname{grad} \operatorname{div} H_{\perp} - k^2 \varepsilon \operatorname{rot} E_z &= -\gamma^2 H_{\perp}, \\ -ik \operatorname{rot} \varepsilon H_{\perp} - \operatorname{div} \varepsilon \operatorname{grad} E_z &= -\gamma^2 \varepsilon E_z, \end{aligned} \quad (1)$$

где $k = \frac{\omega}{c}$ — волновой вектор, γ — спектральный параметр, предполагается, что все функции имеют зависимость от z вида e^{iyz} . Граничные условия и условия сопряжения имеют вид

$$\begin{aligned} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega} &= 0, E_z|_{\partial\Omega} = 0, \\ [(\mathbf{H} \cdot \mathbf{n})]|_C &= 0, [E_z]|_C = 0, (\mathbf{H} \times \mathbf{n})|_C = 0, \\ [\operatorname{div} H_{\perp}]|_C &= 0, [\varepsilon (\operatorname{grad} E_z + ik (\mathbf{H} \times \mathbf{i}_z)) \cdot \mathbf{n}]|_C = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь использованы следующие обозначения: $H_{\perp} = \{H_x, H_y\} = \{H_r, H_{\phi}\}$, C — линия разрыва диэлектрической проницаемости, \mathbf{n} — нормаль к границе области или линии разрыва,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} H_{\perp} &= \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y}, \operatorname{rot} H_{\perp} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}, \\ \operatorname{grad} E_z &= \mathbf{i}_x \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial E_z}{\partial y}, \operatorname{rot} E_z = \mathbf{i}_x \frac{\partial E_z}{\partial y} - \mathbf{i}_y \frac{\partial E_z}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3)$$

Условие $[\operatorname{div} H_{\perp}]_C = 0$ следует из $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ и $[H_{\tau}]_C = 0$. Последнее условие сопряжения $[\varepsilon(\operatorname{grad} E_z + ik(\mathbf{H} \times \mathbf{i}_z)) \cdot \mathbf{n}]_C = 0$ следует из уравнений Максвелла и условия $[\varepsilon E_n]_C = 0$.

В работе [7] рассмотрен вопрос о поиске слабых решений задачи (1)-(2). Показано, что данная задача порождает ограниченный оператор $T: (L_2(\Omega))^3 \rightarrow W$ компактный в подпространстве V , гильбертова пространства W , выделяемом дополнительным условием

$$\operatorname{rot} H_{\perp} = -ik\varepsilon E_z, \quad (4)$$

которое понимается в смысле обобщенных функций. Таким образом, спектр задачи (1)-(2), рассматриваемой в указанном пространстве, состоит из счетного множества возрастающих по модулю собственных значений.

Чтобы провести исследование поведения электромагнитного поля в окрестности угловой точки линии разрыва диэлектрической проницаемости, сначала данная задача рассматривается на всей плоскости вместо области Ω . В дальнейшем использование срезающей функции позволяет свести задачу в конечной области к задаче на всей плоскости. Дополнительно предполагается, что диэлектрическая проницаемость является кусочно постоянной (по крайней мере, в окрестности диэлектрического ребра). Для удобства описания вводится полярная система координат с центром в угловой точке линии разрыва.

Уравнение для компоненты электрического поля E_z принимает вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \operatorname{div} E_z &= \frac{2}{r^2} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \frac{\partial u}{\partial \varphi}(r, 0) \delta(\varphi) - \frac{2}{r^2} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \frac{\partial u}{\partial \varphi}(r, 0) \delta(\varphi - \omega_0) + \\ &+ \gamma^2 E_z - \frac{ik}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rH_{\varphi}) + \frac{ik}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (5)$$

Обозначим $\alpha = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}$. Для компонент H_r и H_{φ} магнитного поля получается система

$$\begin{aligned} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_r) \right) + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (rH_{\varphi}) \right) &= -k^2 \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + \gamma^2 (rH_r), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} (rH_r) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (rH_{\varphi}) &= -k^2 \varepsilon r \frac{\partial E_z}{\partial r} + \gamma^2 (rH_{\varphi}), \end{aligned} \quad (6)$$

дополнительное условие (4) принимает вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_{\varphi}) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (rH_r) = -ik\varepsilon E_z.$$

Тем же методом, что применен в работе [9] для скалярного случая, удается получить следующее представление электрического поля в окрестности угловой точки линии разрыва:

$$E_z(r, \varphi) = \chi \sum_{-\delta < v_k^{(1)} < 1} r^{v_k^{(1)}} \left\{ C_k^{(1)} \cos[(\pi - \varphi)v_k^{(1)}] + D_k^{(1)} \cos[(\pi - |\omega_0 - \varphi|)v_k^{(1)}] \right\} + \\ + \chi \sum_{-\delta < v_k^{(2)} < 1} r^{v_k^{(2)}} \left\{ C_k^{(2)} \cos[(\pi - \varphi)v_k^{(2)}] + D_k^{(2)} \cos[(\pi - |\omega_0 - \varphi|)v_k^{(2)}] \right\} + \mathfrak{R}(r, \varphi).$$

где $v_k^{(1)}$ и $v_k^{(2)}$ — решения уравнений

$$\sin \pi v_k^{(1)} - \alpha \sin(\pi v_k^{(1)} - v_k^{(1)} \omega_0) = 0,$$

$$\sin \pi v_k^{(2)} + \alpha \sin(\pi v_k^{(2)} - v_k^{(2)} \omega_0) = 0,$$

(кроме $v_k = 0$), $\chi(r) = \begin{cases} 1, & r \leq d/2, \\ 0, & r > d, \end{cases} \chi(r) \in C^\infty$ — срезающая функция,

$\mathfrak{R}(r, \varphi)$ — гладкая часть решения, для которой получена оценка в соответствующей норме.

Главную особенность в окрестности диэлектрического ребра в волноводе имеет именно электрическое поле. Сама продольная компонента электрического поля ограничена в окрестности ребра, а ее производная имеет степенную особенность, причем вид функции, описывающей особенность, и показатели степени соответствуют полученному ранее для скалярного случая в работе [9].

Данное представление поля в окрестности диэлектрического ребра позволяет повысить точность численного решения, полученного с помощью метода конечных элементов. Знание точного вида сингулярности электромагнитного поля позволяет в пространство пробных функций ввести функции, имеющие сингулярности данного вида, и тем самым точно аппроксимировать сингулярную часть решения. Это дает возможность получить скорость сходимости приближенного решения к точному, соответствующую гладкому случаю.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (грант НК-12-01-00479).

ЛИТЕРАТУРА

1. М.Ш. Бирман, М.З. // Успехи мат. наук, 1987, Т.42, вып.6, С.61-76.
2. Боголюбов А.Н. и др. // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал). <http://jre.cplire.ru>. 2001. №8.
3. А.Н. Боголюбов и др. // Радиотехника и электроника. 2003. Т.48. №7. С.787-794.
4. А. Н. Боголюбов, И. Е. Могилевский, А.Г. Свешников // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015 Т.55, № 3, С.446-459.
5. В.А. Кондратьев // Труды Московского Математического Общества, Т.16, 1967, С.227-313.

6. С.А. Назаров, Б.А. Пламеневский «Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей» М.: Наука, 1991.

7. А.Л. Делицын // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т.39, № 2. С.315-322.

8. Г.А. Гринберг Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.: Изд-во АН СССР. 1948.

9. А. Н. Боголюбов, И. Е. Могилевский // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011 Т.51, № 12, С.2253–2259.

Численное моделирование волновых процессов в связанных структурах на основе магнитных кристаллов

М.А. Морозова, Е.Н. Бегинин, А.Ю. Шараевская
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: upark@inbox.ru, maluginama@yandex.ru, egbegin@gmail.com

В последнее время большой интерес вызывает получение кристаллов, подобных фотонным [1], на основе магнитных плёнок – магнитных кристаллов (МК) [2,3], в которых распространяющимися волнами являются спиновые волны (магноны). МК имеют определенные преимущества по сравнению с фотонными кристаллами: возможно управление свойствами магнитных кристаллов внешним магнитным полем; в частности, магнитной запрещенной зоной, можно создавать кристаллы в диапазоне СВЧ размером порядка нескольких миллиметров, использование планарной технологии и др.

В настоящей работе на основе анализа дисперсионных характеристик рассматриваются основные особенности формирования запрещенных зон (ЗЗ) в периодической структуре, которая представляет собой связанную систему в виде: магнитный кристалл - ферромагнитная пленка. Важной особенностью связанных структур является возбуждение на одной частоте двух нормальных мод - быстрой и медленной волн с различными групповыми и фазовыми скоростями. Впервые механизм формирования запрещенных зон в периодической структуре, представляющей собой два связанных одномерных МК с одинаковыми параметрами, рассмотрен авторами в [4].

Периодическая структура, рассматриваемая в работе, в общем случае представляет собой МК и ферритовую пленку, разделенных диэлектрическим слоем толщиной D , как показано на рис. 1.

Магнитный кристалл, в свою очередь, представляет собой ферромагнитную пленку с намагниченностью насыщения M_0 , на поверхности которой нанесены неоднородности в виде канавок. Толщина исходной пленки d_1 , глубина канавки $\Delta d = d_1 - d_2$, её ширина $a_1 = L - a_2$, период структуры L . Система помещена во внешнее магнитное поле H_0 , направленное вдоль оси z и соответствует значению, при котором в каждой из пленок вдоль оси y распространяются медленные спиновые волны – прямые объёмные магнитостатические волны (ПОМСВ) [5].

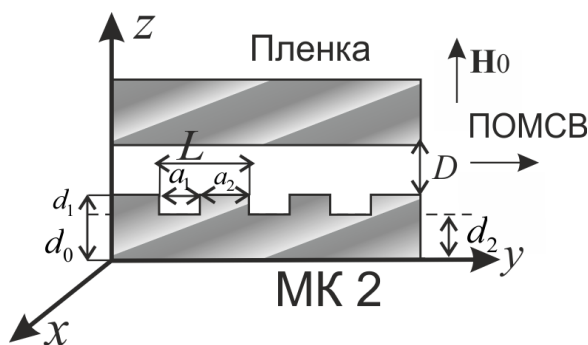


Рис. 1. Схема структуры МК-Пленка

На основе метода связанных волн построена модель в виде системы алгебраических уравнений для огибающих прямых и встречных волн, на основе

которой получено дисперсионное уравнение для рассматриваемой структуры. В этом случае характеристики ЗЗ должны определяться двумя коэффициентами связи: K – электродинамический параметр, определяющий связь между пленками, $\delta d_{1,2}$ – параметр, характеризующие геометрические размеры МК и ферритовой пленки, для МК $\delta d_1 \neq 0$, для пленки $\delta d_2 = 0$. Решение полученного уравнения в области первого брэгговского резонанса ($0 < kL < 2\pi$) приведено на рис.2 (пунктирные кривые). Для случая связанной структуры в виде МК-пленка формируются три запрещенные зоны (G-1, G-2, G-3), причем G-1 и G-2 соответствуют брэгговскому условию возникновения ЗЗ, а G-3 не соответствует. Для сравнения на этом рисунке приведены результаты численного моделирования рассматриваемой структуры в программном пакете COMSOL (сплошные кривые). Как видно из результатов сравнения теоретические результаты на основе метода связанных волн достаточно хорошо совпадают с результатами численного моделирования.

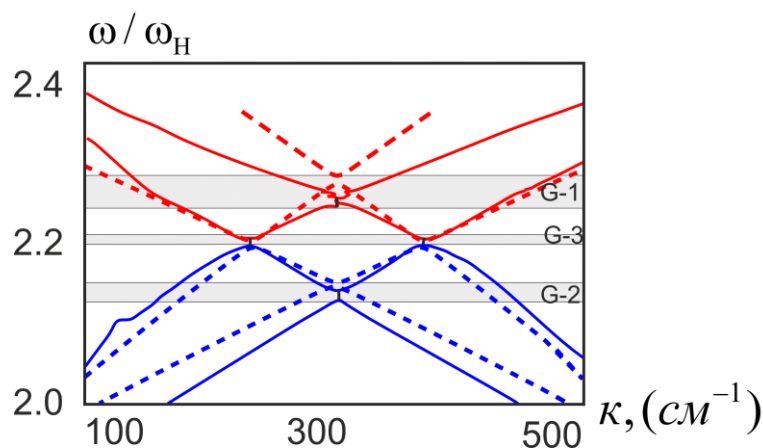


Рис.2. Дисперсионные характеристики для структуры МК-Пленка для быстрой (красные кривые) и для медленной (синие кривые) волн: результаты теоретического расчета (пунктирные кривые) при $\delta d_1=0.67$, $K=0.23$; численного моделирования (сплошные кривые); $\omega_M = 2\pi \cdot 7,8$ ГГц, $\omega_H = 2\pi \cdot 3$ ГГц, $d_1 = 10$ мкм, $d_2 = 9$ мкм, $a_{1,2} = 50$ мкм, $L = 100$ мкм

На основе теоретического анализа и численного моделирования в работе показано, что в зависимости от величины связи между ферромагнитными пленками число запрещенных зон в структуре может изменяться (от одной до трех) в полосе первого брэгговского резонанса. Таким образом, изменяя связь между слоями структуры можно эффективно управлять характеристиками ЗЗ (их числом, шириной и положением в частотном спектре магнитоэлектронных волн).

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 14-07-31142 и программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ- 828.2014.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кившарь Ю. С., Агравал Г. П. “Оптические солитоны. От волоконных световодов к фотонным кристаллам”. М. : Физматлит, 2005. 648 с.
2. Гуляев Ю. В., Никитов С. А., Животовский Л. В. и др. // Письма в ЖЭТФ. 2003. Т. 77. № 10. С. 670–674.

3. S.A. [Nikitov](#), Ph. [Tailhadesand C.S. Tsai](#) // [Journal of Magnetism and Magnetic Materials](#), 2001. Vol. 236, No. 3, 320-330.

4. Морозова М. А., Шараевская А. Ю. // Гетеромагнитная микроэлектроника. 2013. Вып. 15. С. 82–93.

5. *Ваиковский А.В., Стальмахов В.С., Шараевский Ю.П.* “Магнитостатические волны в электронике СВЧ”. Саратов: СГУ. 1993.

Математическое моделирование дифракции электромагнитного поля в компактном полигоне

А.В. Никитенко^{1,2}, А.Н. Боголюбов²

¹ИТПЭ РАН

²МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет
kocheku@gmail.com

Проведение измерений электромагнитных характеристик, например эффективных параметров рассеяния антенн, на открытом полигоне часто бывает неудобно по целому ряду причин. Поэтому большое распространение получили закрытые измерительные комплексы – безэховые камеры и компактные полигоны. Компактный полигон состоит из закрытого помещения, стенки которого покрыты радиопоглощающим материалом, и коллиматора. Основной характеристикой компактного полигона является уровень неравномерности поля в рабочей зоне[1].

В данной работе предложен алгоритм, позволяющий дать численную оценку искажения поля в рабочей зоне, связанную с неидеальностью радиопоглощающего материала, размещенного на стенках камеры, в частности, отражение от РПМ под углами, отличными от зеркальных (т.н. дифракционные лепестки).

Общая схема алгоритма вычисления поля в рабочей зоне состоит из трех этапов. Первый этап состоит в вычислении поля, созданного коллиматором, которое попадает на исследуемую стенку. Для этого используется программа *FEKO*. Это поле раскладывается в ряд по плоским волнам. Второй этап состоит в вычислении коэффициентов отражения каждой плоской волны от РПМ. Эта задача решается методом связанных волн[2-4], который позволяет разделять вклады зеркального отражения и вклады различных дифракционных эффектов, что облегчает анализ и оптимизацию безэховой камеры[5]. На рис. 1 представлены коэффициенты отражения от пирамидального РПМ для различных гармоник.

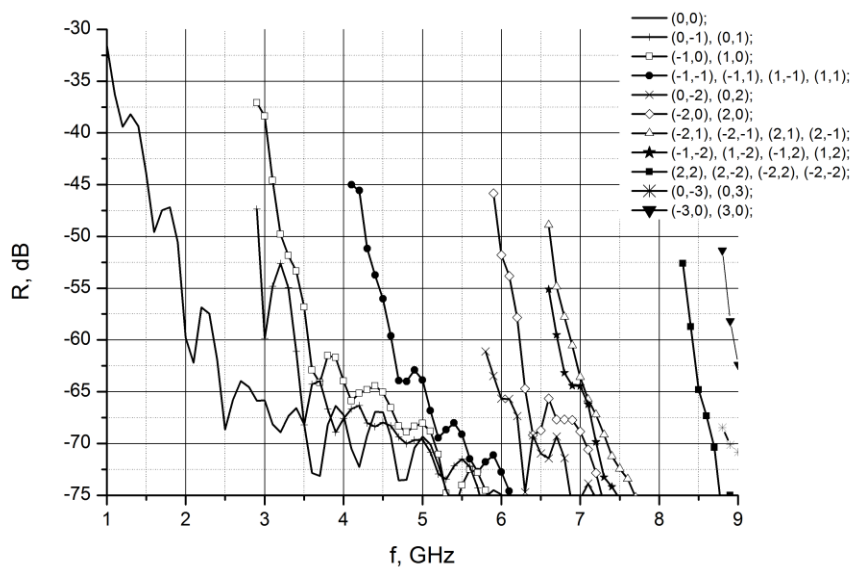


Рис. 1. Зависимость амплитуды зеркального отражения (сплошная линия) и отраженных гармоник от частоты падающего поля. Пирамидальный радиопоглощающий материал. Углы падения: $\varphi=0^\circ$, $\theta=0^\circ$.

Третий этап состоит в суммировании интересующих отраженных волн в рабочей зоне камеры и формировании готового результата. Учет поляризации и полный расчет отраженного поля рассчитывается следующим образом. Пусть оси X и Y располагаются в плоскости, параллельной стенке, от которой рассчитывается отражение. Обозначим F_x , F_y матрицы коэффициентов Фурье падающего поля. Тогда разложим каждую плоскую волну на две ортогонально поляризованные волны, амплитуды которых вычисляются следующим образом:

$$A_{0,pq} = \frac{F_{x,pq} \cos \varphi_{pq} + F_{y,pq} \sin \varphi_{pq}}{\cos \theta_{pq}},$$

$$A_{90,pq} = F_{y,pq} \cos \varphi_{pq} - F_{x,pq} \sin \varphi_{pq},$$

где

$$\theta_{pq} = \arcsin \frac{\sqrt{k_{xp}^2 + k_{yq}^2}}{k_0},$$

$$\varphi_{pq} = \arctan \frac{k_{yq}}{k_{xp}}.$$

Суммарное отраженное поле можно найти следующим образом:

$$E_r(x, y, z) = \sum_p \sum_q \sum_{h1} \sum_{h2} (A_{0,pq} R_{0,pq,h1,h2} + A_{90,pq} R_{90,pq,h1,h2}) e^{-i(k_{x,p,h1,h2}x + k_{y,q,h1,h2}y + \sqrt{k^2 - k_{x,p,h1,h2}^2 - k_{y,q,h1,h2}^2}z)}$$

На рис. 2 представлена амплитуда зеркально отраженного поля от задней стенки компактного полигона, покрытой пирамидальным радиопоглощающим материалом. Расстояние до стенки – 2 метра. Центр рабочей зоны находится в координатах 0,0, диаметр рабочей зоны – 1.8 метра. Частота 3.4 ГГц. Поскольку пирамидальный РПМ лучше всего поглощает при нормальном падении волны, отражение невелико. Однако, дифракционные лепестки могут значительно превышать уровень зеркального отражения, что видно на рис. 3 на примере гармоники (1,0). Такое отражение сильно сказывается на равномерности поля в рабочей зоне и может потребовать модификации камеры.

Предложенный алгоритм позволяет рассматривать различные эффекты, вносящие вклад в неравномерность поля в рабочей зоне в любой комбинации, сравнивать их величины, исследовать влияние изменения конструкции камеры и электродинамических характеристик материала на эти эффекты по отдельности. Он может быть использован для разработки и оптимизации безэховых камер и компактных полигонов.

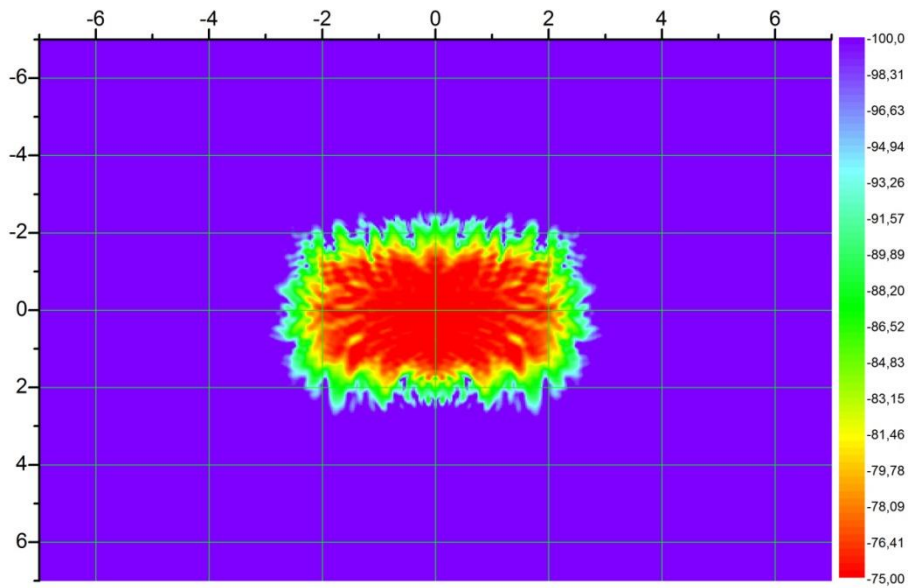


Рис. 2. Отражение от задней стенки компактного полигона. Главная гармоника (0,0). Частота 3.4 ГГц.

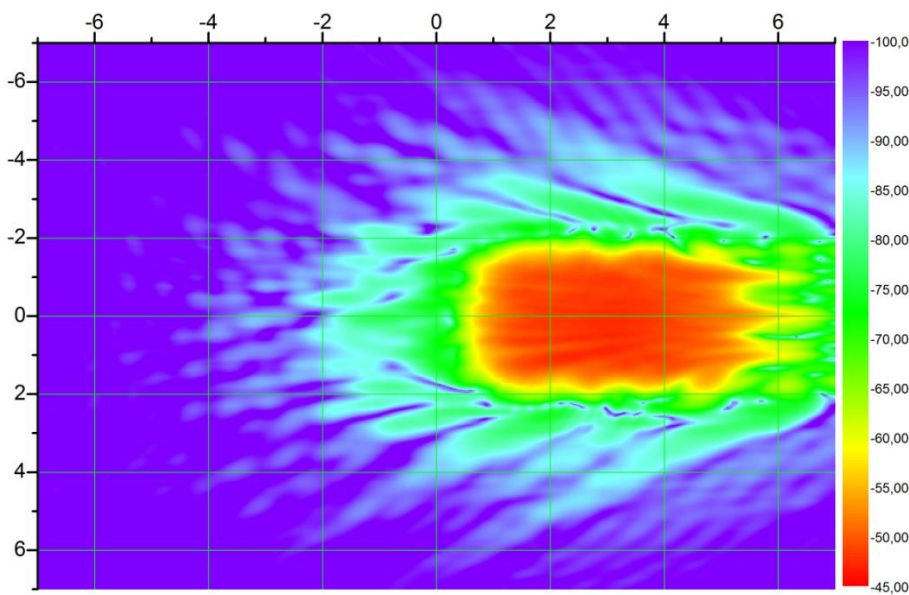


Рис. 3. Отражение от задней стенки компактного полигона. Гармоника (1,0). Частота 3.4 ГГц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.П. Балабуха и др. “Компактные полигоны для измерения характеристик рассеяния” М.: Наука, 2007.
2. M.G. Morahan et al. // J. Opt. Soc. Am. A 12, 1068-1076 (1995).
3. А.В. Никитенко и др. // Мат. модел., 2014, том 26, номер 9, стр. 18-32.
4. А.В. Никитенко и др. // Журнал Радиоэлектроники (электронный журнал), номер 12, 2014. <http://jre.cplire.ru/jre/dec14/15/text.pdf>
5. А.В. Никитенко и др. // Журнал Радиоэлектроники (электронный журнал), номер 4, 2015. <http://jre.cplire.ru/jre/apr15/13/text.pdf>

Применение гибридных численных методов для решения задач анализа и синтеза многослойных дифракционных решеток

А.А. Петухов

*Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
физический факультет, кафедра математики*
petukhov@physics.msu.ru

В современной лазерной технике, системах коммуникации, космических исследованиях и многих других областях науки и техники для управления электромагнитным излучением широко применяются дифракционные решетки [1]. Перед проведением экспериментальных исследований и изготовлением дифракционной структуры с конкретными параметрами традиционно применяются методы математического моделирования, причем обычно рассматривается два типа задач - прямые задачи анализа дифракционных решеток и обратные задачи синтеза дифракционных решеток с заданными характеристиками. При этом при решении задачи синтеза требуется многократно решать прямую задачу с направленно изменяемыми параметрами соответствующей дифракционной структуры. Эффективное решение задач синтеза дифракционных решеток, в первую очередь, требует наличия эффективного и надежного метода решения соответствующей прямой задачи.

Для решения прямых задач математического моделирования дифракционных решеток известно большое количество разнообразных методов. Однако следует заметить, что эти методы являются либо достаточно общими и не учитывают возможных особенностей задачи, либо специализированными под узкий класс дифракционных решеток. Например, для решения задач моделирования дифракции на решетках с произвольной формой профиля применяются такие методы, как метод конечных элементов [2] или метод конечных разностей [3]. Эти методы позволяют работать с произвольной геометрией, однако не учитывают возможного наличия симметрии и, кроме того, требуют больших объемов вычислений. Для решения задач моделирования дифракционных решеток применяется также некоторые специальные методы, например, строгий метод связанных волн [4-5] (RCWA - Rigorous Coupled Wave Analysis), который является эффективным лишь в случае простой геометрии решетки. Известны также методы [6], использующие плоскостойкое приближение для неоднородных дифракционных решеток и реализующие соответствующую матричную технику, эффективно применяемую для моделирования многослойных покрытий, состоящих из однородных слоев [7].

С совершенствованием технологии изготовления дифракционных решеток их строение существенно усложняется, появляются новые классы дифракционных решеток. Кроме того, часто применяются гибридные дифракционные решетки, представляющие собой комбинацию дифракционных элементов с различным строением, например, комбинация дифракционных решеток с различным профилем, комбинация дифракционной решетки с многослойным покрытием и т.п. Для таких классов дифракционных решеток существующих методов моделирования оказывается недостаточно, либо их применение оказывается неэффективным.

Из всех классов дифракционных решеток следует особо выделить достаточно широкий класс многослойных дифракционных решеток. К этому классу относятся дифракционные решетки, которые имеют (в обобщенном смысле) многослойное строение. Таким образом, многослойной будем называть такую дифракционную решетку, которая в точности или приближенно представляет собой совокупность

однородных или неоднородных слоев, каждый из которых имеет различные свойства. Такие дифракционные решетки, с одной стороны, являются наиболее используемыми, благодаря своей относительно простой технической реализуемости, а с другой - позволяют в широких пределах изменять параметры взаимодействующего с ними электромагнитного излучения. Указанные выше примеры гибридных дифракционных структур также относятся к классу многослойных дифракционных структур. Многослойную дифракционную решетку также представляет собой, например, ячейка солнечной батареи, содержащая один или несколько неоднородных слоев-решеток с различным профилем изменения показателя преломления и несколько однородных оптических слоев. Для такого класса дифракционных решеток требуется разработка и реализация новых методов математического моделирования, применение которых позволит эффективно решать как прямые, так и обратные задачи моделирования многослойных дифракционных решеток.

В данной работе описывается применение для моделирования многослойных дифракционных решеток гибридного численного метода, основанного на совместном применении неполного метода Галеркина и метода матриц рассеяния [8]. Обладая хорошими свойствами сходимости и невысокой вычислительной сложностью, предлагаемый метод обеспечивает в целом эффективное решение задач анализа в классе многослойных дифракционных решеток. Кроме того, он является в достаточной степени универсальным и может быть успешно применен для моделирования произвольных дифракционных структур, имеющих многослойное строение. В работе также приводятся примеры использования предлагаемого гибридного метода в качестве метода решения прямой задачи при решении задачи синтеза многослойных дифракционных решеток.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ch. Palmer, E. Loewen "Diffraction Grating Handbook". Newport Corporation, 6th edition, 2005.
2. M.K. Moaveni et al. // Int. J. of Electronics. 1976. V.40. No 3. P. 225.
3. H. Ichikawa // J. Opt. Soc. Am. A .1998. V.15. No 1. P. 152.
4. M.G. Moharam et al. // J. Opt. Soc. Am. A. 1995. V. 12. No 5. P. 1068.
5. M.G. Moharam et al. // J. Opt. Soc. Am. A. 1995. V. 12. No 5. P. 1077.
6. В А. Пермяков // Радиоэлектроника. 1994. Т. 39. No 3. С. 365.
7. М. Борн, Е. Вольф "Основы оптики". М.: Наука, 1973.
8. А.А. Петухов // Математическое моделирование. 2013. Т. 25. No 6. С. 41.

Математическое моделирование задач маскировки с помощью метода волнового обтекания

В.В. Ровенко, И.Е. Могилевский

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
rovenko.vladimir@physics.msu.ru mogilev@phys.msu.ru

Маскировка методом волнового обтекания. Достоинства, недостатки и способы практической реализации. Применение метаматериалов в построении оболочки.

В настоящее время всё большую актуальность приобретают задачи радиолокационной маскировки. Одним из наиболее перспективных среди методов их решения является метод волнового обтекания. Основная суть метода: маскирующее покрытие должно так искривлять фронт падающего электромагнитного излучения, чтобы электромагнитные волны огибали объект, а на выходе принимали бы прежнее направление. Практическую реализацию предполагается осуществлять за счет неоднородности вещества маскирующего покрытия специального вида. Лучше всего такое маскирующее покрытие осуществляется с помощью метаматериалов, в силу своих свойств, предоставляющих беспрецедентные возможности управления потоками электромагнитного излучения, как в нано-, так и в макромасштабах [1-2].

Расчёт параметров маскирующего покрытия.

При расчете параметров маскирующего покрытия используется тот факт, что уравнения Максвелла инвариантны относительно преобразований координат при условии, что основные оптические параметры материалов, а именно тензоры диэлектрической проницаемости $\epsilon(\mathbf{r})$ и магнитной проницаемости $\mu(\mathbf{r})$ также соответствующим образом преобразуются [1]. На основе этого, внутри маскирующей оболочки мысленно создается пространство с искривлённой метрикой, для чего находится необходимое преобразование координат. Поскольку вид уравнений Максвелла в исходной и преобразованной криволинейной системах координат одинаков, то и решения данных уравнений будут иметь одинаковый вид по отношению к своим системам координат. Тогда среда маскирующей оболочки будет искривлять прямолинейно распространяющуюся волну также, как найденное преобразование координат искривляет прямую линию.

Если соответствующее координатное преобразование не затрагивает временной области, то фазы каждой электромагнитной волны в исходной и преобразованной системах равны между собой в каждый момент времени. Таким образом, полученные параметры маскирующего покрытия будут соответствовать всем условиям невидимости [1-2].

Математическое исследование маскирующих оболочек. Маскировка идеально проводящего шара.

Математическое исследование маскирующих оболочек заключается в решении задачи дифракции падающего излучения на объекте, окружённом оболочкой с заданными параметрами. Рассмотрим вопрос более подробно, взяв в качестве падающего излучения плоскую волну, а в качестве объекта идеально проводящий шар, окруженный оболочкой в виде шарового слоя.

Математическая постановка задачи:

Полное электромагнитное поле представляется в виде суммы падающего и дифрагированного полей:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_f &= \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}, \\ \mathbf{H}_f &= \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Здесь

$\{\mathbf{E}_0; \mathbf{H}_0\} = \{-e^{ikz} \mathbf{j}; e^{ikz} \mathbf{i}\}$ – известная нам распространяющаяся вдоль оси z плоская волна (падающее поле).

$\{\mathbf{E}; \mathbf{H}\}$ – неизвестное дифрагированное поле. В случае идеальной маскировки оно должно равняться нулю.

Теперь перед нами стоит задача нахождения полей $\{\mathbf{E}; \mathbf{H}\}$.

С помощью парциальных условий излучения [3-4] задача в бесконечной области сводится к задаче в конечной области (окруженной поверхностью Σ_{R_0}).

Дифрагированное поле ищется в виде суммы полей электрического и магнитного типа. С учётом вышесказанного, необходимо решить следующую задачу рассеяния плоской волны (для поля магнитного типа):

$$\begin{cases} \Delta \psi_n = 0, & r > R_0, \\ \psi_n = 0, & r = R_0, \\ \psi_n = 0, & \theta = 0, \pi, \\ \psi_n = 0, & \varphi = 0, 2\pi. \end{cases}$$

Здесь:

$$\psi_n = \xi_n^{(1)}(kr) Y_n(\theta, \varphi),$$

$$\xi_n^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(kr) \text{ – сферические функции Ханкеля.}$$

$Y_n(\theta, \varphi)$ – сферические функции.

\bar{e}_m, \bar{h}_m – базисные векторы:

$$\mathbf{e}_n(\theta, \varphi) = [\nabla_{\theta\varphi} Y_n, \bar{i}_r] = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_n}{\partial \varphi} \mathbf{i}_\theta - \frac{\partial Y_n}{\partial \theta} \mathbf{i}_\varphi,$$

$$\mathbf{h}_n(\theta, \varphi) = \nabla_{\theta\varphi} Y_n = \frac{\partial Y_n}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_n}{\partial \varphi} \mathbf{i}_\varphi,$$

С помощью парциальных условий излучения [3-4] задача в бесконечной области сводится к задаче в конечной области (окруженной поверхностью Σ_{R_0}).

В области, ограниченной Σ_{R_0} , для построения приближенного решения применяется неполный метод Галеркина [3-4]. Касательные компоненты искомого поля ищутся через разложения по специальным базисам (своим для полей разных типов, например, (2) и (3) – базис для поля магнитного типа) для конечного числа базисных функций N . Для поля магнитного типа:

$$H_\theta = \sum_{n=1}^N b_n(r) Y_{n\theta}, H_\varphi = \sum_{n=1}^N b_n(r) Y_{n\varphi},$$

$$E_\theta = \sum_{n=1}^N c_n(r) Y_{n\varphi}, E_\varphi = -\sum_{n=1}^N c_n(r) Y_{n\theta}.$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$Y_{n\theta} = \frac{\partial Y_n}{\partial \theta}, \quad Y_{n\phi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_n}{\partial \phi}.$$

Радиальные компоненты полей могут быть определены через касательные с помощью радиальных уравнений Максвелла [4]. Уравнения для коэффициентов касательных составляющих можно получить, спроектировав уравнения Максвелла на базисные векторы [4].

Таким образом, для коэффициентов разложения получается следующая краевая задача (для поля магнитного типа):

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r b_m(r)) + (A_m + B_m) c_m(r) &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r c_m(r)) + \tilde{A}_m b_m(r) &= 0 \end{aligned}$$

Краевые условия получаются из условий на границе маскируемого объекта и парциальных условий излучения. На границе оболочка-среда ставятся условия сопряжения.

Для поля электрического типа имеют место аналогичные соотношения.

Алгоритм и результаты моделирования

Решение полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений осуществляется численно с помощью одностадийной схемы Розенброка с комплексным коэффициентом [5]. Также используется метод секущих [6].

Результаты моделирования на 2106 узлах:

$$R_1 = 1 \text{ см}, \quad R_2 = 2 \text{ см}, \quad R_0 = 5 \text{ см}, \quad N = 9, \quad \lambda = 1 \text{ см}$$

λ – длина волны падающего излучения.

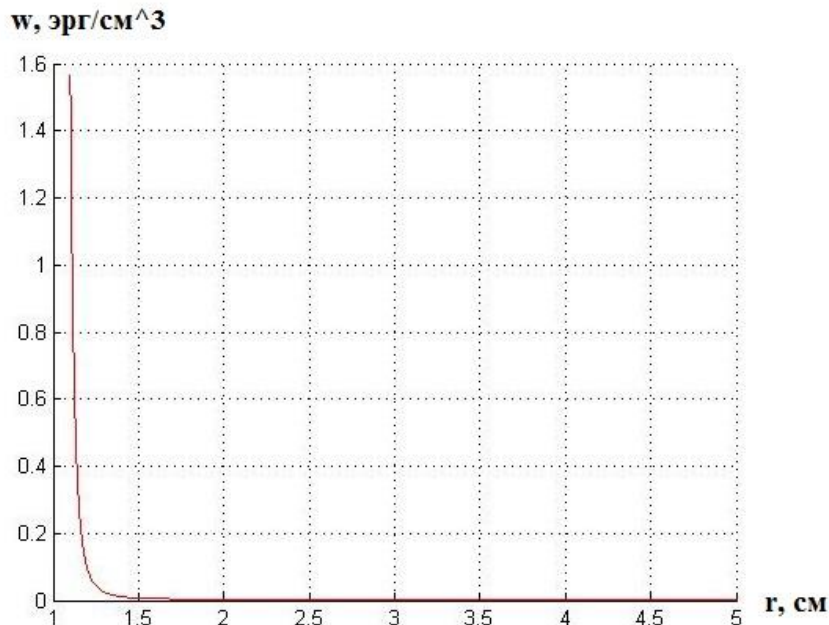


Рис. 1. Распределение плотности энергии в зависимости от расстояния.

Порядок значений плотности энергии вне оболочки $w = 10^{-4}$ эрг/см³, что указывает на наличие маскировочного эффекта.

ЛИТЕРАТУРА

2. А.Е. Дубинов, Л. А. Мытарева // *УФН* 2010 Т. 180. С. 475.
3. А.Е. Дубинов, Л. А. Мытарева // *УФН* 2012 Т. 182. С. 337.
4. А.Г. Свешников, А.С. Ильинский // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1971. Т. 11. №4. С.960.
5. А.Г. Свешников, И.Е. Могилевский «Избранные математические задачи теории дифракции». М.: Физический ф-т МГУ, 2012.
6. Е.А. Альшина, А.Б. Альшин, Н.Н. Калиткин, А.Б. Корягина // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2006. Т. 46. № 8. С. 1392.
7. Н.Н. Калиткин, Е.А. Альшина «Численные методы в двух книгах. Кн. 1: Численный анализ». М.: Академия, 2013.

Геометрическая фаза и метод катящегося конуса Могена-Пуанкаре при расчете резонатора с оптически хиральной средой

И.В. Тимофеев^{1,2}, В.А. Гуняков¹, В.С. Сутормин¹, С.А. Мысливец^{1,2}, Н.В. Рудакова²,
В.Г. Архипкин¹, С.Я. Ветров^{1,2}, В. Ли³, В.Я. Зырянов¹

¹ Институт Физики им. Л.В. Киренского, Красноярский научный центр, СО РАН,

² Сибирский Федеральный университет,

³ Национальный университет Чжао Тунг, Тайвань.

tiv@iph.krasn.ru

Волновые процессы в таких неоднородных средах, как жидкие кристаллы (ЖК), поражают глубиной связей между наблюдаемыми здесь физическими явлениями [1]. Одна из таких связей прослеживается между понятием геометрической фазы (ГФ) [2], иначе называемой топологической фазой, и рядом явлений в квантовой, релятивистской, классической физике, в частности, в поляризационной оптике [3]. Значительное внимание привлекает исследование ЖК, помещенного в резонатор Фабри-Перо, где легкость управления ЖК при помощи малых электрических напряжений совмещается с высокой разрешающей способностью резонатора. Это позволяет управлять основными характеристиками прошедшего света: пропусканием, фазой, поляризацией [4]. Управлять поляризацией удобно в адиабатическом волноводном режиме Могена [5-6] в закрученном слое нематического ЖК (твист-слое нематика), либо в твист-нематическом резонаторе Фабри-Перо (ТН-РФП) [7-8].

Данная работа исследует направление спектрального сдвига (СС) пиков пропускания при закручивании ЖК-структуры. Условие положительной обратной связи описывает СС, обусловленный двумя типами связей между четырьмя бегущими волнами ТН-РФП, различными по направлению и поляризации. Первый тип связи – это интересующее нас закручивание ЖК, спектральный сдвиг закручивания (ССЗ). Вторым тип – это связь мод при отражении от зеркал, спектральный сдвиг отражения (ССО).

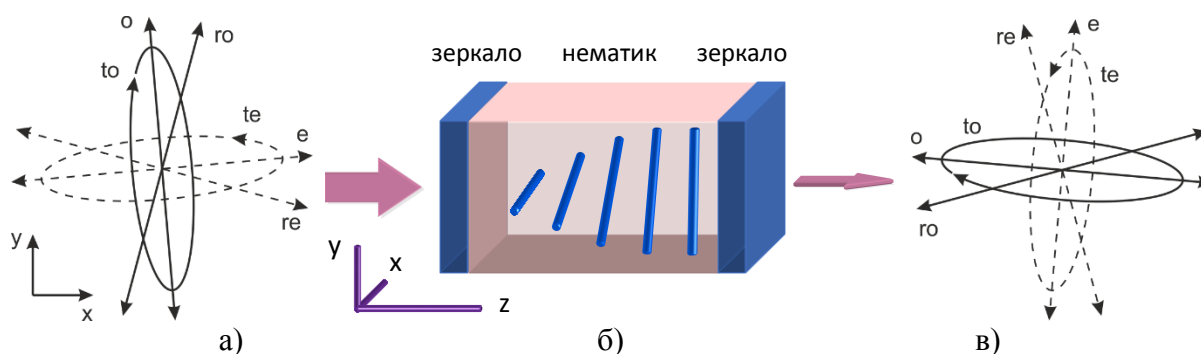


Рис. 1. Схема резонатора с оптически хиральной анизотропной средой в виде твист-нематика б). Различные поляризации света на входе а) и на выходе в). При закручивании слоя нематика e- и o-волны перестают быть собственными (не сохраняют свою поляризацию). te- и to-волны сохраняют свою поляризацию в твист-нематике, однако перестают быть собственными при отражении от зеркал. Только re- и ro-волны после цикла в резонаторе сохраняют свою поляризацию (рис. 2).

Рассмотрим резонатор Фабри-Перо, состоящий из двух плоских зеркал. Между зеркалами помещен нематик с положительной одноосной анизотропией (рис. 1б). Необыкновенный и обыкновенный показатели преломления равны $n_{e,o} = n \pm \delta n$. При

закручивании е- и о-волны переходят в закрученные (twisted) *te*- и *to*-волны [6,8].
Эффективные показатели преломления закрученной среды:

$$n_{te,to} = n \pm \sqrt{\delta n^2 + (\varphi / k_0 L)^2}, \quad n_{to} < n_o < n_e < n_{te}. \quad (1)$$

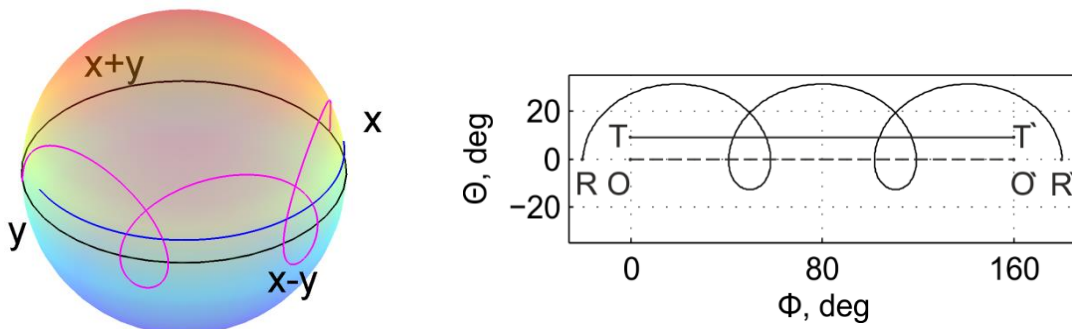
Здесь L – толщина слоя ЖК. Средняя фаза волн – $nk_0 z$, фаза (угол) анизотропии $\delta = \delta k L$, угол закручивания $\varphi = k_\varphi L$, где $k_0 = \omega / c$ – модуль волнового вектора в вакууме, $\delta k = \delta n k_0$, $k_\varphi = \varphi(L) / L$. В резонаторе за полный цикл волна совершает два пробега и два отражения от зеркал. Собственные моды резонатора (стоячие волны) назовем ге- и го-волнами. Их набег фазы за цикл равен углу 2ρ , выбранному с надлежащим знаком:

$$\sin(\rho) = \cos(\nu) \sin(\delta_\mu) + \sin(\nu) \cos(\Theta) \cos(\delta_\mu), \quad (2)$$

где δ_μ – фаза анизотропии, набегающая при отражении от зеркала, $\nu^2 = \delta^2 + \varphi^2$, $\cos(\Theta) \equiv \sin(\delta) / \sin(\nu)$. В частном случае $\delta_\mu = \pi / 2$ уравнение (17) переходит в равенство $\rho = \nu + \pi / 2$, связь мод при отражении (ССО) исчезает [9]. В частном случае $\delta_\mu = 0$ получаем выражение $\sin(\rho) = \sin(\nu) \cos(\Theta)$, эквивалентное выражениям, полученным в [7-8]. Положение пиков пропускания определяется фазами (2) собственных волн (мод) идеального резонатора (без потерь). Из условия положительной обратной связи получается СС закрученной структуры по отношению к незакрученной:

$$\Delta \lambda_{CC} = \Delta \lambda_{CC3} + \Delta \lambda_{CC0} = -\frac{\lambda^2}{2\pi n_o L} \left(\frac{\varphi^2}{2\delta} \mp \frac{\sqrt{1 + \Theta^2 \tan^2(\nu)} - 1}{\tan(\nu)} \right). \quad (3)$$

Для уяснения формул принято пользоваться графическими подходами, такими как комплексный параметр поляризации, сфера Пуанкаре [6], сфера Пуанкаре высшего порядка, метод диаграммы адмиттанса, круг Смита-Вольперта, метод катящегося конуса [5]. Последний метод дает наглядное механическое толкование формулы (1) как сложение двух взаимно перпендикулярных угловых скоростей конуса, катящегося по плоскости. Конус катится в конфигурационном пространстве поляризаций, сфере Пуанкаре (СП). Справедлива «геометрическая» формула: *геометрическая фаза (ГФ) равна половине площади, охватываемой траекторией на СП* [3]. Этот аналог теоремы Гаусса-Бонне может быть понят как сложение сферических избытков треугольников, составляющих охватываемую площадь. «Геометрическая» формула, с учетом аналога динамической фазы по Ааронову-Анандану [3] соответствует формуле (1) [10]. На рис. 2 изображены траектории плавного смещения различных состояний поляризации по мере проникновения волны вглубь закрученного слоя среды.



а)

б)

Рис 2. а) Сфера Пуанкаре, экватор – множество линейных поляризаций, верхнее полушарие – правые поляризации. б) участок цилиндрической проекции СП. Направлениям u , $x-y$, x , $x+y$ соответствуют углы $\Phi = 0, 90, 180$ и 270 градусов. Траектории для слоя ЖК, закрученного на 80° : OO' – линейные поляризации, соответствующие o -волне, TT' – траектория to -волны, RR' – траектория ro -волны, сферическая трохоида. На границах резонатора поляризация ro -волны – линейная (при $\delta_\mu = 0$), что отображено на рис. 1 а,в. Параметры соответствуют крайнему правому пику на рис. 4а, $\lambda = 579.1$ нм.

Изменение поляризации при прохождении слоя среды описывается матрицей Джонса, геометрический смысл которой – поворот СП. Точка СП рассматривается как тройка параметров Стокса, либо как эллипс, по которому движется конец вектора напряженности поля. Однако помимо двух фаз, описывающих эллипс поляризации, вектор напряженности имеет третью фазу – на эллипсе, которая меняется на 2π по мере прохождения вектора по эллипсу. Сфера Пуанкаре не отражает эту фазу. Однозначное представление поляризации – это расслоение Хопфа [3]. Точке СП соответствует касательная к СП плоскость и окружность на ней. Состоянию поляризации соответствует единичный кватернион, верзор – геометрический объект с тремя степенями свободы, соответствующими углам Эйлера. Верзор можно представить «флажком», состоящим из двух стрелок единичной длины: первая – стрелка поляризации, из центра СП к точке на поверхности СП, вторая – стрелка фазы, перпендикулярно первой, от точки на поверхности СП. По мере увеличения фазы вторая стрелка вращается около первой. В методе катящегося конуса важно, что когда поворачивается поляризация, также поворачивается и фаза, вращается весь «флажок» целиком. Причем одному периоду на эллипсе поляризации соответствует два оборота «флажка». Говоря строго, матрицы Джонса образуют специальную унитарную группу $SU(2)$. Эта группа есть универсальная накрывающая группы вращений $SO(3)$, покрытие двулистно.

Экспериментальное исследование величины смещения ro -мод в коротковолновую область спектра проводилось в ЖК ячейке (рис. 3), состоящей из двух диэлектрических зеркал, зазор между которыми заполнен нематическим ЖК 4-метоксибензилиден-4'-н-бутиланилин (МВВА), допированным ионным сурфактантом цетилтриметиламмоний бромид (СТАВ). Известно, что молекулы СТАВ в ЖК распадаются на анионы брома и поверхностно-активные катионы цетилтриметиламмония ($СТА^+$), которые, адсорбируясь на подложку, при достаточной концентрации формируют слой, задающий нормальные граничные условия для молекул нематика [11]. Для реализации исходной гомеопланарной ориентации ЖК (рис. 3а) на электроды методом spin-coating наносятся различные полимерные ориентирующие покрытия. При подаче на ячейку постоянного электрического напряжения величиной $U = 4$ В происходит ориентационный переход от гомеопланарной конфигурации к твист-структуре, индуцированный ионной модификацией поверхностного сцепления. Поляризованные спектры пропускания исследуемой структуры регистрировались с помощью спектрометра Ocean Optics HR4000, оснащенного световолоконной оптикой.

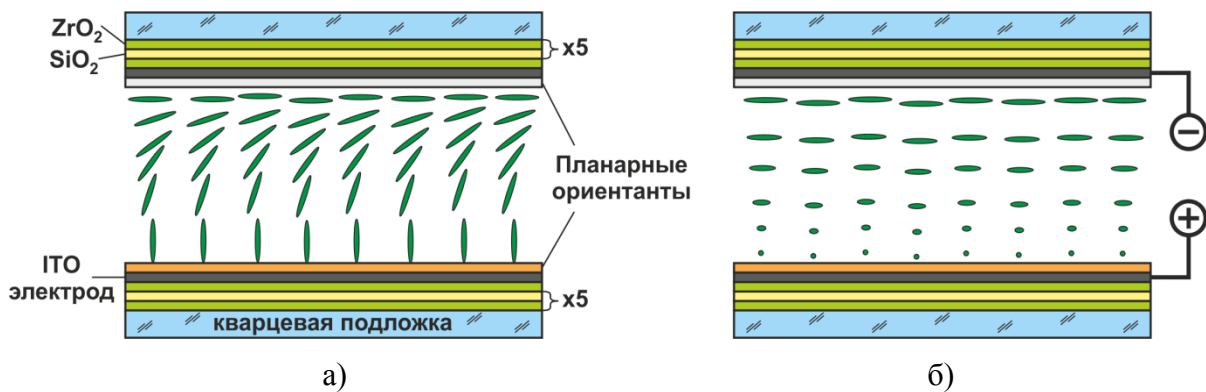


Рис. 3. Схемы ориентационного перехода в ЖК-ячейке с ионно-сурфактантным способом управления. а) Гомеопланарная ориентация при $U = 0$ В; б) Твист-структура при $U = 4$ В.

Для численного расчета использовался метод Берремана при следующих параметрах. Толщина и показатель преломления для аморфных слоев, составляющих диэлектрические зеркала, SiO_2 : 83 нм и 1.45; ZrO_2 : 66 нм и 2.02. Для ИТО: 117 нм и $1.88858+0.022i$ с учетом поглощения; показатели преломления для подложки – 1.45 и для PVA – 1.515; толщины слоев PVA – 300 и 600 нм; для MBVA необыкновенный показатель преломления – 1.737 и обыкновенный – 1.549, мнимая часть показателя преломления – $0.00078i$. Толщина слоя нематика – 7820 нм; угол закручивания – 80 градусов. В стоп-зону фотоннокристаллических зеркал попадает 14 пиков пропускания. Соответствующие спектральные сдвиги удовлетворительно ложатся на расчетную зависимость (рис. 4).

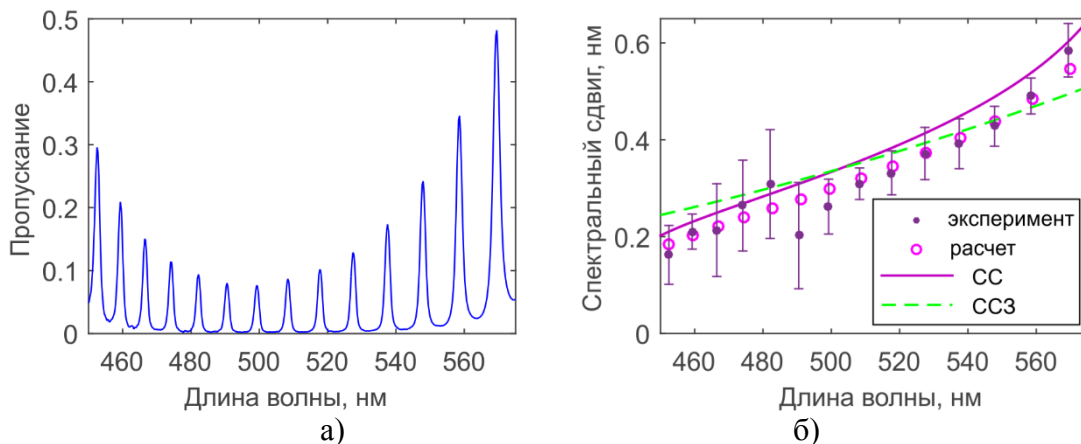


Рис. 4. о-поляризованный спектр а) и спектральный сдвиг б) пиков пропускания. (•) – экспериментальные значения, (○) – расчетные значения, найденные прямым численным моделированием, сплошная линия – кривая сдвига по формуле (3): СС, штриховая линия – без учета резонатора: ССЗ, первое слагаемое формулы (3).

До сих пор формула фазового сдвига Могена находила лишь косвенные подтверждения через измерение поляризации. Исследованный в данной работе сдвиг в ТН-РФП может наблюдаться непосредственно, без поляризаторов. Сдвиг проинтерпретирован как вклад ГФ, которая может быть мала в сравнении с полной фазой. Это используется для точной настройки частоты в модуляторах ГФ, когда к частоте поля прибавляется частота механического вращения фазовой пластинки [12]. Исследованный спектральный сдвиг в ТН-РФП может найти приложение в таких

областях высокоточной техники, как мультиплексоры, голографическая память, дифракционная оптика, 3D-дисплеи, оптические пинцеты.

Работа выполнена частично при поддержке РФФИ (гранты № 14-02-31248 и 15-02-06924), государственного задания Министерства образования № 3.1276.2014/К и совместного проекта СО РАН и Министерства науки и технологий Тайваня.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.М. Блинов Жидкие кристаллы: Структура и свойства. Либроком, 2013. 480 p.
2. M. V. Berry // Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci. 1984. Vol. 392, № 1802. P. 45–57.
3. Д.Н. Клышко Геометрическая фаза Берри в колебательных процессах // УФН. 1993. Vol. 163, № 11. P. 1–18.
4. I.V. Timofeev et al. // Phys. Rev. E. 2012. Vol. 85, № 1. P. 011705(7).
5. C.V. Mauguin // Bull. Soc. Fr. Miner. 1911. Vol. 34. P. 71–117.
6. P. Yeh, C. Gu Optics of Liquid Crystal Displays. Wiley, 1999. 438 p.
7. Y. Ohtera, H. Yoda, Kawakami S. // Opt. Quantum Electron. 2000. № 2. P. 147–167.
8. X. Zhu et al. // J. Appl. Phys. 2003. Vol. 94, № 5. P. 2868.
9. I.V. Timofeev et al. // Phys. Rev. E. Отправлено в печать.
10. И.В. Тимофеев, С.Я. Ветров // Изв. РАН, сер. физ. 2014. Vol. 78, № 12. P. 1593–1597.
11. V.S. Sutormin et al. // Opt. Mater. Express. 2014. Vol. 4, № 4. P. 810–815.
12. P. Hariharan The geometric phase // Progress in Optics. 2005. Vol. 48, № 05. P. 149–201.

Математическое моделирование рассеяния на рефлекторе коллиматора

Ф.Б. Хлебников, Н.Е. Шапкина
Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова
mnfkh1@gmail.com

Одной из важных задач экспериментальной электродинамики является получение в заданном объеме (рабочей зоне) поля, близкого по структуре к полю плоской электромагнитной волны. Такое поле необходимо в частности в экспериментах по измерению ЭПР (эффективной поверхности рассеяния), параметра, определяющего заметность объекта методами радиолокации. Так как при радиолокации источник электромагнитных волн находится далеко от исследуемого объекта, его излучение можно с хорошей точностью считать плоской волной.

Для получения нужной конфигурации поля часто используют коллиматоры в виде параболических зеркал, преобразующих сферическую волну от точечного источника в плоскую волну. Использование коллиматоров в безэховой камере позволяет с одной стороны провести эксперименты по исследованию рассеяния объектами электромагнитного поля в сравнительно небольшом (до десятков длин волн) помещении, но, с другой стороны, создает дополнительные источники погрешностей: неточность юстировки коллиматора (неполное соответствие идеальной параболической форме), переотражение от стен безэховой камеры, краевые эффекты.

Существует несколько способов снижения влияния краевых эффектов. Обычно края коллиматоров делают зазубренными или отгибают, чтобы уменьшить интенсивность дифрагированных лучей, проходящих в рабочую зону коллиматора или перенаправить их мимо рабочей зоны. Эти способы позволяют существенно уменьшить неоднородность поля в рабочей зоне, но, естественно, не могут сделать отраженную волну идеально плоской.

Преимуществом коллиматоров с зазубренными краями является их конструктивная простота: зазубрины на границах таких коллиматоров продолжают параболическую поверхность зеркала, такое зеркало проще изготовить и отъюстировать. Зеркало с отогнутыми краями – более сложный объект с областями различной кривизны. В то же время, коллиматоры с отогнутыми краями позволяют получить большую точность поля при том же размере безэховой камеры.

В данной работе исследовалась дифракция на параболическом зеркале с эллиптическими скруглениями.



Рис.1. Сечение модельного параболического коллиматора с эллиптическими скруглениями.

Дуга АВ на рисунке 1 представляет собой параболическую часть зеркала, которая и отвечает за формирование плоской волны, дуги АС и ВD – эллиптические скругления

на краях, а дуга CD добавлена для того, чтобы кривая была замкнутой. Так как дуга CD расположена в зоне тени, ее влияние на поле в рабочей зоне минимально.

Существенным побочным эффектом использования коллиматоров со скругленными краями является появление интенсивных боковых лучей, распространяющихся в направлении, отличном от оси параболоида. Чаще всего такие лучи не попадают напрямую в рабочую зону коллиматора, а падают на стены безэховой камеры. При этом, несмотря на то, что стены безэховой камеры покрыты радиопоглощающим материалом, при некоторых условиях (например, при падении волны под скользящими углами) боковые лучи могут и переотразиться в рабочую зону и существенно повлиять на структуру поля.

Снизить интенсивность таких лучей можно, к примеру, покрыв скругленные края коллиматора тонким слоем радиопоглощающего материала. Приблизительно такую конструкцию можно представить как поверхность с переменным импедансом, материал которой близок к идеальному проводнику на дуге АВ. Его толщина постепенно увеличивается на боковых дугах. Математическая постановка задачи в этом случае выглядит следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{E} = 0, \\ \operatorname{div} \vec{H} = 0, \\ \left[\vec{E} \times \vec{n} \right]_s = Z(M) \left[\vec{n} \times \left[\vec{n} \times \vec{H} \right] \right], \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial r} + ik\vec{E} \right) = 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial r} + ik\vec{H} \right) = 0, \\ E = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), H = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), r \rightarrow \infty. \end{array} \right. \quad (1)$$

Решить такую задачу предлагается численно методом интегральных уравнений. Пример распределения отраженного поля без учета покрытия представлен на рисунке 2:

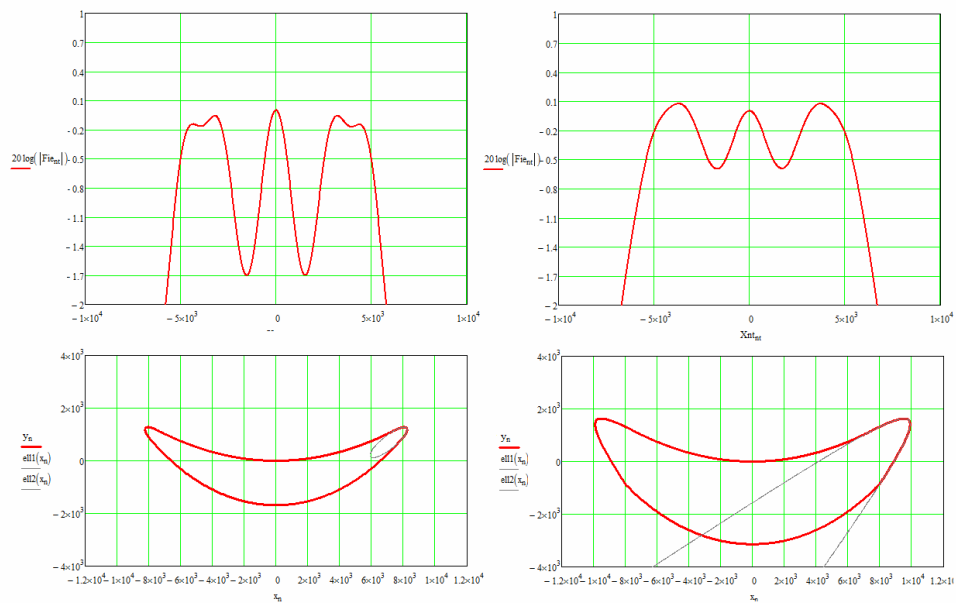


Рис.2. Распределение отраженного поля в рабочей зоне для коллиматоров с различными размерами скруглений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. – М.: Радио и связь, 1988.
2. Васильев Е.Н. Возбуждение тел вращения. – М.: Радио и связь, 1987.
3. А.Г.Свешников, И.Е.Могилевский. Математические задачи теории дифракции. М.: Физический факультет МГУ, 2010.
4. Ф.Б.Хлебников. Математическое моделирование электромагнитного поля в ближней зоне зеркального коллиматора, 5-я международная конференция Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации, Суздаль, 18-19 сентября 2012.

Расчет собственных мод трехззорного резонатора со скругленными углами

А.В. Шкитин, А.Н. Боголюбов, А.И. Ерохин
МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики
alshkit@yandex.ru

В данной работе рассматривается аксиально-симметричный трехззорный резонатор. Резонаторы подобного типа находят широкое применение при конструировании усилительных клистронов с распределённым взаимодействием в миллиметровом и субмиллиметровом диапазоне длин волн[1].

В общем случае поперечное сечение рассматриваемого резонатора может иметь достаточно сложную форму, поэтому в данной работе для его описания применяется метод R-функций, разработанный Рвачевым В.Л. [2,3]. Данный метод позволяет построить такую числовую функцию, которая равна нулю на границе области сложной геометрии[4].

Ранее для описания сечения резонатора использовалась структура с прямыми углами. Для этой структуры были найдены собственные моды, по которым затем построены компоненты электрического поля E_z и E_r . [5] Из рисунка 1 видно, что поля в углах имеют особенности, что хорошо согласуется с физикой данного процесса.[6] Это приводит к тому, что вблизи угловых точек происходит накопление энергии и пробой. Для того чтобы избежать этого, на практике углы скругляют. В данной работе скругления реализовываются с помощью усложнения метода R-функций. Это позволило значительно снизить величину электрического поля в угловых областях.

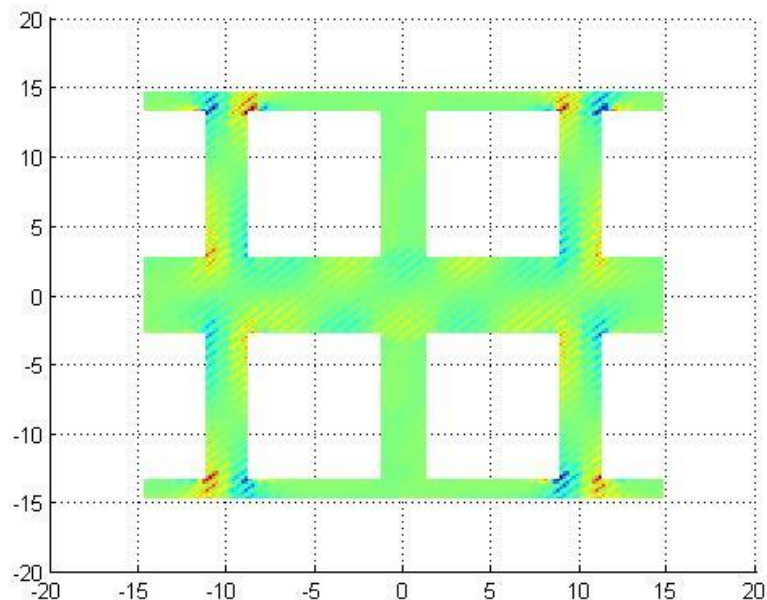


Рис. 1. Распределение компоненты E_r в случае структуры с прямыми углами

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим трехззорный цилиндрический резонатор с идеально проводящей поверхностью, поперечное сечение которого изображено на рис.2:

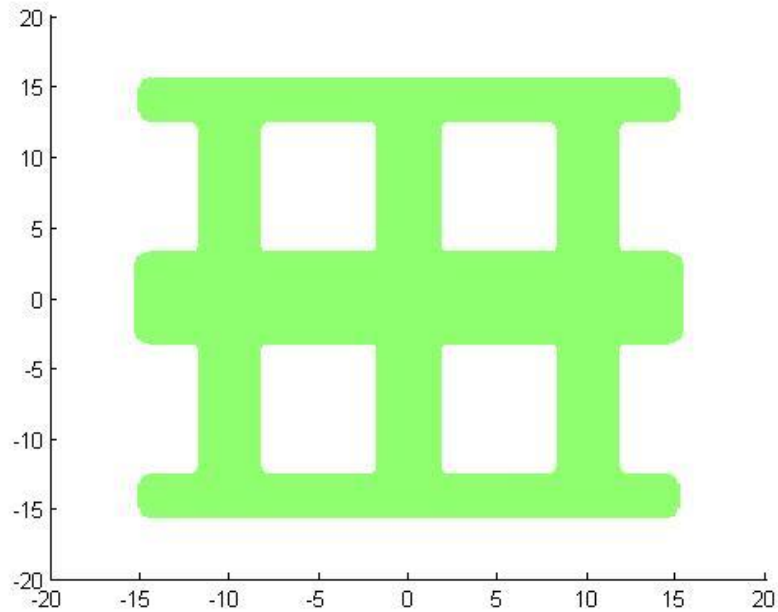


Рис.2. Поперечное сечение трехзорового резонатора

Электромагнитные колебания в рассматриваемом резонаторе описываются системой уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} H = -ikE \\ \operatorname{rot} E = ikH \\ H = 0 \\ E = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

где k – волновой вектор, E и H – вектора электрической и магнитной напряженности поля.

На границе резонатора для касательной компоненты поля E выполняется условие Дирихле:

$$E_{\tau} = 0.$$

Представим поля E и H с помощью поляризационного потенциала Π :

$$E = \operatorname{grad} \Pi + k^2 \Pi, \quad (2)$$

$$H = -ik \operatorname{rot} \Pi, \quad (3)$$

где все компоненты потенциала, кроме направленной вдоль оси z , равны 0. Проведя элементарные преобразования, получим уравнение Гельмгольца с граничными условиями Дирихле:

$$\Delta \Pi + k^2 \Pi = 0, \quad (4)$$

$$\Pi|_{\partial\Omega} = 0. \quad (5)$$

Разделяя переменные и проведя преобразование, аналогичное [7], получим следующую задачу:

Найти такие функции $u \in H_1^0(\Omega)$, которые удовлетворяют следующему уравнению для любых функций $v \in H_1^0(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} r(\nabla u, \nabla v) d\sigma - \lambda^2 \int_{\Omega} \frac{uv}{r} d\sigma - k^2 \int_{\Omega} ruvd\sigma = 0. \quad (8)$$

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Решение задачи представим в виде:

$$u = U\omega, \quad (9)$$

где ω – R-функция Рвачева. Для ее построения используются простейшие операции из системы R_{α} , описанные в [3].

Для того чтобы избежать накопления энергии в угловых точках резонатора и, как следствие, пробоев, и выхода резонатора из строя, углы скругляют. В то же время в наиболее часто употребляемых R-операциях из системы R_{α} имеется радикал. При дифференцировании он оказывается в знаменателе, чем может существенно исказить характер решения задачи. Для того чтобы с одной стороны, приблизить область, описывающую сечение реального резонатора к реальному сечению, а с другой – учесть особенности структуры, возникающие в угловых точках, применяется метод модификации R-операций, используемых при построении структуры. Этот метод так же носит название почти R-функций. При использовании обычной R-конъюнкции и R-дизъюнкции для описания области на ее границе наблюдается скачок. Он заменяется кубическим сплайном. Использувавшиеся ранее операции R-конъюнкции и R-дизъюнкции заменяются следующими более сложными:

$$x \vee y = f(x) \cdot f(y) - \frac{1}{2},$$

$$x \vee y = -\left(f(-x) \cdot f(-y) - \frac{1}{2}\right),$$

где

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{16}{27}x^3 + x + \frac{1}{2}, & |x| < \frac{3}{4} \\ 1, & x \geq \frac{3}{4} \\ 0, & x < -\frac{3}{4} \end{cases}.$$

Для поиска функции U будем использовать метод Галеркина. В качестве базисных функций выберем полную систему f_i сдвигов и сжатий атомарной функции $fup_2(r, z)$, которая с хорошей точностью позволяет приблизить искомую функцию[8]:

$$u = \omega \sum_{i=1}^{i=N} c_i f_i. \quad (10)$$

Подставив в (8), после ряда преобразований получим матричную задачу вида:

$$Ac + \lambda Bc = k^2 Fc, \quad (11)$$

где c – столбец неизвестных коэффициентов, а матрицы A, B, F – симметричны.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Ограничимся рассмотрением колебаний, не зависящих от индекса m , то есть $m = 0$.

На основе рассмотренной математической модели был реализован алгоритм расчета собственных колебаний и собственных частот трехззорного аксиально-симметричного резонатора с сечением, изображенным на рисунке 2.

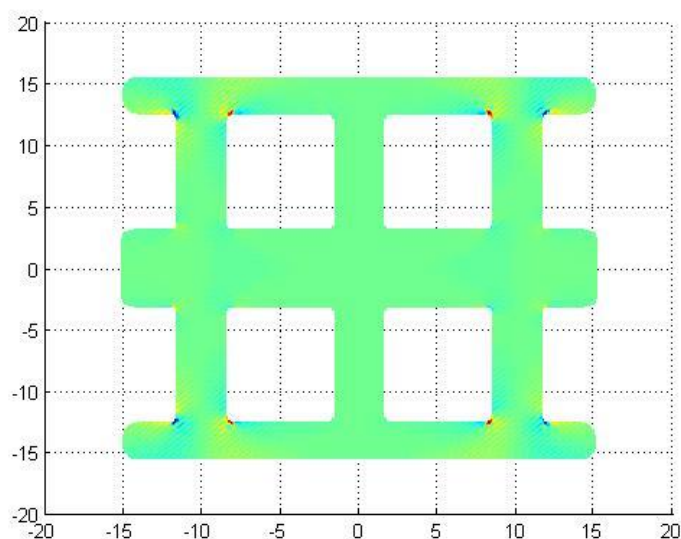


Рис.3. Распределение компоненты E_r для пятой собственной моды

С помощью скругления углов удалось уменьшить величину поля E_r в углах, однако она все еще остается достаточно большой. Для того чтобы уменьшить или вовсе исключить эти особенности можно взять более сложную систему R-конъюнкций и R-дизъюнкций, у которых при дифференцировании не возникает особенностей в угловых точках.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 14-01-31397 мол_а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р.Н. Фисенко, 13th Crimean Conference «Microwave & Telecommunication Technology», 2003.
2. В.Л. Рвачев, «Теория R-функций и некоторые ее приложения», Киев, изд. «Думка», 1982 г.
3. В.Ф. Кравченко, В.Л. Рвачев, «Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях», Москва, изд. «Физматлит», 2006 г.
4. В.Ф. Кравченко, М.А. Басараб «Булева алгебра и методы аппроксимации в краевых задачах электродинамики», изд. «Физматлит», 2004 г.
5. А.Н. Боголюбов и др. // Журнал радиоэлектроники, №11, 2014
6. А.Н. Боголюбов и др. // Радиотехника и электроника. 2003. Т.48. N7. С.787-794
7. А.Н. Боголюбов и др. // Вестник Московского Университета, Серия 3. Физика. Астрономия. 2009 г., №2, стр. 21-23
8. В.Ф. Кравченко «Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям». Монография. – М.: Радиотехника, 2003