

## НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

<b>Хаотическая динамика и управление ею в системе двух связанных ридберговских атомов</b>	
<i>А.В. Андреев, О.И. Москаленко, А.А. Короновский, А.Е. Храмов.....</i>	<i>3</i>
<b>Многочастотные торы в модели широкоапертурного лазера</b>	
<i>Д.А. Анчиков, А.Р. Шакиров, А.А. Крениц.....</i>	<i>6</i>
<b>Бифуркация удвоения периода в полупроводниковой сверхрешетке под действием наклонного магнитного поля и температуры</b>	
<i>А. Г. Баланов, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. О. Сельский, А. Е. Храмов.....</i>	<i>9</i>
<b>Изменение оценок связанности методом причинности по Грейнджеру в зависимости от уровня шума в канале связи</b>	
<i>Т.М. Голова, И.В. Сысоев.....</i>	<i>11</i>
<b>Исследование динамики МГД-волн в тепловыделяющей проводящей среде</b>	
<i>Д.И. Завершинский, Н.Е. Молевич.....</i>	<i>14</i>
<b>О генерации белого и цветного хаоса</b>	
<i>В.В. Зайцев, Ар.В. Карлов, А.Н. Юдин.....</i>	<i>17</i>
<b>Установление обобщенной хаотической синхронизации в сети систем с потоковым временем</b>	
<i>А.А. Короновский, О.И. Москаленко, А.А. Пивоваров.....</i>	<i>21</i>
<b>Формирование квадратной решетки оптических вихрей в результате четырехволнового взаимодействия в модели широкоапертурного лазера</b>	
<i>А.А. Крениц, Д.А. Анчиков, А.В. Пахомов, Н.Е. Молевич.....</i>	<i>22</i>
<b>Диагностика глобальных структурных паттернов в многослойной сети осцилляторов</b>	
<i>В.В. Макаров, В.А. Максименко, А.А. Харченко, А.Е. Храмов, А.А. Короновский.....</i>	<i>25</i>
<b>Время-частотный анализ стохастических процессов</b>	
<i>Р.В. Михайлов.....</i>	<i>27</i>
<b>Применение методов и подходов нелинейной динамики для исследования волновых явлений разведочной геофизики</b>	
<i>А.Е. Руннова, М.О. Журавлев, Н.С. Фролов.....</i>	<i>28</i>
<b>Эволюция ветровых волн в кольцевом канале</b>	
<i>Н.П. Савенкова, С.А. Складчиков, В.С. Лапонин, С.В. Анпилов, У. Юсупалиев, С.А. Шутеев.....</i>	<i>31</i>

**Анализ формирования кластеров в адаптивной сети осцилляторов  
Курамото по интегральным сигналам**

*А.А. Харченко, В.В. Макаров, А.Е. Храмов..... 35*

**Самосогласованная динамика ансамбля автогенераторов и  
двумерного коаксиального поля**

*С.П. Чернявский..... 39*

## Хаотическая динамика и управление ею в системе двух связанных ридберговских атомов

А.В. Андреев<sup>1</sup>, О.И. Москаленко<sup>1,2</sup>, А.А. Короновский<sup>1,2</sup>, А.Е. Храмов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

<sup>2</sup>Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.

[andreevandv@gmail.ru](mailto:andreevandv@gmail.ru)

В настоящие дни значительный интерес вызывают задачи управления квантовыми системами с ридберговскими атомами в связи с тем, что подобные задачи имеют тесную связь с проблемой создания квантовых компьютеров [1]. Ридберговские атомы - это водородоподобные атомы, внешний электрон в которых находится в высоковозбужденном состоянии, вплоть до уровней порядка 1000. Данные объекты представляют в настоящее время особый интерес [2], потому что они могут быть использованы в квантовом контроле одного атома другими благодаря ридберговским (высоковозбужденным) состояниям. Волновые функции атомов в основном состоянии не превышают значения 0.1 нм, в то время как в ридберговском состоянии они достигают нескольких нанометров и даже выше. Это позволяет атомам, находящимся достаточно далеко для того, чтобы не взаимодействовать друг с другом, находясь в основном состоянии, сильно взаимодействовать в возбужденных состояниях. Это составляет эффект дипольной блокады [3].

Значительный интерес вызывает задача возникновения хаотической динамики в квантовой системе. Эта задача также имеет прикладное значение для решения проблемы квантовых вычислений в массиве атомов, включенных в твердое тело, принимающих ридберговское состояние [4].

Также системы с ридберговскими атомами являются перспективными для хранения и передачи информации. В связи с этим является перспективной задачей анализ методик подавления хаотической динамики в таких системах, т.к. хаос будет разрушать все хранимую или передаваемую через систему информацию.

В данной работе нами было проведено исследование двух связанных ридберговских атомов и была показана возможность возникновения хаотической динамики в рассматриваемой системе. Также было проведено исследование возможности управления хаотической динамикой путем параметрического воздействия на систему связанных ридберговских атомов.

Исследуемая система связанных ридберговских атомов описывается следующей системой квазиклассических уравнений [5]:

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= -2\Omega \operatorname{Im} q_1 - w_1 - 1, \\ \dot{w}_2 &= -2\Omega \operatorname{Im} q_2 - w_2 - 1, \\ \dot{q}_1 &= i[\Delta - c(w_2 + 1)]q_1 - \frac{q_1}{2} + i\frac{\Omega}{2}w_1, \\ \dot{q}_2 &= i[\Delta - c(w_1 + 1)]q_2 - \frac{q_2}{2} + i\frac{\Omega}{2}w_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\Omega$  - частота Раби, с которой осциллирует населенность возбужденного уровня атомной системы под действием резонансного лазерного излучения;  $\Delta$  - отстройка частоты лазерного излучения от частоты резонансного атомного перехода;  $c$  - ридберговское взаимодействие;  $w_{1,2}$  - инверсии, т.е. разности населенностей

энергетических уровней атомов;  $q_{1,2}$  - недиагональные элементы матрицы плотности атома, которая является аналогом волновой функции и служит для описания состояния квантовомеханической системы.

Для данной системы в работе [5] были обнаружены 3 характерных режима: однородный, антиферромагнитный и колебательный.

Мы провели исследование колебательной области и обнаружили в ней колебания периода 1, 2 и так далее, вплоть до хаотических. На основе полученных данных была построена карта режимов, показанная на рис. 1, для колебательной области, на которую были нанесены области периодических колебаний, а также области хаотической динамики. Цифрами на карте режимов обозначены периоды колебаний, хаос обозначен черным цветом.

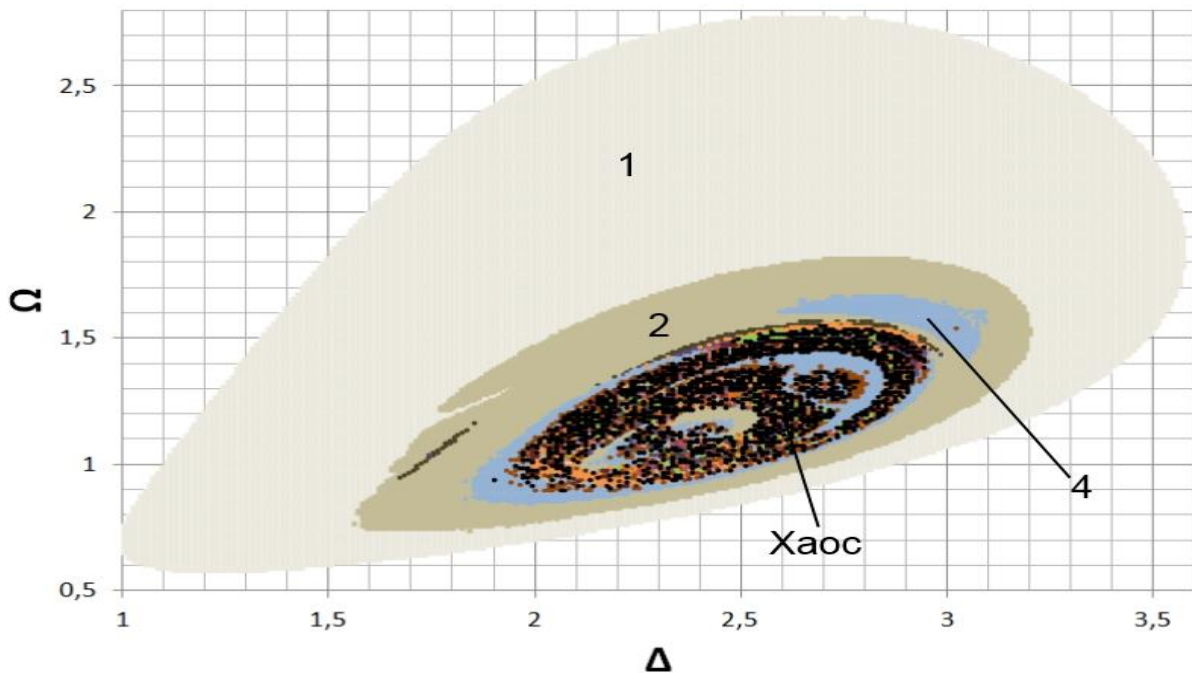


Рис. 1. Карта режимов для колебательной области. Цифрами обозначены периоды колебаний, хаос обозначен черным цветом.

Для диагностики режимов колебаний были построены бифуркационные диаграммы и спектры показателей Ляпунова, которые показывали хорошее соответствие между собой и качественно и количественно отображали все изменения в динамике системы, такие как переход от стационарному состоянию системы к колебательному, бифуркации удвоения периода, а также возникновение режимов хаотической динамики с наличием окон периодичности внутри области хаоса. В исследуемой системе также была обнаружена бистабильность.

Для управления сложной динамикой в качестве метода подавления хаотической динамики использовалось введение внешнего параметрического воздействия. В качестве этого воздействия мы брали модуляцию частоты Раби внешним периодическим воздействием, что возможно реализовать в эксперименте:

$$\Omega = \Omega[1 + M \sin(2\pi ft)] \quad (2)$$

где  $M$  - амплитуда, а  $f$  - частота внешнего воздействия.

При значениях управляющих параметров, соответствующих хаотической динамике, была проанализирована система под внешним воздействием в зависимости

от амплитуды и частоты этого воздействия. На рис.2. представлена бифуркационная диаграмма, соответствующая исследуемой системе под внешним воздействием при значениях управляющих параметров  $\Omega$  и  $\Delta$ , при которых в автономной системе наблюдается хаотическая динамика. Видно, что существуют области параметра  $M$ , при которых в системе происходит подавление хаоса и наблюдается периодическая динамика.

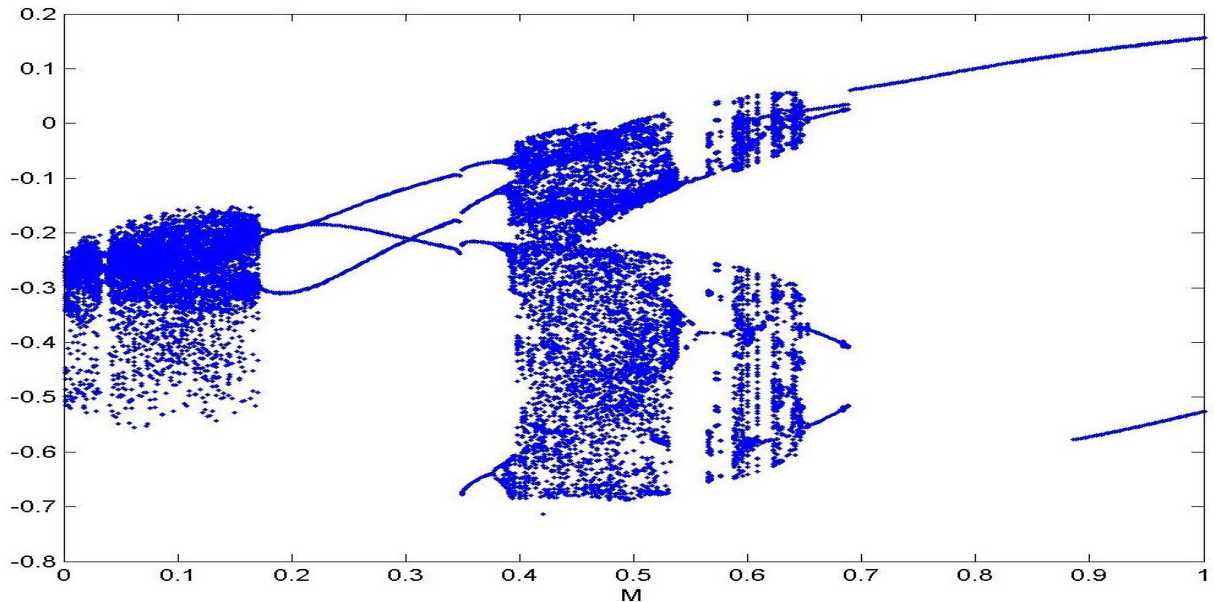


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма для системы двух связанных ридберговских атомов под внешним параметрическим воздействием при значении параметров  $\Omega=1.2$ ,  $\Delta=2.6$ ,  $f = f_0$ , где  $f_0$  - частота собственных колебаний автономной системы.

Проводились исследования нашей системы под внешним воздействием в области параметров "амплитуда - частота внешнего воздействия". В результате при значениях управляющих параметров, соответствующим хаотической динамике в автономной системе, были получены области различных периодов колебаний, которые были нанесены на карту режимов "амплитуда - частота внешнего параметрического воздействия", при этом особое внимание было уделено возможности подавления хаоса в система связанных ридберговских атомов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-32-20299).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. M.D. Lukin et al. // Phys. Rev. Lett. 85. 2208 (2000).
2. P. T. Greenland et al. // Nature. 465 (2010) 1057-1061.
3. V. Schwarzschild // Phys. Today 62, 15–18 (2009).
4. M. Saffman and T. G. Walker. // Reviews of Modern Physics, 82 2313 (2010).
5. T.E. Lee, H. Haffner, M. C. Cross. // Phys. Rev. A84, 031402(R) (2011).

## Многочастотные торы в модели широкоапертурного лазера

Д.А. Анчиков<sup>1</sup>, А.Р. Шакиров<sup>1,2</sup>, А.А. Кренц<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Самарский государственный аэрокосмический университет, Самара, Россия

<sup>2</sup>Самарский филиал Физического института РАН, Самара, Россия

[swadimaz@mail.ru](mailto:swadimaz@mail.ru)

Давно известно, что в лазерах, а также в других сложных нелинейных динамических системах (например, химических и гидродинамических), возможно наблюдение сложного нерегулярного поведения. В первую очередь, это проявляется в пространственно-распределенных системах, т.е. в системах, обладающих большими поперечными размерами. В таком случае лазерное поле формируется в результате нелинейного взаимодействия большого числа поперечных оптических мод. Это может приводить к появлению нестационарных структур в сечении пучка, которые в большинстве приложений лазеров являются нежелательными. В связи с этим, динамика оптического поля в широкоапертурных лазерах являлась предметом активного теоретического изучения в последние 20 лет.

В качестве математической модели традиционно рассматриваются несколько близких систем: уравнения Максвелла-Блоха (МБ), комплексное уравнение Гинзбурга-Ландау и уравнение Свифта-Хохенберга. Система уравнений Максвелла-Блоха является наиболее полным и общим вариантом, и из неё с помощью адиабатического исключения переменных поляризации и инверсии населенностей могут быть выведены остальные.

Одним из интересных направлений теории нелинейных динамических систем является исследование сценариев развития динамики в сложных системах, таких как лазеры. В работе [2] детально исследовался сценарий перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения. В качестве модели использовалась система уравнений МБ с адиабатически исключенной поляризацией. Кроме того, в работах [3, 4] исследовалось формирование спиральных волн в распределенной системе МБ. Однако ранее не сообщалось о бифуркациях квазипериодических режимов в лазерах, и сценарии эволюции системы через квазипериодические режимы, безусловно, представляют исследовательский интерес.

В настоящей работе мы наблюдали формирование аттракторов в виде многочастотного тора в модели широкоапертурного лазера, а также его разрушение при увеличении параметра накачки.

В качестве математической модели широкоапертурного лазера использовалась полная полуклассическая система уравнений Максвелла-Блоха. Она описывает динамику оптического поля во времени в поперечном сечении выходного пучка с учётом отстройки частоты генерации от центра линии усиления для лазера, работающего на одной продольной моде плоскопараллельного резонатора и имеющего однородно уширенную линию:

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial t} = ia\Delta_{\perp} E + \sigma(P - E), \\ \frac{\partial P}{\partial t} = -(1 + i\delta)P + DE, \\ \frac{\partial D}{\partial t} = -\gamma \left[ D - r + \frac{1}{2}(E^* P + EP^*) \right], \end{cases} \quad (1)$$

где  $E, P, D$  - безразмерные огибающие электрического поля, поляризации и инверсии населённости соответственно;  $\gamma = \gamma_{\parallel} / \gamma_{\perp}$  и  $\sigma = k / \gamma_{\perp}$ , где  $\gamma_{\perp}$ ,  $\gamma_{\parallel}$  и  $k$  - скорости релаксации поляризации, инверсии населённости и коэффициент затухания электрического поля соответственно;  $\delta = (\omega_{21} - \omega) / \gamma_{\perp}$  - отстройка частоты генерации  $\omega$  от центральной частоты линии усиления  $\omega_{21}$  линии усиления активной среды, обезразмеренная на ширину линии;  $a = c^2 / (2\omega\gamma_{\perp}d^2)$  - дифракционный параметр, где  $d$  - ширина апертуры;  $r$  - накачка, нормированная на пороговое значение. Данная нелинейная система описывает динамику генерации лазера с учётом поперечного распределения электромагнитного поля в резонаторе.

Мы рассматривали процессы в области нулевой отстройки в одномерном приближении. Для численного моделирования системы (1) использовался псевдоспектральный Фурье-метод расщепления по физическим факторам. Для анализа получаемых режимов мы строили аттрактор в фазовом пространстве, сечения Пуанкаре, а также спектр колебаний интенсивности в произвольной локальной точке.

При значениях накачки немного выше порога генерации в системе реализуется однородное по пространству стационарное решение. Однако при достижении второго лазерного порога стационарное решение теряет устойчивость по отношению к малым возмущениям с некоторым ненулевым волновым числом.

В таком случае система переходит в режим периодических колебаний (рис. 1, верхний ряд). В профиле интенсивности наблюдается модуляция с определенным волновым числом. С помощью линейного анализа можно показать, что это волновое число равно тому, для которого инкремент нарастания возмущения был максимальным при рассмотрении устойчивости однородного решения. В дальнейшем поле можно увидеть два максимума, один из них располагается на оси, а другой - вне. В трехмерном фазовом пространстве ( $|E|$ ,  $|P|$  и  $|dI|$ , где  $dI$  - это производная интенсивности по времени) в этом режиме будет наблюдаться предельный цикл. Дополнительным подтверждением тому является сечение Пуанкаре для аттрактора, которое при данных параметрах представляет собой точку. Спектр колебаний состоит из одной основной гармоники и одной побочной.

Приблизительно при значении накачки  $r=168.9$  в системе происходит бифуркация, и аттрактор обретает форму трехмерного тора (рис. 1, второй ряд сверху). Колебания интенсивности в локальных точках становятся двухчастотными. В сечениях Пуанкаре можно увидеть замкнутые кривые, напоминающие деформированные окружности. В спектре колебаний появляется вторая основная гармоника, а также множество побочных.

При дальнейшем увеличении накачки в области значений  $r=172.1$  в системе происходит следующая бифуркация. На сечениях Пуанкаре наблюдаются изображения в виде двумерных проекций трехмерного тора. Это означает что, аттрактор представляет собой трехчастотный тор. Это подтверждается тем, что в спектре колебаний наблюдается появление третьей основной гармоники.

В области накачек  $r=177.5$  происходит еще одна бифуркация, и в фазовом пространстве аттрактор обретает более сложную форму. На сечениях Пуанкаре наблюдаются запутанные кривые. Спектр колебаний при этом меняет структуру. На нем появляются узкие участки с густо расположенными пиками, сами такие участки располагаются друг от друга на значительном расстоянии.

Таким образом, в данной работе показано, что в модели широкоапертурного лазера возможно наблюдение аттракторов в виде трехчастотных торов.

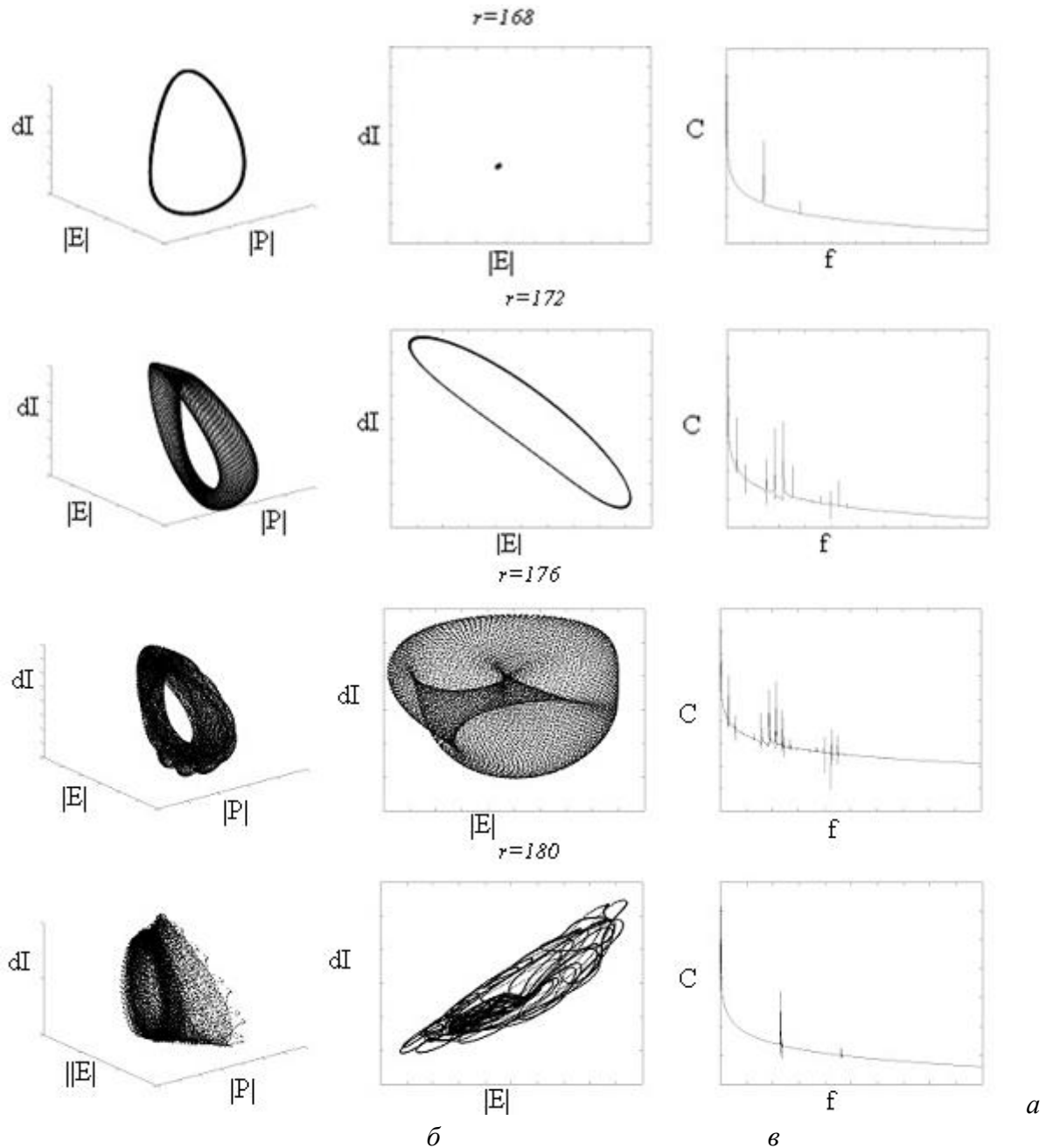


Рис. 1. Последовательность бифуркаций квазипериодических решений при изменении параметра накачки  $r$ : а) фазовый объем, б) сечения Пуанкаре, в) спектры колебаний, где  $dI$  – производная интенсивности,  $C$  – спектр мощности,  $f$  – частота. Остальные параметры системы:  $\sigma=1$ ,  $\gamma=2.2$ ,  $\delta=0$ ,  $a=0.01$ .

Работа частично поддержана Минобрнауки РФ в рамках Программы повышения конкурентоспособности СГАУ на 2013–2020 гг. и Государственного задания вузам и научным организациям в сфере научной деятельности, проект 1451, НИР №ГР 114091840046, грантом РФФИ 14-02-31419 мол\_а.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А.А. Кренц, Н.Е. Молевич // Квантовая электроника, 2009, т. 39, 751-756.
2. M. Berre et al. // Phys. Rev. E, 2005, 71, 036224.
3. D. Yu, W. Lu, R.G. Harrison // J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt., 1999, 1, 25.



## Бифуркация удвоения периода в полупроводниковой сверхрешетке под действием наклонного магнитного поля и температуры

А.Г. Баланов<sup>2</sup>, А.А. Короновский<sup>1,3</sup>, О.И. Москаленко<sup>1,3</sup>, А.О. Сельский<sup>1,3</sup>,  
А.Е. Храмов<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

<sup>2</sup>Loughborough University, Department of Physics, Loughborough LE11 3TU

<sup>3</sup>Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.  
[feanorbersek@gmail.com](mailto:feanorbersek@gmail.com)

Полупроводниковые сверхрешетки - сложные наноструктуры, состоящие из нескольких чередующихся тонких (~10 нм) слоев различных полупроводниковых материалов, которые возможно использовать для генерации и управления высокочастотными колебаниями [1]. В последнее время большой интерес представляет исследование данных наноструктур с позиций нелинейной динамики [2]. В настоящей работе описано явление бифуркации удвоения периода в полупроводниковых сверхрешетках в присутствии наклонного магнитного поля. Исследование проводилось с помощью численного моделирования безразмерных уравнений [3]:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\beta \frac{\partial J}{\partial x},$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \nu(n-1), \quad (1)$$

$$J = n v_d(\bar{F}) - D(F) \frac{\partial n}{\partial x},$$

где  $n$ ,  $F$ ,  $J$  – безразмерные концентрация электронов, напряженность электрического поля, плотность тока;  $v_d(\bar{F})$  – дрейфовая скорость электрона при данной напряженности, зависящая от температуры [3];  $\beta = 0.031$ ,  $\nu = 15.769$  - безразмерные параметры;  $D(F)$  - коэффициент диффузии, зависящий от температуры, введен в соответствии с [3].

Используя данную модель, были рассчитаны реализации тока и фазовые портреты, восстановленные по временным реализациям с помощью метода задержек Такенса [4], для разных температур (рисунки 1 и 2). Видно, что для низких температур с ростом приложенного к полупроводниковой сверхрешетке напряжения характер колебаний существенно меняется. Если в начале колебания были похожи на гармонические, а на фазовом портрете можно было наблюдать предельный цикл, с ростом напряжения колебания становятся ближе к релаксационным. На фазовых портретах можно наблюдать бифуркацию удвоения периода.

В случае более высокой температуры ситуация несколько меняется (рисунок 2). В данном случае сначала проявляется переход к релаксационным колебаниям, и только затем бифуркация удвоения периода. Из разницы между рисунками можно сделать вывод, что характер перехода между типами колебаний в полупроводниковой сверхрешетке зависит от температуры.

Таким образом, в полупроводниковых сверхрешетках в присутствии наклонного магнитного поля для выбранных температур реализуется одиночная бифуркация удвоения периода.

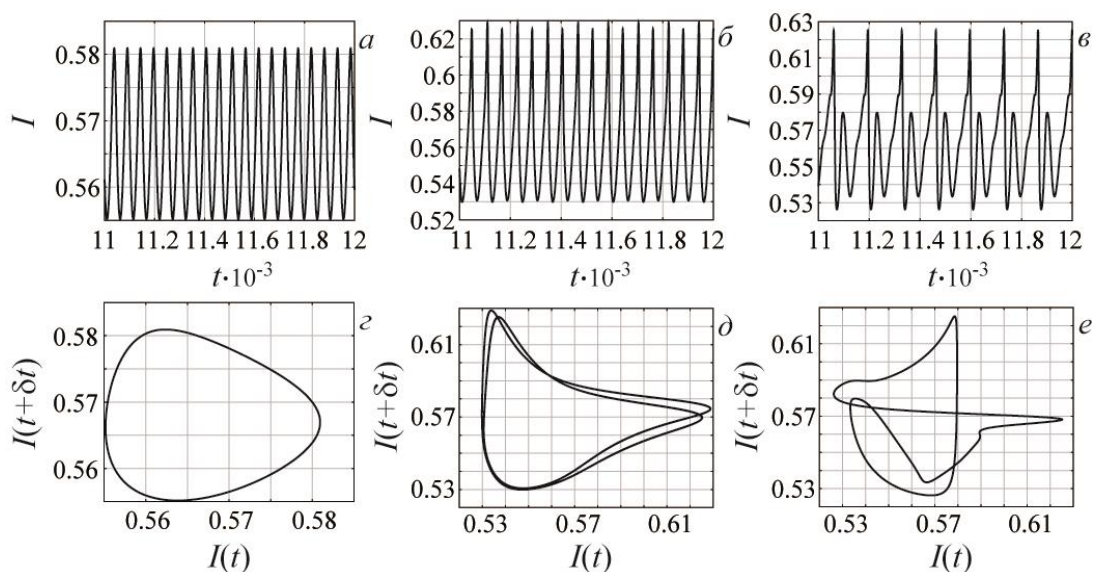


Рис. 1. *a-в* - Реализации тока, протекающего через полупроводниковую сверхрешетку, для значений напряжения  $V=15.485$  (*a*),  $V=15.85$  (*б*),  $V=16.411$  (*в*). *г-е* - Фазовые портреты, восстановленные по методу Такенса (время задержки составляет четверть периода колебаний), для значений напряжения  $V=15.485$  (*г*),  $V=15.85$  (*д*),  $V=16.411$  (*е*). Для температуры  $T=4.2$  К.

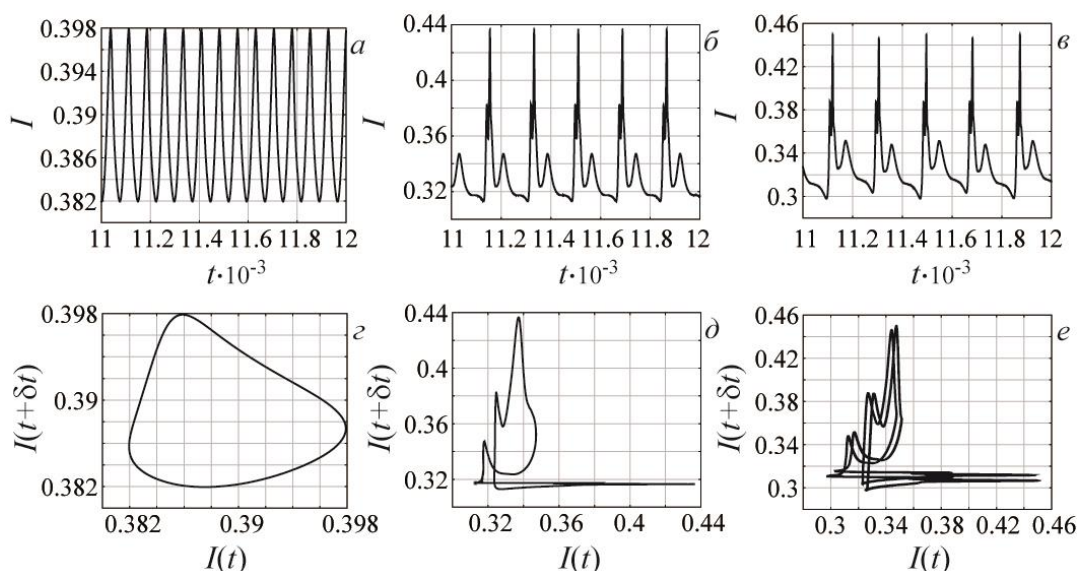


Рис. 2. *a-в* - Реализации тока, протекающего через полупроводниковую сверхрешетку, для значений напряжения  $V=13.886$  (*a*),  $V=16.832$  (*б*),  $V=17.34$  (*в*). *г-е* - Фазовые портреты, восстановленные по методу Такенса (время задержки составляет четверть периода колебаний), для значений напряжения  $V=13.886$  (*г*),  $V=16.832$  (*д*),  $V=17.34$  (*е*). Для температуры  $T=100$  К.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (задание 3.23.2014/К); фонда некоммерческих программ "Династия".

#### ЛИТЕРАТУРА

1. L. Esaki, R. Tsu // IBM J. Res. Develop. 1970. V. 14. P. 61-65.
2. A. Wacker // Phys. Rep. 2002. V. 357. P. 1-111.
3. A.O. Selskii et al. // Phys. Rev. B. 2011. V. 84. P. 235311.
4. F. Takens Detecting strange attractors in dynamical systems and turbulence, in: Lectures Notes in Mathematics, N. Y.: Springer-Verlag, 1981, pages 366.

## Изменение оценок связанности методом причинности по Грейнджеру в зависимости от уровня шума в канале связи

Т.М. Голова, И.В. Сысоев

Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

[golovatanya@rambler.ru](mailto:golovatanya@rambler.ru)

Использование хаотических систем для передачи информации получило большое распространение в последнее время. Как следствие, актуальным является вопрос об определении наличия/отсутствия взаимодействия между ними по их экспериментальным сигналам — временным рядам. В настоящее время получили распространение подходы к определению взаимодействий путём детектирования причинно-следственных связей между настоящим состоянием одного объекта и прошлыми состояниями другого (или нескольких других). К таким подходам можно отнести причинность по Грейнджеру [1], энтропию переноса [2] и частную направленную когерентность [3].

Это связано с тем, что такие подходы, в частности, метод причинности по Грейнджеру, способны выявить направленную произвольную функциональную связанность между объектами исследования, в то время как традиционные меры: взаимная корреляционная функция, функция когерентности, коэффициент фазовой синхронизации, функция взаимной информации выявляют только линейную связь и не могут определить её направление. Из всех подходов, основанных на выявлении причинно-следственных связей метод причинности по Грейнджеру требует наименьших объёмов данных, т. е. можно рассчитывать на анализ нестационарных сигналов или анализ в скользящем окне [4].

Одна из проблем метода причинности по Грейнджеру состоит в том, что зависимость его работоспособности от шумов мало исследована, хотя шумы всегда присутствуют в канале связи и полностью очистить сигнал от шума, как правило, невозможно. Некоторые результаты в данной области получены в [5, 6] для линейных систем или в случае когда оператор эволюции объектов исследования хорошо известен.

Целью данной работы является исследование поведения зависимости характеристик метода причинности по Грейнджеру от дисперсии внешнего шума  $\sigma^2$  на эталонных нелинейных системах.

Идея метода заключается в том, что если система  $Y$  воздействует на систему  $X$ , то значения временного ряда  $\{y\}_{n=1}^N$  системы  $Y$ , являются причиной изменений временного ряда  $\{x\}_{n=1}^N$  системы  $X$ . Следовательно, учёт данных от системы  $Y$  должен помочь в предсказании будущих значений временного ряда  $\{x\}_{n=1}^N$ . Расчёт производится следующим образом.

На первом этапе строится собственная модель (1), предсказывающая следующее значение во временном ряде  $\{x\}_{n=1}^N$  по  $D_s$  предыдущим:

$$x_n = f(x_{n-l}, x_{n-2l}, \dots, x_{n-D_s l}, c^s) + \xi_n^s \quad (1)$$

где  $f$  — аппроксимирующая функция,  $l$  — лаг модели,  $D_s$  — собственная размерность модели,  $c^s$  — неизвестные коэффициенты, а  $\xi$  — остатки. Коэффициенты  $c^s$  оцениваются методом наименьших квадратов по экспериментальной реализации  $\{x_n\}_{n=1}^N$ . Полученная модель имеет среднеквадратичную ошибку аппроксимации  $\varepsilon_s^2$ , равную дисперсии остатков  $\xi_n^s$ .

Следующим шагом строится совместная модель (2), использующая для предсказания значения в ряде  $\{x_n\}_{n=1}^N$  также  $D_a$  значений из ряда  $\{y\}_{n=1}^N$ :

$$x_n = g(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-D_s}, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-D_a}, c^j) + \xi_n^j, \quad (2)$$

где  $D_a$  – размерность добавки,  $c^j$  – коэффициенты совместной модели;  $f$  и  $g$  – полиномы общего вида степени  $P$ . После того, как совместная модель (2) построена, можно рассчитать её среднеквадратичную ошибку прогноза  $\varepsilon_j^2$ .

Случай  $\varepsilon_j^2 < \varepsilon_s^2$  показывает, что данные из ряда системы  $Y$  помогли предсказать поведение системы  $X$ . В таком случае можно сказать, что  $Y$  действует на  $X$  по Грейнджеру. В качестве количественной меры воздействия используется  $PI$  — улучшение прогноза, определяемое по формуле (3):

$$PI = 1 - \frac{\varepsilon_j^2}{\varepsilon_s^2} \quad (3)$$

Улучшение прогноза  $PI = 0$  в случае, если данные из ряда  $Y$  не помогают предсказывать динамику системы  $X$ , т.е.  $\varepsilon_j^2 = \varepsilon_s^2$ .  $PI$  достигает 1, если динамика  $X$  полностью описывается совместной моделью ( $\varepsilon_j = 0$ ), но не описывается индивидуальной.

В работе зависимость улучшения прогноза от уровня шума исследовалась на численных примерах – дискретных отображениях последования, связанных однонаправлено (логистическое отображение, воздействующее на логистическое отображение; отображение окружности, воздействующее на отображение окружности; отображение Эно, воздействующее на отображение Эно; отображение Эно, воздействующее на отображение окружности). Аттрактор ведущей системы представлял собою во всех рассмотренных случаях многоленточный хаотический аттрактор, образовавшийся вскоре после критической бифуркации Фейгенбаума; аттрактор ведомой системы – периодический с периодом 1, 2, 4 и др., так и хаотический аттрактор, тоже многоленточный.

Для всех перечисленных систем зависимость  $PI(\sigma)$  немонотонна – рис. 1(а), что объясняется следующим образом. При нулевом уровне шума и конечной величине связи совместная ошибка близка к нулю с точностью вычислений, а собственная — конечна и отлична от нуля.

При малых уровнях шума его увеличение приводит к ухудшению точности прогноза и увеличению совместной и индивидуальной ошибок пропорционально  $\sigma$ , как следствие этого величина  $\varepsilon_j^2/\varepsilon_s^2$  растёт и  $PI$  уменьшается. Начиная с некоторого значения  $\sigma$  уровень шума становится настолько велик, что предсказать точно значение  $x_n$  оказывается невозможно, но всё ещё можно предсказать, в какую часть аттрактора (ленту, группу точек) попадёт точка на следующем шаге и полезной оказывается информация о переключениях между лентами. Поэтому учёт информации о системе  $Y$  установится снова полезен для прогноза состояния системы  $X$  вследствие синхронности переключений. Чем больше шум, тем меньше оказывается роль собственной динамики и больше роль переключений в предсказании следующего состояния,  $PI(\sigma)$  растёт. Наконец, при очень больших уровнях шума кластеры точек на аттракторе начинают сливаться воедино, информация о переключениях теряет смысл, и  $PI(\sigma)$  снова начинает убывать к нулю.

Кроме того, в работе были рассмотрены связанные потоковые системы: система Рёсслера [7] и автогенератор с 1.5 степенями свободы [8], для которых тоже был показан немонотонный характер зависимости  $PI(\sigma)$  – рис.1(б).

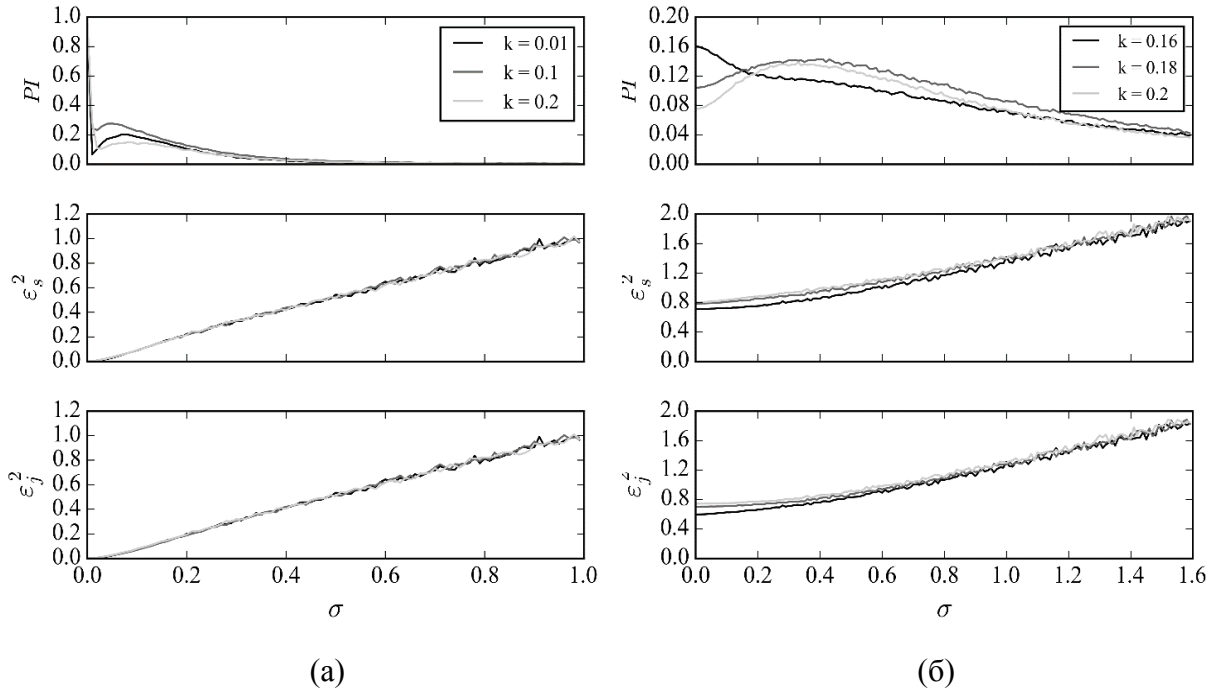


Рис. 1. Зависимости улучшения прогноза  $PI$ , уровня собственной  $\varepsilon_s^2$  и совместной  $\varepsilon_f^2$  ошибок аппроксимации от уровня измерительного шума  $\sigma$  для связанных логистических отображений (а) и для связанных автогенераторов с 1.5 степенями свободы (б),  $k$  – коэффициент связи между системами.

Таким образом, синхронность переключения между лентами аттрактора дает дополнительную информацию о состоянии системы и приводит к локальному увеличению уровня улучшения прогноза, что может повлиять на результаты анализа связанности, особенно в случае, когда анализируется нестационарный сигнал, дисперсия и форма которого меняется со временем, а также в случае изменений свойств канала связи во времени.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №№ 14-02-00492 и 14-07-00273) и стипендии Президента Российской Федерации для поддержки молодых учёных — № СП-1510.2015.4.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. C.W.J. Granger // *Econometrica*. 1969. V. 37. No. 3. P. 424.
2. T. Schreiber // *Phys. Rev. Lett.* 2000. V. 85. P. 461.
3. B. Schelter, J. Timmer, M. Eichler // *J. Neuroscience Methods*. 2009. V. 179. P. 121.
4. W. Hesse et al. // *J. Neuroscience Methods*. 2003. V. 124. P. 27.
5. Y. Chen et al. // *Physics Letters A*. 2004. V. 324. P. 26.
6. D. Marinazzo, M. Pellicaro, S. Stramaglia // *Phys. Rev. E*. 2006. V. 73. P. 6216
7. O.E. Roessler // *Phys. Lett.* 1976. V. A57. No 5. P. 397.
8. А.С. Дмитриев, В.Я. Кислов // *Радиотехника и электроника*. 1984. т. 29. № 12. С. 2389.

## **Исследование динамики МГД-волн в тепловыделяющей проводящей среде**

Д.И. Завершинский<sup>1,2</sup>, Н.Е. Молевич<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> *Самарский государственный аэрокосмический университет имени С.П.Королева (национальный исследовательский университет)*

<sup>2</sup> *Самарский филиал Учреждения Российской академии наук Физического института имени П.Н. Лебедева РАН*  
[dimanzav@mail.ru](mailto:dimanzav@mail.ru)

Основной целью данной работы являлось изучение влияния конечной электрической проводимости на динамику магнитоакустических и альфвеновских волн в плазменной среде, в которой протекают неадиабатические процессы нагрева и охлаждения, зависящие от температуры и плотности. Подобные среды естественным образом возникают в межзвездном пространстве и звездных атмосферах, кроме того они являются рабочими средами перспективных образцов термоядерных реакторов, в которых нагрев и удержание плазмы осуществляется магнитным полем.

Исследование волновой динамики проводилось с помощью полной системы уравнений магнитной гидродинамики с учетом влияния неадиабатических процессов нагрева и охлаждения и диссипативных процессов, обусловленных конечной электрической проводимостью. Рассматриваемая среда считалась однородной и находящейся под действием однородного внешнего магнитного поля. Считалось, что коэффициент электрической проводимости не зависит от термодинамических параметров среды. Одномерная динамика волн изучалась в декартовой системе координат.

Прежде всего, путем линейного анализа исходной системы, аналитически были получены уравнения, описывающие дисперсионные свойства альфвеновских и магнитоакустических волн. Для описания дисперсии волн использовался подход, аналогичный тому, который используется при описании дисперсии волн в неравновесных средах. Хорошо известно, что искажения газодинамических потоков, вносимые неравновесными процессами, связаны главным образом с изменениями теплоемкости и эффективного показателя адиабаты неравновесного газа, от которых зависит ход газодинамического процесса. Поэтому воздействие неадиабатических процессов в данной работе описывалось с помощью введения эффективных низкочастотных теплоемкостей при постоянном объеме и давлении, как аналог равновесным теплоемкостям в релаксирующей среде [1].

Аналитически было показано, что конечная проводимость оказывает влияние как на альфвеновские, так и на магнитоакустические волны. На основе решения полученных уравнений было показано, что магнитоакустические волны могут потерять устойчивость и начать усиливаться. Подобный эффект является результатом положительной обратной связи, обусловленной влиянием изоэнтропической (акустической) неустойчивости [2], определяемой неадиабатическими процессами нагрева и охлаждения среды. Стоит отметить, что конечная электрическая проводимость оказывает влияние на весь спектр частот как альфвеновских, так и магнитоакустических волн. Её величина определяет спектр усиливающихся магнитоакустических волн.

Далее, для описания эволюции магнитоакустических волн в акустически усиливающей среде, с помощью теории возмущений, было получено нелинейное эволюционное уравнение. По своей структуре, полученное нелинейное уравнение, совпадает с нелинейным уравнением, описывающим динамику волн в неравновесной

газовой среде с точностью до величин второго порядка [3,4]. Нелинейные процессы в низкочастотной части спектра, определяются коэффициентом нелинейности  $\Psi_0$  [5], который в свою очередь определяется функциональной зависимостью неадиабатических процессов от температуры и плотности.

На основе аналитического решения, нелинейного уравнения были описаны параметры и формы волновых фронтов, которые могут реализовываться в среде при условии неустойчивости магнитоакустических волн. В частности, в рассматриваемой нами среде, при выполнении условия изоэнтропической неустойчивости могут распространяться ударные волны с повышением и понижением плотности за фронтом. Кроме того, в случае если начальное возмущение меньше порогового значения, начальное возмущение произвольной формы, начинает распадаться на серию ударных импульсов (Рисунок 1). Амплитуда  $\rho_p$  и длина импульса при бесконечной проводимости найдены аналитически. Они определяются только неадиабатическими процессами в среде и не зависят от начальной амплитуды малого возмущения. Поэтому этот импульс является автоволной. Конечная проводимость приводит к уширению переднего фронта и уменьшению амплитуды импульса. Кроме того, подобный тип решений обладает одним из свойств типичных для солитонов, а именно сохранением формы после взаимодействия. Данный эффект был показан с помощью численного решения полной системы.

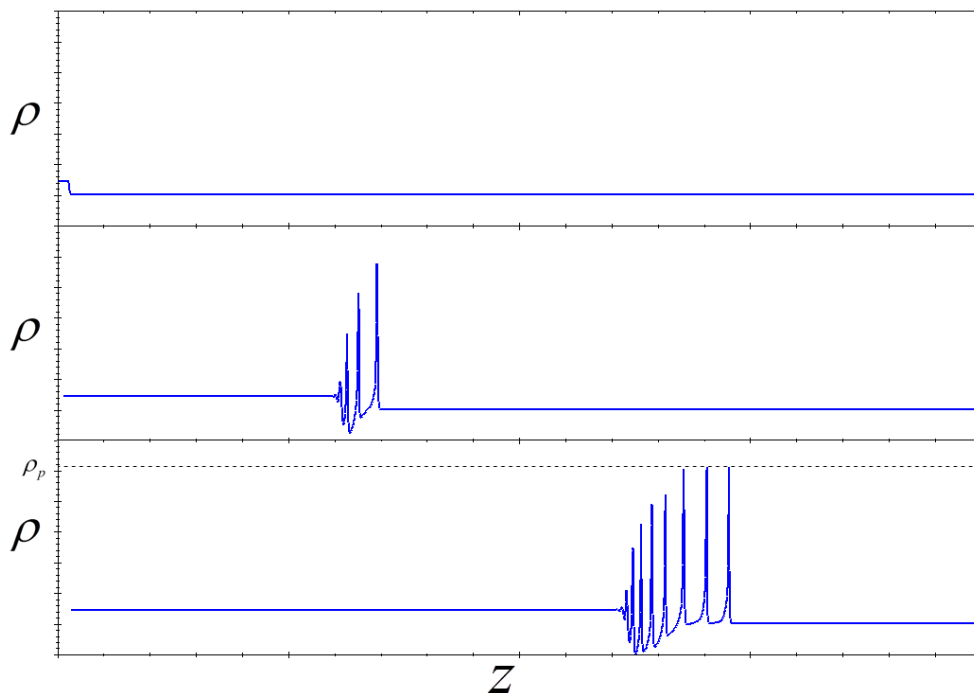


Рис. 1. Распад начального возмущение в виде «ступеньки» на серию автоволновых ударных импульсов.

Работа частично поддержана Минобрнауки РФ в рамках в рамках Программы повышения конкурентоспособности СГАУ на 2013-2020 гг. и Государственного задания вузам и научным организациям в сфере научной деятельности, проекты № 608, ГР 114091840046, грантом РФФИ 14-02-97030 р\_поволжье\_a, и стипендией Президента РФ для молодых ученых и аспирантов, осуществляющих перспективные научные исследования и разработки по приоритетным направлениям модернизации российской экономики 2013-2015 год.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я.Б. Зельдович, Ю.П. Райзер “Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений” М.: Наука, 1966.
2. G.B. Field // *Astrophysical Journal*. 1965. V. 142. P. 531-567.
3. V.G. Makaryan, N.E. Molevich // *J. Plasma Sources Sci. Techn.* 2007. V. 16. No 1. P. 124-131.
4. N.E. Molevich // *Astrophysics and Space Science*. 2011. V. 334. No 1. P. 35-44.
5. D.I. Zavershinsky, N.E. Molevich // *Technical Physics Letters*. 2013. V. 39. No 8. P. 676-679.



## О генерации белого и цветного хаоса

В.В. Зайцев, Ар.В. Карлов, А.Н. Юдин

Самарский государственный университет

[zaitsev@samsu.ru](mailto:zaitsev@samsu.ru)

Известно [1], что при квантовании уровня широкополосного сигнала генерируется равномерно распределенный случайный процесс – шум квантования, обладающий равномерной (белой) спектральной плотностью мощности. В настоящем сообщении этот эффект предлагается использовать в алгоритме генерации дискретного сигнала (временного ряда) с указанными вероятностными и спектральными характеристиками.

В качестве первичного источника широкополосного сигнала используется ДВ-осциллятор с инерционной нелинейностью (ДВИН-осциллятор) [2], имеющий режимы генерации хаотических автоколебаний. Осциллятор функционирует в соответствии с рекурсивным алгоритмом (уравнением движения) вида

$$Y[n] = a_1 Y[n-1] + a_2 Y[n-2] + (\gamma - Z[n-1])(Y[n-1] - Y[n-2]), \quad (1)$$

$$Z[n] = \sigma Z[n-1] + Y^2[n]. \quad (2)$$

ДВИН-осциллятор синтезирован методом импульсной инвариантности [3] по аналоговому прототипу – генератору с инерционной нелинейностью К.Ф. Теодорчика. Коэффициенты системы (3)–(4) связаны с параметрами аналогового прототипа соотношениями

$$a_1 = 2 \exp(-\pi \Omega_0 / Q) \cos(2\pi \Omega_0), \quad a_2 = -\exp(-2\pi \Omega_0 / Q), \quad \sigma = \exp(-2\pi \Omega_c), \quad (3)$$

где  $\Omega_0$  и  $\Omega_c$  – характерные частоты аналоговой системы, измеряемые в единицах частоты дискретизации ( $\Omega_0, \Omega_c < 0.5$ );  $\gamma > 0$  – независимый параметр, характеризующий глубину положительной обратной связи. Выражения (3) позволяют целенаправленно выбирать параметры дискретного осциллятора, исходя из представлений и динамике аналоговой системы.

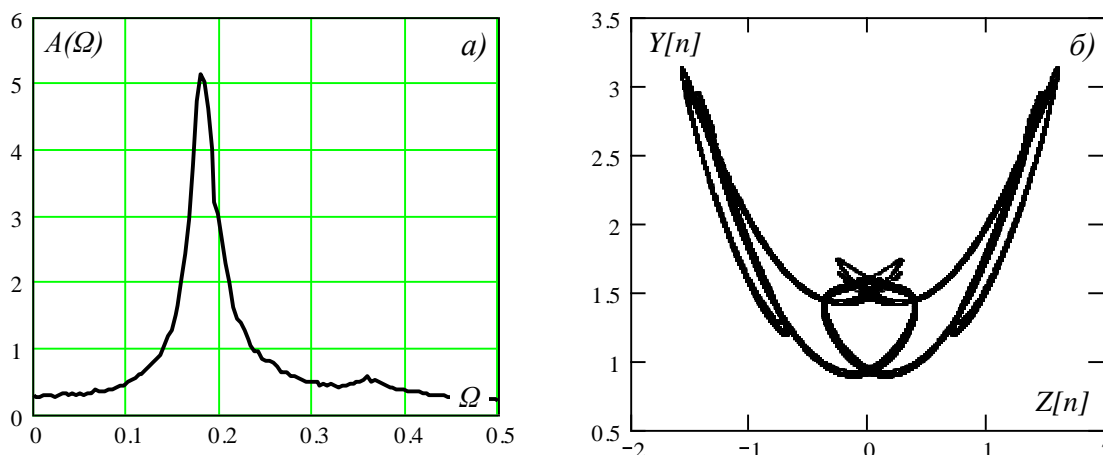


Рис. 1. Усредненный амплитудный спектр (а) и фазовая плоскость осциллятора (б).

ДВИН-осциллятор (1)–(2) имеет режимы генерации динамического хаоса. Примером может служить режим, реализуемый при значениях  $\Omega_0 = 0.14$ ,  $Q = 10$ ,  $\gamma = 1.5$  и

$\Omega_c = 0.1$ . Усредненный амплитудный спектр хаотических автоколебаний показан на рис. 1, а. Соответствующая ему траектория на фазовой плоскости  $(Y[n], Z[n])$  на рис. 1, б имеет ярко выраженную фрактальную структуру.

Сигнал  $Y[n]$  подвергается процедуре квантования значений с интервалом  $q$  в соответствии с функцией

$$Q(y) = q \cdot \text{floor}\left(\frac{y}{q} + 0.5\right)$$

и вычисляется разностный сигнал

$$S[n] = q^{-1}\{Q(Y[n]) - Y[n]\}.$$

Сигнал  $S[n]$  имеет равномерную в интервале  $-0.5 \leq s \leq 0.5$  плотность вероятности и белый спектр мощности. Усредненный амплитудный спектр и фазовая плоскость  $(S[n-1], S[n])$  сигнала показаны на рис. 2; результаты получены для  $q = 0.01$ .

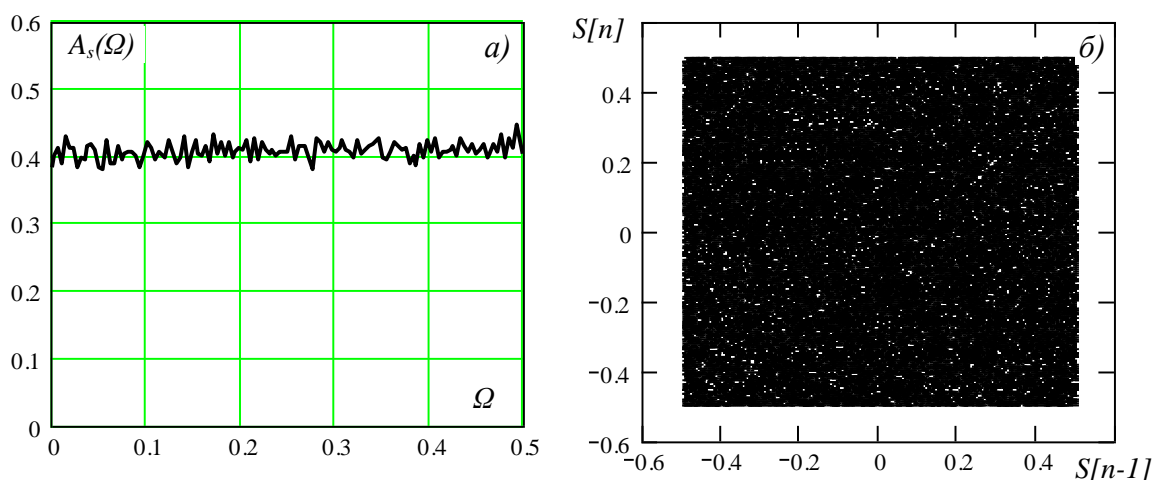


Рис. 2. Усредненный амплитудный спектр (а) и фазовая плоскость (б) сигнала  $S[n]$ .

Модели случайных процессов со спектральной плотностью мощности (СПМ) вида

$$\langle U^2 \rangle_\Omega = \frac{A}{\Omega^\gamma}, \quad (4)$$

где  $A = const$ , а показатель степени  $\gamma > 0$ , широко используются для описания шумов в физических, технических, экономических и других системах. Наибольшую известность, по-видимому, имеет фликкер-шум с показателем  $\gamma = 1$  [4]. В последнее время в ряде публикаций шумы со спектрами вида (4) стали называть «цветными»: розовым ( $\gamma = 1$ ), красным или коричневым ( $\gamma = 2$ ), чёрным ( $\gamma > 2$ ).

Для моделирования процесса используется разностная аппроксимация уравнение движения дробной RC-цепи:

$$D_t^\alpha U(t) + \frac{1}{\tau_r^\alpha} U(t) = \frac{1}{\tau_r^\alpha} S(t), \quad (5)$$

где  $\tau_r$  – постоянная времени цепи. При этом дробная производная Капуто  $D_t^\alpha$  в зависимости от вида спектра мощности (4) моделируемого процесса имеет порядок  $\alpha = \gamma/2$ . В дальнейшем считается, что  $0 < \alpha < 2$ . В случае, когда  $\alpha = 1$ , а  $S(t)$  – белый шум,  $U(t)$  можно назвать дробным процессом Орнштейна–Уленбека, по аналогии с классическим процессом (см., например, [5]).

С использованием разностной аппроксимации дробной производной Капуто с интервалом дискретизации  $\Delta$  уравнение (5) преобразовано в систему разностных уравнений

$$\begin{aligned} (1 + \lambda)U[1] &= U[0] + \lambda S[1], \\ (1 + \lambda)U[2] &= a_1 U[1] + a_0 U[0] + \lambda S[2], \\ (1 + \lambda)U[n] &= \sum_{m=1}^n a_m U[n-m] + \lambda S[n], \quad n = 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь введено обозначение  $\lambda = (\Delta/\tau_r)^\alpha \Gamma(2-\alpha)$ , а коэффициенты  $a_k$  равны

$$\begin{aligned} a_0 &= -(1 - 2^{1-\alpha}), \quad a_1 = -(2^{1-\alpha} - 2), \quad a_n = -((n-1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}), \\ a_m &= -((m-1)^{1-\alpha} - 2m^{1-\alpha} + (m+1)^{1-\alpha}), \quad m = 2, 3, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Для примера на рис. 3 приведен отрезок реализации хаотического процесса  $U[n]$  на выходе ДВ-системы (6) с параметрами  $\alpha = 0.5$ ,  $\Omega_r = 0.0001$ . На представленной реализации процесса отчетливо прослеживается также эффект мерцаний (flicker – мерцание, мерцать).

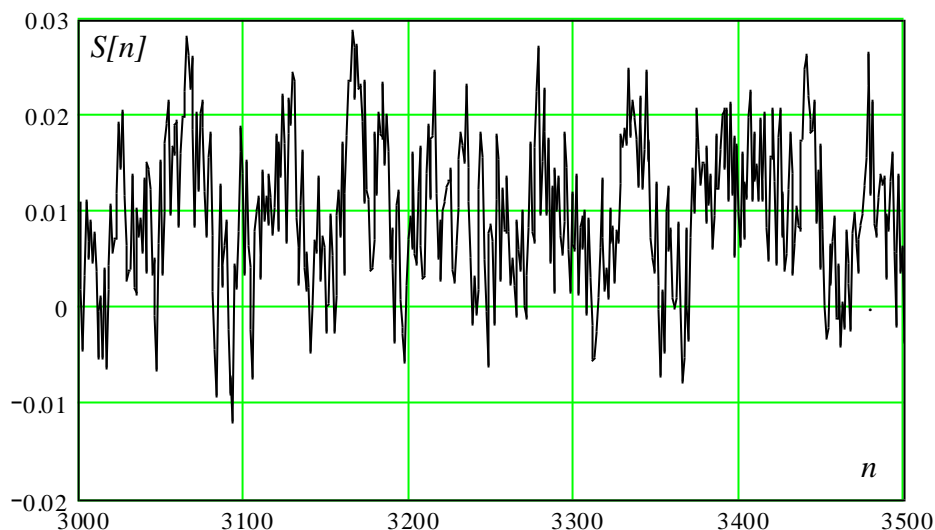


Рис. 3. Фрагмент реализации процесса фликкерного типа.

Оценка спектра мощности  $\langle U^2 \rangle_\Omega$  представлена на рис. 4. Оценка проведена по методу Уэлча с 1024-точечным преобразованием Фурье по реализации  $U[n]$  длиной  $2^{17}$ . Пунктирной линией рядом с графиком оценки СПМ нанесена зависимость  $\sim 1/\Omega$ . Видно, что спектр мощности процесса  $U[n]$  в диапазоне частот  $0.001 < \Omega < 0.3$  имеет вид функции  $1/\Omega$ . Отметим также, что в линейной ДВ-системе (6) происходит нормализация хаоса – в то время как входной сигнал  $S[n]$  системы имеет равномерное распределение, выходной сигнал  $U[n]$  распределен по нормальному закону.

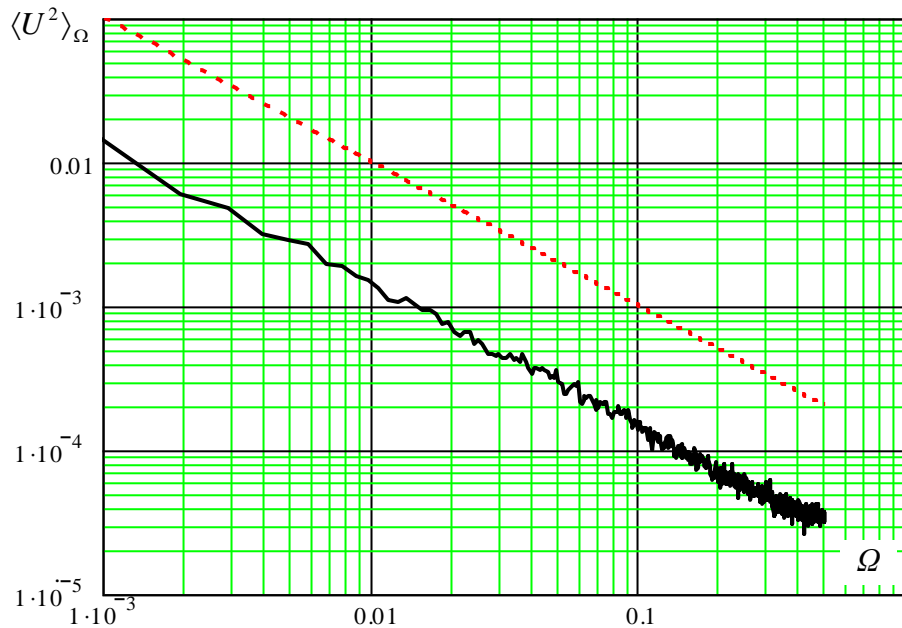


Рис. 4. Оценка СПМ процесса фликкерного типа.

Временной ряд  $U[n]$  предлагается использовать в качестве воспроизводимого хаотического источника в исследованиях методом имитационного моделирования. Еще одно применение временного ряда – маскировка цифровых данных, например, как это делается в работе [6].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Оппенгейм, Р. Шафер «Цифровая обработка сигналов» М.: Техносфера, 2006.
2. В.В. Зайцев, А.В. Карлов // Труды школы-семинара «Волны-2010». Секция 3. С. 9.
3. В.В. Зайцев и др. // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2008. Т. 11. N 4. С. 98.
4. Г.П. Жигальский «Флуктуации и шумы в электронных твердотельных приборах» М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012.
5. Н.Г. Ван Кампен «Стохастические процессы в физике и химии» М.: Высшая школа, 1990.
6. В.В. Зайцев, О.В. Зайцев // Вестник СамГУ. 2006. № 9(49). С. 66.

## Установление обобщенной хаотической синхронизации в сети систем с потоковым временем

А.А. Короновский<sup>1,2</sup>, О.И. Москаленко<sup>1,2</sup>, А.А. Пивоваров<sup>1</sup>

<sup>1</sup> ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

<sup>2</sup> ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.»  
[alexey.koronovskii@gmail.com](mailto:alexey.koronovskii@gmail.com)

Изучение обобщенной синхронизации привлекает в данный момент большое внимание исследователей [1-3]. Критерием установления режима обобщенной синхронизации является наличие функциональной зависимости между состояниями взаимодействующих осцилляторов [1,4]. Явление обобщенной синхронизации подробно изучено для достаточно широкого класса взаимодействующих систем: исследованы как системы с дискретным временем, связанные однонаправленно и взаимно [4], так и потоковые системы с однонаправленной [5] и взаимной связью [6] (включая пространственно-распределенные системы [7]). Логичным продолжением исследований, направленных на выявление закономерностей поведения сложных систем, связанных с возникновением режима обобщенной хаотической синхронизации, является рассмотрение сетей нелинейных элементов, однако в силу специфики и сложности рассматриваемых систем [6], в данном направлении исследований на настоящий момент существует много вопросов.

Целью настоящей работы являлось проведение изучения процессов установления режима обобщенной хаотической синхронизации в сети осцилляторов с потоковым временем, связанных взаимно. Основное внимание было уделено рассмотрению характера взаимодействия элементов сети при переходе от асинхронной динамики к синхронной при увеличении параметра связи. В качестве модельной системы, демонстрирующей хаотическую динамику, была выбрана система из пяти осцилляторов Ресслера. Выявлены основные особенности, характеризующие установление синхронного режима в сетях хаотических осцилляторов.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 14-12-00224).

### ЛИТЕРАТУРА

1. N.F. Rulkov // Phys. Rev. E. 1995. V. 51, 980
2. B.S. Dmitriev, A.E. Hramov et al. // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 102. P. 074101.
3. R.A. Filatov, A.E. Hramov, A.A. Koronovskii // Phys. Lett. A. 2006. V. 358. P. 301-308.
4. A.A. Koronovskii // Chaos, Solitons, Fractals. 2013. V. 46. P. 12-18
5. H.D.I Abarbanel, N.F. Rulkov, M.M. Sushchik // Physical Review E. 1996. V. 53. P. 4528-4535
6. O.I. Moskalenko // Physical Review E. 2012. V.86, 036216
7. А.А. Короновский, П.В. Попов, А.Е. Храмов // ЖЭТФ. 2006. Т. 130, № 4(10) , С.748-764

## Формирование квадратной решетки оптических вихрей в результате четырехволнового взаимодействия в модели широкоапертурного лазера

А.А. Кренц<sup>1,2</sup>, Д.А. Анчиков<sup>2</sup>, А.В. Пахомов<sup>1,2</sup>, Н.Е. Молевич<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Самарский государственный аэрокосмический университет,

<sup>2</sup>Самарский филиал Физического института им. П.Н. Лебедева РАН

[krenz86@mail.ru](mailto:krenz86@mail.ru)

В широкоапертурных лазерах нелинейное взаимодействие большого числа поперечных мод может приводить к спонтанному появлению сложных пространственно-временных оптических структур, в том числе квадратных решеток оптических вихрей. Квадратные решетки оптических вихрей экспериментально наблюдаются в микрочиповом лазере на кристалле Nd:YVO<sub>4</sub> [1–3], в широкоапертурном СО<sub>2</sub> лазере, работающем на одной продольной моде [4], в твердотельном лазере с оптической накачкой на кристалле LiNdP<sub>4</sub>O<sub>12</sub> [5], в Na<sub>2</sub> лазере [6], в полупроводниковом вертикально излучающем лазере [7]. Наблюдаемые структуры в разных типах лазеров поразительно похожи, несмотря на различие между физическими процессами, участвующими в излучении света.

Динамика широкоапертурного лазера, работающего на одной продольной моде, описывается системой уравнений Максвелла-Блоха, учитывающей поперечное распределение оптического поля [8]:

$$dE/dt = \sigma(P - E) + ia\Delta E; dP/dt = -(1 + i\delta)P + DE; dD/dt = -\gamma[D - r + 0.5(E^*P + EP^*)], \quad (1)$$

где  $E, P, D$  - безразмерные огибающие электрического поля, поляризации и инверсии населенности соответственно;  $\gamma = \gamma_{\parallel} / \gamma_{\perp}$  и  $\sigma = \gamma_c / \gamma_{\perp}$ ,  $\gamma_{\parallel}$  - скорость релаксации инверсии,  $\gamma_c$  - полуширина энергетической полосы пропускания резонатора,  $\delta = (\omega_a - \omega_c) / \gamma_{\perp}$  - расстройка между центром линии усиления и частотой резонатора, нормированная на полуширину линии усиления;  $\Delta_{\perp}$  - двумерный лапласиан,  $x, y$  - поперечные координаты, нормированные на ширину апертуры  $d$ ,  $a = c^2 / (2\omega\gamma_{\perp}d^2)$  - дифракционный параметр;  $r$  - накачка, нормированная на пороговое значение.

В работе [9] показано, что в случае  $\delta > 0$  простейшим устойчивым решением системы (1) является режим генерации под углом к оси резонатора и соответствующая ему бегущая волна оптического поля в поперечной плоскости:

$$E = E_0 \exp(i(\bar{k}_{\perp} \bar{r} + \Omega t)), P = P_0 \exp(i(\bar{k}_{\perp} \bar{r} + \Omega t)), D = D_0, \quad (2)$$

где  $|E_0|^2 = r - 1$ ,  $D_0 = 1$ ,  $P_0 = E_0$ ,  $\Omega = -\delta$ ,  $k_{\perp}^2 = k_0^2 = \delta/a$ .

Хорошо известно, что квадратная решетка вихрей образуется в результате нелинейного взаимодействия четырех бегущих волн, точнее, двух пар антиколлинеарных волн. Волновые вектора этих пар направлены взаимно перпендикулярно. Будем искать решение системы уравнений (1) в виде суммы четырех волн вида:

$$\begin{aligned}
 E(t, r) &= \sum_{j=1}^4 E_j(t) \exp(i(\vec{k}_j \vec{r} + \Omega t)), \quad P(t, r) = \sum_{j=1}^4 P_j(t) \exp(i(\vec{k}_j \vec{r} + \Omega t)), \\
 D(t, r) &= D_0 + \sum_{j=1}^4 d_{j,j}(t) \exp(2i\vec{k}_j \vec{r}) + \sum_{j=1}^4 d_{j,j+1}(t) \exp(i(\vec{k}_j + \vec{k}_{j+1}) \vec{r})
 \end{aligned} \tag{3}$$

где  $\vec{k}_1 \uparrow \downarrow \vec{k}_2, \vec{k}_3 \uparrow \downarrow \vec{k}_4, \vec{k}_1 \perp \vec{k}_3$ ,  $|\vec{k}_j| = \sqrt{\delta/a}$ ,  $\Omega = -\delta$ ,  $j = 1, 2, 3, 4, 1, 2, \dots$  Здесь  $d_{j,j}$  и  $d_{j,j+1}$  - комплексные амплитуды стационарных возмущений инверсии  $D$ . Индексирование ведется по соответствующим волновым векторам, причем имеют место соотношения:

$$d_{j,j} = d_{j+2,j+2}^*, \quad d_{j,j+1} = d_{j+2,j+3}^*, \tag{4}$$

так как инверсия  $D$  должна быть вещественной величиной.

Подставляя (3) в исходную систему (1), и учитывая лишь гармоники низших порядков, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для комплексных амплитуд четырех взаимодействующих волн:

$$\begin{aligned}
 \partial_t E_j &= \sigma(P_j - E_j), \quad \partial_t P_j = -P_j + D_0 E_j + E_{j+1} d_{j,j} + E_{j+2} d_{j,j+3} + E_{j+3} d_{j,j+1}, \\
 \partial_t D_0 &= -\gamma \left[ D_0 - r + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 (E_j^* P_j + E_j P_j^*) \right], \quad \partial_t d_{j,j} = -\gamma \left[ d_{j,j} + \frac{1}{2} (E_j^* P_{j+2} + E_{j+2} P_j^*) \right], \\
 \partial_t d_{j,j+1} &= -\gamma \left[ d_{j,j+1} + \frac{1}{2} (E_j P_{j+3}^* + E_{j+1} P_{j+2}^* + E_{j+2} P_{j+1}^* + E_{j+3} P_j^*) \right],
 \end{aligned} \tag{5}$$

где  $j = 1, 2, 3, 4, 1, 2, \dots$  - циклическая перестановка.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (5) описывает нелинейное взаимодействие четырех волн вида (2). Система уравнений (5) имеет несколько положений равновесия, каждое из которых соответствует своей оптической структуре (одиночная бегущая волна, стоячая волна, решетка вихрей первого порядка).

Решение в виде квадратной решетки оптических вихрей имеет вид:

$$\begin{aligned}
 |E_j|^2 &= |P_j|^2 = \frac{r-1}{5}, \quad D_0 = 1 + \frac{r-1}{5}, \\
 d_{j,j} &= \frac{1-r}{5} e^{i(\varphi_j - \varphi_{j+2})}, \quad d_{j,j+1} = 0, \\
 (\varphi_1 + \varphi_3) - (\varphi_2 + \varphi_4) &= \pi,
 \end{aligned} \tag{6}$$

Интерференция четырех волн с фазовым соотношением (6) дает решетку оптических вихрей. Показано, что решение (6) устойчиво по отношению к малым возмущениям.

Для численного моделирования системы уравнений (1) использовался псевдоспектральный метод расщепления по физическим факторам (Split Step Fourier Method). Использовались периодические граничные условия и случайные начальные условия. Численное моделирование подтвердило, что в системе (1) наблюдается спонтанное возникновение квадратной решетки оптических вихрей (рисунок 1).

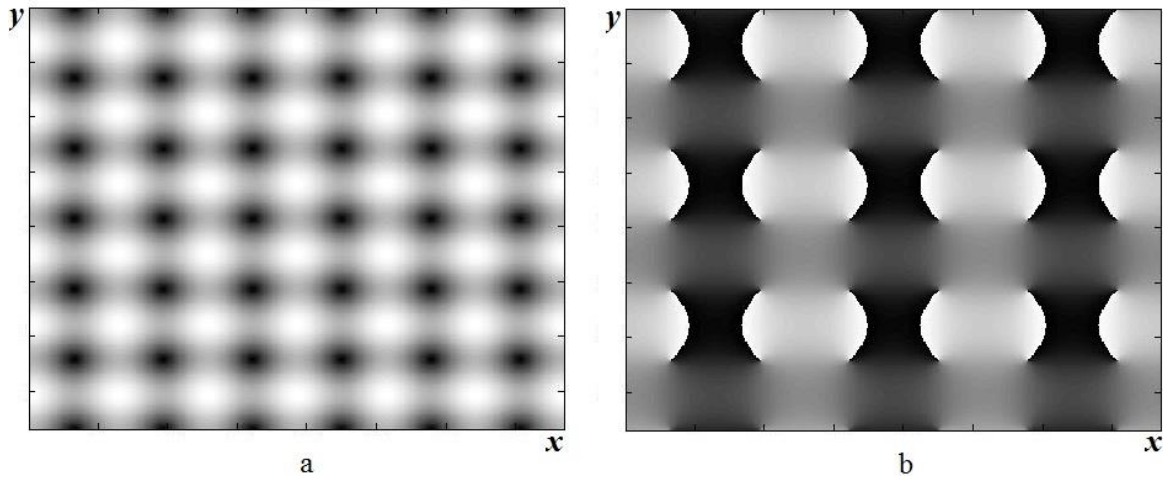


Рис. 1. Квадратная решетка оптических вихрей: а- распределение интенсивности, б- распределение фазы.

С помощью системы уравнений Максвелла-Блоха исследована пространственно-временная динамика широкоапертурного лазера. Получена система укороченных уравнений, описывающая взаимодействие четырех волн, распространяющихся во взаимно перпендикулярных направлениях. Показано что полученная система уравнения имеет несколько положений равновесия, каждое из которых соответствует своей оптической структуре: одиночная бегущая волна, стоячая волна квадратная решетка оптических вихрей. Показано, что вихревая решетка является устойчивым решением. Проведенное численное моделирование подтвердило, что в исследуемой системе наблюдается спонтанное возникновение квадратной решетки оптических вихрей.

Работа частично поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации в рамках программы повышения конкурентоспособности СГАУ на 2013-2020 годы, в рамках Государственного задания вузам и научным организациям в сфере научной деятельности, проект 1451, НИР №ГР 114091840046, грантом РФФИ 14-02-31419 мол\_а.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Y.F. Chen et al. // Appl.Phys. B. 2002. Vol. 75. P. 453-456.
2. Y.F. Chen et al. // Physical Review A. 2001. Vol. 64. P. 063807.
3. Y.F. Chen et al. // Physical Review A. 2001. Vol. 65. P. 013802.
4. E. Louvergneaux et al. // Physical Review A. 1996. Vol. 53. №6. P. 4435-4438.
5. K. Otsuka et al. // Optics Letters. 2009. Vol. 34. №1. P. 10-12.
6. M. Brambilla et al. // Physical Review A. 1991. Vol. 43. №9. P. 5090-5113.
7. J. Scheuer et al. // Science. 1999. Vol. 285. P. 230-233.
8. O.G. Calderon et al. // Physical Review A. 2003. Vol. 67. P. 043812.
9. P.K. Jacobsen et al. // Physical Review A. 1992. Vol. 45. №11. P. 2076-2086.



## **Диагностика глобальных структурных паттернов в многослойной сети осцилляторов**

В.В. Макаров<sup>1,2</sup>, В.А. Максименко<sup>1,2</sup>, А.А. Харченко<sup>1,2</sup>, А.Е. Храмов<sup>1,2</sup>,  
А.А. Короновский<sup>2,1</sup>

<sup>1</sup>СГТУ имени Гагарина Ю.А.

<sup>2</sup>СГУ имени Н.Г. Чернышевского

[vladmak404@gmail.com](mailto:vladmak404@gmail.com)

Многие биологические и химические системы, популяции живых организмов, социальные группы и интернет - лишь несколько примеров систем, состоящих из большого количества взаимодействующих динамических элементов [1-3]. Наиболее распространенным и признанным подходом к описанию характеристик подобных систем является моделирование их при помощи графов, где узлы представляют собой динамические элементы и ребра отвечают за взаимодействие между ними [4]. Несмотря на многие отличия, существует набор общих качеств, объединяющий все реальные сети, будь то биологические сети или сети техногенного характера. Таким свойством является в первую очередь степенной закон распределения степени узлов графа, отражающий неоднородность сети и наличие в ней узлов-хабов, а также существование мезоскопических структур [5].

Одной из главных областей применения теории сложных сетей является исследование топологии нейронной сети головного мозга [6], в частности, изменения в топологии при различных неврологических заболеваниях, таких как эпилепсия и болезнь Альцгеймера. Однако, восстановление топологии функциональной нейронной сети мозга может быть основано только на анализе сигналов магнито- и электроэнцефалографии, снимаемых с поверхности/глубин мозга и представляющих из себя суммарную активность больших групп нейронов [7], и их корреляционном анализе. При этом имеющиеся методы обладают достаточно низкой точностью и применение различных методов может давать кардинально отличающиеся результаты.

При исследовании заболеваний, характеризующихся патологической гиперсинхронной активностью нейронной сети, таких как эпилепсия, представляет большой интерес разработка методов, основанных на выделении синхронных кластеров, находящихся в различных областях головного мозга. Такой подход позволит понять механизмы развития эпилептического приступа, а также найти фокус эпилепсии. Кроме того, такое исследование способствует разработке более точных методов предсказания эпилептического приступа, что является одной из актуальнейших задач нейрофизиологии.

Очевидно, что для апробации подобного метода необходимо построение динамической модели сложной сети, имеющей топологию, характеристики которой схожи с таковыми реальной нейронной сети [8,9]. В последнее время для описания процессов, протекающих в социальных системах и нейронных ансамблях, активно применяются модели адаптивных сетей. Ключевой особенностью данных сетей является формирование в них локальных структурных кластеров и неоднородного распределения степеней узлов в результате обратной связи между динамикой элементов и топологией сети [10]. Данные эффекты хорошо описывают процессы кластеризации в социальных [11] и биологических системах [12,13], что делает адаптивные модели наиболее подходящими для анализа реальных сетей со сложной топологией. Наиболее эффективным представляется использование модифицированной многослойной модели, предложенной в [10]. Данная модель представляет из себя сеть

осцилляторов Курамото, состоящую из  $M$  слоев, связи внутри слоев которой эволюционируют по закону:

$$\dot{w}_{ij}^l = p_{ij}^l - w_{ij}^l \sum_{k=1}^N p_{ik}^l, \quad (3)$$

где  $l$  - номер слоя,  $p$  означает среднюю фазовую когерентность между осцилляторами  $i$  и  $j$  за характерный период времени  $T$ :

$$p_{ij}^{lT}(t) = \left| \frac{1}{T} \int_{t-T}^t e^{i[\varphi_j(\tau) - \varphi_i(\tau)]} dt \right|, \quad (4)$$

Также, на протяжении всей эволюции системы сохраняется условие

$$\sum_{j=1}^N w_{ij}^l = 1, \quad (2)$$

которое означает постоянство суммы входящих связей каждого элемента.

Для проведения аналогии с сигналами, снимаемыми с больших групп нейронов (ЭЭГ, МЭГ) мы рассматриваем макроскопические сигналы, генерируемые слоями модельной сети:

$$X_l(t) = \sum_{i=1}^N x_i^l(t), \quad (1)$$

В данной работе нами предложен метод выделения структурных кластеров, идентичных на всех слоях исследуемой модели, основанный на непрерывном вейвлетном преобразовании. Данный метод базируется на выделении синхронных паттернов, отражающих сильносвязанные структуры, что делает возможным его применение для диагностики глобальных синхронных режимов в реальных нейронных сетях. Метод апробирован на описанной выше модельной адаптивной сети, проведено сопоставление с реальными нейрофизиологическими данными.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках реализации государственного задания в сфере научной деятельности (проект 3.23.2014К) и Российского Фонда Фундаментальных Исследований (15-02-00624-А). В.А. Максименко выражает благодарность Фонду «Династия» за персональную поддержку.

## ЛИТЕРАТУРА

1. P. Holme // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. N. 4. P. 046119.
2. M.Valencia et al. // Phys. Rev. E. 2008. V. 77. N. 5. P. 050905.
3. J.P. Onnela et al. // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 2007. V. 104. P. 7332.
4. J. Stehle' et al. // Phys. Rev. E. 2010. V. 81. N. 3. P. 035101.
5. M. McPherson et al. // Annual Rev. of Sociol. 2001. V. 27. P. 415.
6. P.J. Ulhaas et al. // Frontiers InNeurosc. 2009. V. 3. P. 17.
7. A. Van Ooyen // Computation in Neural Systems 2001. V. 12, P. R1.
8. R. Axelrod // J. Conflict Resolut. 1997. V. 41. N. 2. P. 203.
9. S. Boccaletti et al. // Phys. Rev. E. 2007. V. 75. N. 4. P. 045102.
10. S. Assenza et al. // Scientific Reports 2011. V. 1. N. 99.
11. A. Arenas et al. // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 96. N. 11. P. 114102.
12. F. Varela et al // Nat. Rev. Neurosci. 2001. V. 2. P. 229.
13. Y. Moreno et al. // Europhys. Lett. 2004. V. 68. N. 4. P. 603.

## **Время-частотный анализ стохастических процессов**

Р.В. Михайлов

*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»  
[toctep944@gmail.com](mailto:toctep944@gmail.com)*

Представлен последовательный нелинейно-динамический анализ временных рядов вариации оптической плотности и локального аэроэстатического давления в зоне прямого и обратного прохождения ударной волны, пересекающей трассу оптического сигнального пучка. Эксперимент выполнен для различных газовых сред (аргон и воздух), при различных числах Маха и позволяет наблюдать три этапа развития аэродинамических течений на трассе — прохождение первичного фронта ударной волны, развитие турбулентных течений за фронтом и возвращение отраженной волны, разбивающей сформированные первичной волной неоднородности [1].

Временное разрешение оптического балансного регистратора позволяет фиксировать быстропротекающие процессы до частоты в 1МГц, регистрация давления проводится тензодатчиком со сравнимым временным разрешением. Выполнены оценки размерности пространства вложения для каждой из фаз наблюдаемого процесса [2, 3], установлено различие размерностей системы при первичном и вторичном пересечении ударной волной трассы оптического пучка. Построены профили фазовых траекторий в 3D проекции, обсуждаются классы управляющих уравнений для каждого из типов процессов, частотная структура спектра.

Результаты исследования являются пионерскими в известном из литературы ряду подходов к задачам аэрооптики. Полученные временные характеристики, информация о размерности системы и связанными переменными в исследуемом процессе принципиальны для проектирования систем высокосортной космической и наземной оптической связи. Предложенный подход может быть без изменения распространен на процессы обтекания выносных приемопередающих модулей, методику активного зондирования оптически прозрачных сред в широких диапазонах временной шкалы изучаемых явлений.

### **ЛИТЕРАТУРА**

1. О.И. Докунина, Е.Н. Терентьев, Л.С. Штеменко, Ф.В. Шугаев. // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 2013. №2.
2. A.M. Fraser, Y.L. Swinney // Phys. Rev. A 33 (1986) 1134-1140
3. M.V. Kennel, R. Brown and H. D.I. Abarbanel, // Phys. Rev. A, 1992, 45, 3403

## **Применение методов и подходов нелинейной динамики для исследования волновых явлений разведочной геофизики**

А.Е. Руннова, М.О. Журавлев, Н.С. Фролов

*Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.*

[anefila@gmail.com](mailto:anefila@gmail.com)

В настоящее время нелинейная динамика одна из активно развивающихся отраслей науки. Именно в рамках нелинейной динамики активно развиваются различные как системные подходы, так и математические методы исследования сложных нелинейных сигналов. Настоящий доклад посвящён адаптации и применению современных методов нелинейной динамики к анализу реальных данных, полученных в рамках полевых исследований геофизической разведки. На базе этих методик и подходов удаётся одномерным анализом выявить в двумерных данных геофизической природы зоны различных помех. Предложенный метод одномерного анализа является перспективным для геофизической разведки, кроме того, разработанные модификации методик по исследованию сложных сигналов являются интересными для развития математического аппарата нелинейной динамики.

В качестве полигона разработки и апробации методик выбраны данные сейсмической разведки, являющиеся одним из лидирующих способов поисково-разведочных работ и методов исследований строения земной коры [1–2]. Сейсмогеологические исследования несмотря на высокую стоимость являются относительно экологически небезопасными и предоставляют высокую детальность при большой глубинности приобретаемой в ходе информации о земных недрах. Окончательный результат структурных построений, прогнозирования литологического состава и нефтегазоносности изучаемого участка недр определяется наличием первичных материалов и качественным проведением камеральных геофизических работ — обработки и интерпретации. Получение сейсмогеологической информации из полевых данных ведётся путем обработки экспериментальных временных рядов с постоянным интервалом дискретизации. Геофизики традиционно работают в частотной области 0 – 150 Гц, причем чаще всего в низкочастотной части этого диапазона. С каждым годом перед специалистами в области обработки и интерпретации геофизических данных сейсмической разведки встают всё более сложные задачи, поскольку потребности в освоении новых месторождений, доразведки старых и изучения геологического строения районов постоянно растут, простые структурные ловушки уже открыты, и все время повышается актуальность проблемы разработки малотолщинных пластов по мере выработки запасов нефти основных пластов [2, 3].

Данные, на которых проводилась научно-исследовательская работа, были получены в ходе полевых исследований различных районов Заволжья Саратовской области. В частности, были рассмотрены участки на бортовой зоне Прикаспийской впадины; в зоне сочленения Жигулёвского свода с Бузулукской впадиной; а также зон Пугачёвского свода, Иргизского прогиба и Бузулукской впадины [4]. В качестве математического инструментария выбран, в первую очередь, научно-исследовательский подход к хаотической синхронизации на базе непрерывного вейвлетного анализа [5]. Все трассы, записываемые в каждый момент времени геофоном в каждом из пунктов наблюдения, могут быть рассмотрены как совокупность отдельных геофизических сигналов, являющихся совокупностью колебаний, вызванных различными причинами. В частности, на центральных трассах присутствует мощная зона регистрации колебаний, вызванных наличием звуковых и поверхностных волн-помех, например, волн Рэлея и Лява [2]. На определённых временах регистрации

исследователь наблюдает синхронизацию колебаний, соответствующих зонам регистрации полезных колебаний. В последнем случае выделяемые участки синхронных состояний совпадают с теоретически предсказываемыми линиями годографов, определяемых геометрией отражающих горизонтов в геологической среде. Этот подход на базе непрерывного вейвлетного преобразования полностью соответствует всем требованиям динамической обработки, основываясь на сохранении и отсутствии притворимых искажений в форму сейсмического импульса, регистрируемого при проведении сейсмической разведки. На рисунке 1 показана сейсмограмма в двумерной визуализации с выделяемыми зонами синхронности по волны-помехам поверхностного типа.

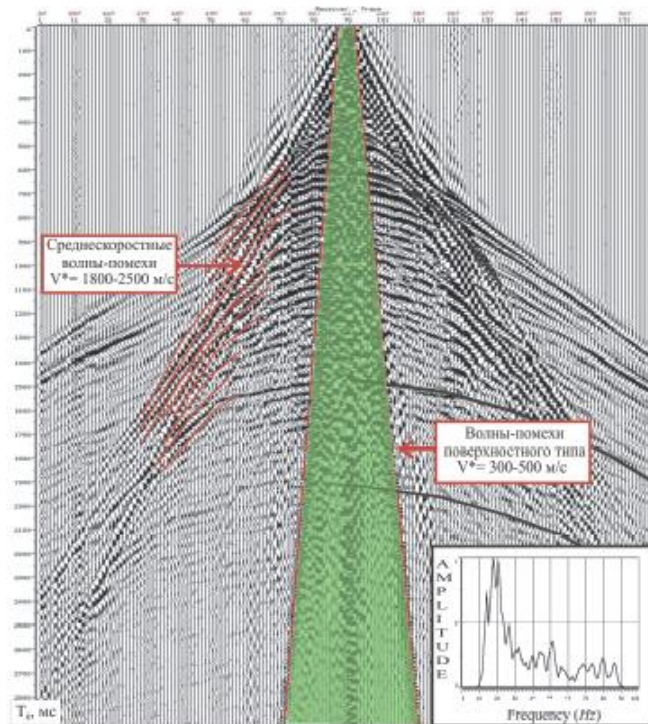


Рис. 1. Сейсмограмма общего пункта возмущения. Конусом выделена зона синхронизации волн-помех поверхностного и звукового типов.

В работе рассмотрены результаты использования различных типов непрерывного вейвлетного преобразования, а также показаны возможности такого новейшего метода исследования систем нелинейной динамики, как метода эмпирических мод.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках Государственного задания высшим учебным заведениям на 2015 год и плановый период 2016 года в части проведения научно-исследовательских работ (СГТУ-141, СГТУ-146), при финансовой поддержке РФФИ в рамках проекта № 14-05-31171 мол\_а, а также при поддержке Фонда содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере (конкурс «У.М.Н.И.К.»).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В.И. Бондарев, С.М. Крылатков. Основы обработки и интерпретации данных сейсморазведки. Екатеринбург: Издательство УГГГА, 2001.
2. O. Yilmaz Seismic Data Analysis. V. I, II. USA: Tulsa, Society of Exploration Geophysicists, 2001.

3. С. А. Конторович и др. // Геология и геофизика. 2004. Т. 45. № 1. С. 79-90.
4. В.П. Шебалдин Тектоника Саратовской области. С., ФГУП НВНИИГГ, 2008 г.
5. А.Е. Нграмов, А.А. Короновский // Physica D. 206, 3-4 (2005) 252-264

## Эволюция ветровых волн в кольцевом канале

Н.П. Савенкова<sup>1</sup>, С.А. Складчиков<sup>1</sup>, В.С. Лапонин<sup>1</sup>, С.В. Анпилов<sup>1</sup>,  
У. Юсупалиев<sup>2</sup>, С.А. Шутеев<sup>2</sup>

<sup>1</sup> МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК

<sup>2</sup> МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет  
[lap@cs.msu.ru](mailto:lap@cs.msu.ru)

Изучению ветровых волн посвящено большое количество работ, например [1-5]. Тем не менее, многие вопросы до сих пор остались не выясненными. Так, в настоящее время не достаточно подробно изучены как экспериментально, так и теоретически соотношения между длиной, амплитудой и скоростью таких волн. По этой причине данная работа посвящена изучению указанных соотношений с помощью математического моделирования.

Рассмотрим кольцевой канал с высотой 0.6 м, шириной 0.2 и внутренним радиусом 1 м (рис. 1). В начальный момент времени в канале находится покоящаяся жидкость, занимающая половину объема в установке, оставшийся объем заполнен воздухом. Ветер (со скоростью 4,5 м/с) создается четырьмя вентиляторами, расположенными равномерно над каналом.

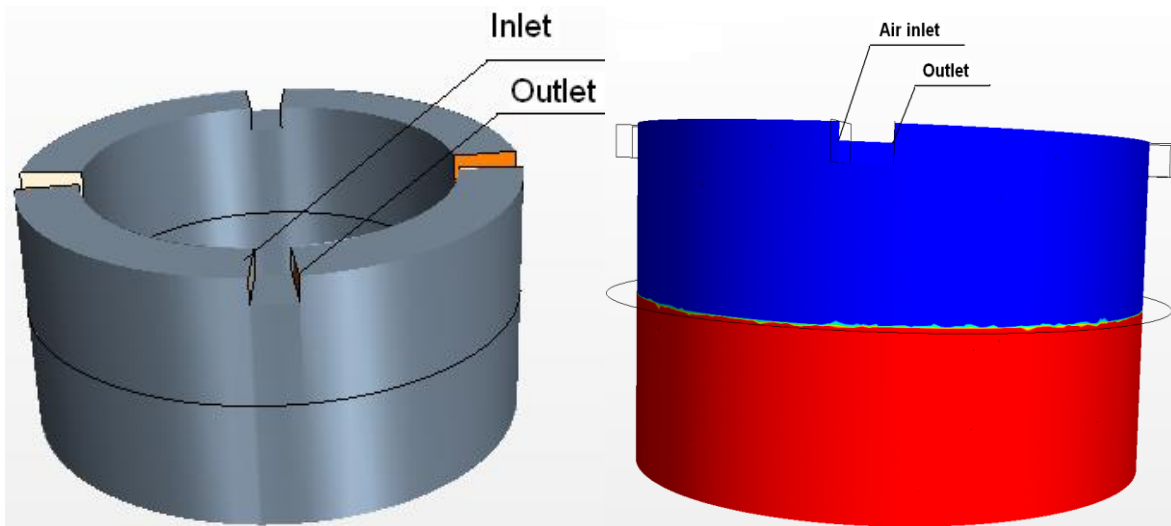


Рис. 1. Расчетная область, в которой проводилось математическое моделирование, снизу жидкость, а сверху воздух.

Для математического моделирования данного процесса запишем систему уравнений Навье-Стокса в декартовой системе координат, ось  $oZ$  которой совпадает осью симметрии кольца. Системы уравнений для воздуха и воды выписываются отдельно [5-8]. Для каждой среды с плотностью  $\rho_{w,a}$  трехмерная система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} + \frac{\partial \rho u w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = (\text{Div} \tau)_1 + F_{\text{пов.нат.}}, \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho v w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} = (\text{Div} \tau)_2 + F_{\text{пов.нат.}}, \\ \frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial \rho u w}{\partial x} + \frac{\partial \rho v w}{\partial y} + \frac{\partial \rho w^2}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = (\text{Div} \tau)_3 - \rho g + F_{\text{пов.нат.}}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0, \end{array} \right.$$

где  $u, v, w$  – компоненты трехмерного вектора скорости в среде по координатам  $x, y, z$  соответственно,  $\overline{F}_{\text{пов.нат.}} = \gamma l$  – сила поверхностного натяжения, где  $l$  – ширина канала,  $\gamma = \left( r - \frac{R_u T}{M} \left( 1 - \frac{\rho_a}{\rho_w} \right) \right) \cdot \frac{M^{1/3} \rho_w^{2/3}}{6N^{1/3}}$ , – коэффициент поверхностного натяжения, где  $x, y, z$  – декартовы координаты,  $t$  – время,  $U_a, V_a, W_a$  – компоненты скорости в воздухе по координатам  $x, y, z$  соответственно,  $U_w, V_w, W_w$  – компоненты скорости в воде по координатам  $x, y, z$  соответственно,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\mu$  – динамическая вязкость среды,  $r$  – теплота парообразования,  $\rho_w$  – плотность воды,  $\rho_a$  – плотность воздуха,  $R_u$  – универсальная газовая постоянная,  $T$  – температура,  $U$  – внутренняя энергия жидкости,  $M$  – молекулярная масса,  $N$  – число Авогадро,

$$(\text{Div}(\tau))_i = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \tau_{ki}}{\partial x_k}, \quad \tau_{ki} = 2\mu S_{ki}, \quad S_{ki} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right).$$

На границе раздела сред воды и воздуха выписываются уравнения, учитывающие вязкое трение, посредством которого среды связаны между собой:

$$\begin{aligned} \rho_w \frac{\partial U_w}{\partial t_1} &= -\mu_w \frac{\rho_w + \rho_a}{2} (U_w - U_a) \sqrt{(U_w - U_a)^2 + (V_w - V_a)^2 + (W_w - W_a)^2}, \\ \rho_w \frac{\partial V_w}{\partial t_1} &= -\mu_w \frac{\rho_w + \rho_a}{2} (V_w - V_a) \sqrt{(U_w - U_a)^2 + (V_w - V_a)^2 + (W_w - W_a)^2}, \\ \rho_w \frac{\partial W_w}{\partial t_1} &= -\mu_w \frac{\rho_w + \rho_a}{2} (W_w - W_a) \sqrt{(U_w - U_a)^2 + (V_w - V_a)^2 + (W_w - W_a)^2}, \\ \rho_a \frac{\partial U_a}{\partial t_1} &= \mu_a \frac{\rho_w + \rho_a}{2} (U_w - U_a) \sqrt{(U_w - U_a)^2 + (V_w - V_a)^2 + (W_w - W_a)^2}, \\ \rho_a \frac{\partial V_a}{\partial t_1} &= \mu_a \frac{\rho_w + \rho_a}{2} (V_w - V_a) \sqrt{(U_w - U_a)^2 + (V_w - V_a)^2 + (W_w - W_a)^2}, \\ \rho_a \frac{\partial W_a}{\partial t_1} &= \mu_a \frac{\rho_w + \rho_a}{2} (W_w - W_a) \sqrt{(U_w - U_a)^2 + (V_w - V_a)^2 + (W_w - W_a)^2}. \end{aligned}$$

На поверхности воды образуются волновые движения, которые начинаются с очень малых капиллярных волн (волн ряби). Со временем амплитуда (высота  $h$  в несколько мм) и длина волны  $\lambda$  увеличиваются, причем амплитуда нарастает быстрее, чем  $\lambda$ . Когда эти волны достигают длины  $\sim 14 \div 17$  мм и крутизны  $h/\lambda \sim 0,12 \div 0,15$



ситуация меняется: увеличение длины волны  $\lambda$  идет быстрее, чем рост их амплитуды  $h$ , в результате чего их крутизна  $h/\lambda$  уменьшается. В таком состоянии волны ряби превращаются в гравитационные, обладающие совершенно другими свойствами, чем капиллярные: в формировании волнового движения существенную роль играет сила тяжести.

Движение частиц воды в гравитационной волне складывается из интенсивного орбитального и небольшого поступательного движения в направлении распространения волны (наподобие спирали), в результате происходит перенос воды в направлении распространения волны. А при наличии ветрового воздействия на водную поверхность этот перенос усиливается, вследствие чего изменяется профиль волны: наветренный склон становится более пологим, а подветренный круче.

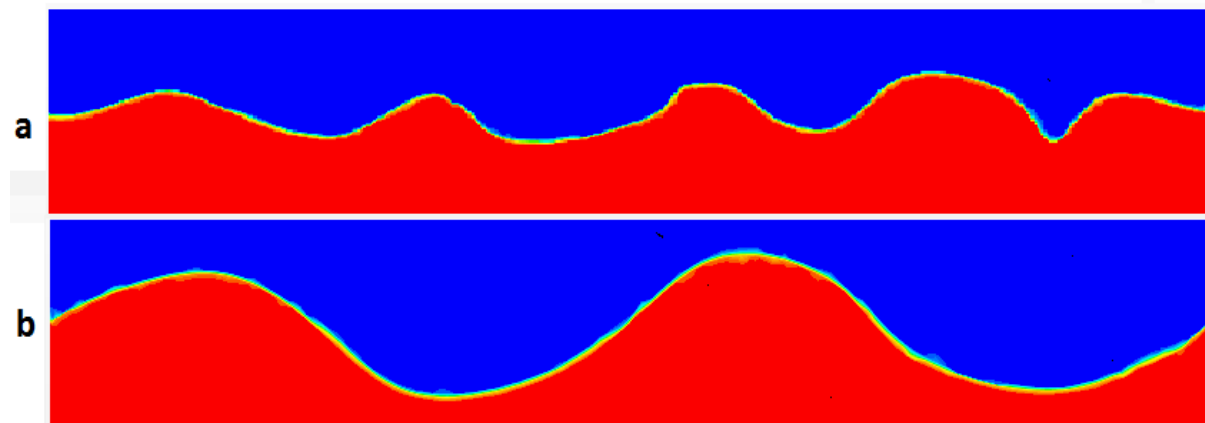


Рис. 2. Результат математического моделирования в кольцевом канале, развернутом в прямой отрезок. На рисунке 2а представлен момент времени, к которому образуются пять волн, а на рисунке 2б – момент времени, к которому образуются две волны.

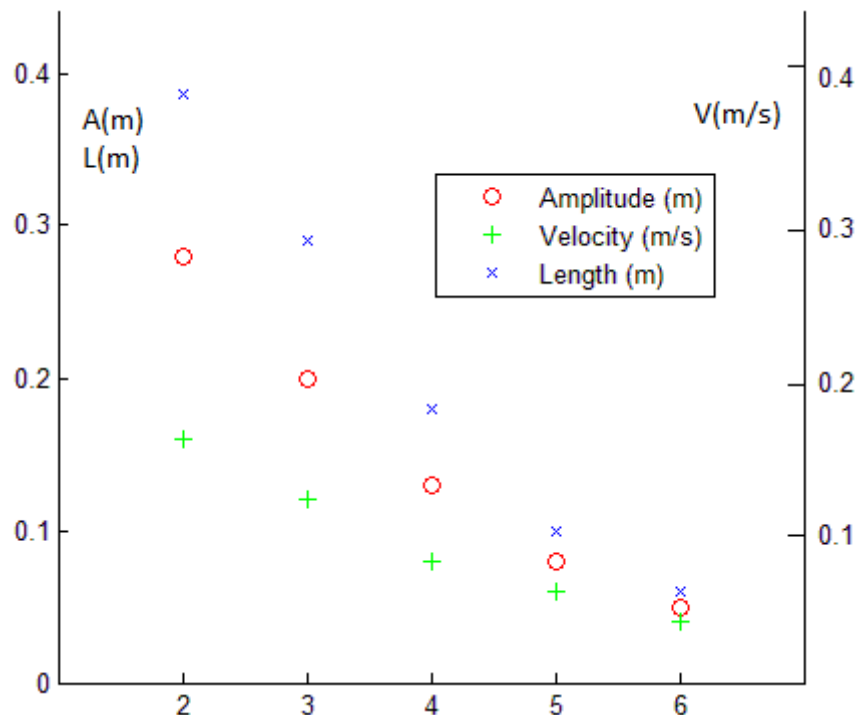


Рис. 3. Зависимость амплитуды, длины и скорости волны от количества образований на поверхности жидкости.

На наветренном склоне такой волны под действием ветра снова возникают короткие волны, через посредство которых происходит передача энергии ветра этой волне, т.е. она усиливается: увеличиваются её амплитуда, а также длина.

Дальнейшее воздействие ветра приводит к усилению этих волн, а следовательно, к увеличению их скорости распространения  $V_w$ . Высота волн растет до тех пор пока отношение скорости волны  $V_w$  к скорости ветра  $V_{WD}$  не достигнет 0,5, и при большем значении происходит срыв острых гребней волн. После этого увеличивается их длина, что приводит к уменьшению количества волн в канале и росту их амплитуд  $h$  (рис.2). Соотношение между длиной  $\lambda$ , амплитудой  $h$  и скоростью  $V_w$  волн приведено на рис. 3. Из этих рисунков следует, что в результате эволюции ветровых волн в канале происходят одновременно уменьшение количества таких волн, рост их амплитуды и скорости распространения. То есть волны, взаимодействуя между собой и с ветром, становятся нелинейными: их скорость зависит от их амплитуды (чем больше амплитуда, тем больше скорость волн).

В подветренной части волн образуются вихревые движения воздуха.

Таким образом, вышеприведенные качественные результаты моделирования адекватно описывают эволюцию ветровых волн, полученную из натуральных наблюдений [1-3, 9].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Юэн, Б. Лэйк Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде. М.: Мир, 1987.
2. Ю.А. Степанянц, А.Л. Фабрикант // Современные проблемы физики. М.: Физматлит, 1996.
3. L.H. Holthuijsen (2007), «Waves in oceanic and coastal waters», Cambridge University Press, [ISBN 0521860288](#)
4. Falkovich, Gregory (2011), «[Fluid Mechanics \(A short course for physicists\)](#)», Cambridge University Press, [ISBN 978-1-107-00575-4](#)
5. Р. Кузьмин, В. Лапонин, Н. Савенкова, С. Складчиков // Инженерная физика. — 2014. — № 8. — С. 19–24.
6. N. Savenkova, V.A. Laponin // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. — 2013. — Vol. 37, no. 2. — P. 49–54.
7. U. Yusupaliyev, N. Savenkova, S. Shuteyev et al. // MOSCOW UNIVERSITY PHYSICS BULLETIN. — 2013. — Vol. 68, no. 4. — P. 317–319.
8. V. Bychkov, N. Savenkova, S. Anpilov, Y. V. Troshchiev // IEEE Transactions on Plasma Science. — 2012. — Vol. 40, no. 12. — P. 3158–3161.
9. В. В. Шулейкин Физика моря. М.: Наука. 1968

## **Анализ формирования кластеров в адаптивной сети осцилляторов Курамото по интегральным сигналам**

А.А. Харченко<sup>1</sup>, В.В. Макаров<sup>2,1</sup>, А.Е. Храмов<sup>2,1</sup>

<sup>1</sup>*Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского*

<sup>2</sup>*Саратовский государственный технический университет имени Ю.А. Гагарина*

[ainadil@mail.ru](mailto:ainadil@mail.ru), [hramovae@gmail.com](mailto:hramovae@gmail.com)

Одной из наиболее значимых задач современной науки в области исследования сетевых структур является изучение режимов синхронизации взаимодействующих элементов [1,2]. Узлы в таких сетях выступают в качестве элементов этих сложных систем, а связи между узлами представляют собой взаимодействие между ними. В последнее время возникает интерес к рассмотрению сетей, топология которых развивается и адаптируется с течением времени, что обусловлено некоторым внешним воздействием, или под действием внутренних элементов, или в соответствии с конкретными заранее определенными эволюционирующими правилами [2]. Данные исследования представляют значительный интерес как с точки зрения фундаментальных вопросов нелинейной динамики, так и для решения прикладных задач в различных отраслях естествознания, а также при изучении биологических, социальных, экономических и других систем, представляющих совокупность большого числа агентов с различными типами и интенсивностями связей между ними [3–6].

Особенно важны данные исследования для нейродинамики и нейрофизиологии, где исследуемые объекты – нейронные ансамбли центральной и периферийной нервных систем – представляют собой сложные сети элементов с собственной сложной динамикой – нейронов [7]. Традиционным и весьма эффективным методом исследования электрической активности головного мозга является регистрация электроэнцефалограмм (ЭЭГ), которые представляют собой усредненную сумму электрических полей, генерируемых синаптическими токами большой группы нейронов в окрестности регистрирующего электрода [8]. У человека запись ЭЭГ проводится обычно посредством электродов, размещаемых на коже головы. У животных традиционно используется метод вживленных электродов, который даёт возможность получить более детальную информацию об электрической активности относительно небольших популяций нейронов коры головного мозга и подкорковых структур. Таким образом, можно сделать вывод, что сигналы электроэнцефалограмм представляют собой усредненные (интегральные) характеристики, описывающие динамику сложной нейронной сети. Увеличение амплитуды ЭЭГ говорит о повышении когерентности колебаний в ансамбле нейронов в окрестности регистрирующего электрода. В последнее время задачи, связанные с диагностикой синхронных режимов в нейронных сетях головного мозга, представляют большой интерес для исследований патологической активности, в частности, эпилептической, в связи с чем возникает важный вопрос об необходимости оценки эффективности использования для этих целей интегральных характеристик, представляющих интегральные усредненные по ансамблю характеристики.

Целью данной работы является исследование сети связанных осцилляторов и анализ возникновения кластеров по интегральным характеристикам. В качестве объекта исследований рассмотрена модель сложной сети с адаптивными связями, в которой синхронная динамика приводит к появлению кластеров, взаимодействующих между собой смежных элементов. Динамика данной сети анализировалась с использованием непрерывного вейвлет-преобразования интегральных характеристик сети, которые позволяют провести диагностику формирования и динамики кластеров.

Использование распределения фаз позволит нам количественно оценить кластеризацию рассматриваемой модели сети.

В настоящем исследовании используется модель Курамото, являющаяся одной из наиболее распространенных сетевых моделей, которая выступает в качестве математической интерпретации коллективной динамики химических и биологических осцилляторов [9]. В последнее время различные модификации данной модели сети фазовых осцилляторов активно применяются для анализа процессов кластеризации и синхронизации, в том числе и в нейронных сетях и социальных системах [10].

В нашей работе мы рассматривали адаптивную модель связей предложенную ранее [10]. Данная модель отражает две главные особенности природных сетей, а именно, безмасштабное распределение веса связей и формирование мезомасштабных структур. Такие явления могут быть причиной для возникновения следующих механизмов: «гемофилии», связанной с усилением связей между синхронизированными узлами и «гомеостазом», осуществляемым путем проведения условия:

$$\sum_{j \neq i}^N \omega_{ij} = 1. \quad (1)$$

т.е. сумма всех весов входящих в узел постоянна в любой момент времени,  $\omega_{ij}$  – коэффициент, определяющий силу связи, соединяющей узлы  $j$  и  $i$  сети.

Базовой моделью для исследования выступает сеть осцилляторов, представляющих собой связанные генераторы Курамото, где каждый узел сети имеет связь с другими узлами  $\omega_{ij}$  и фазу  $\varphi_i$  изменяющиеся во времени:

$$\dot{\varphi}_i = \delta_i + \lambda \sum_{j=1}^N \omega_{ij} \sin(\varphi_j - \varphi_i), \quad (2)$$

где  $\delta_i$  – заданные случайным образом круговые частоты осцилляторов Курамото,  $N$  – число генераторов в сети,  $\lambda$  – интенсивность связей между генераторами и  $\omega_{ij}$  – вес связи между  $j$  и  $i$ - узлами. Величина  $\omega_{ij}$  изменяется с течением времени по закону:

$$\dot{\omega}_{ij}(t) = \omega_{ij}(t) \left[ s_i p_{ij}^T(t) - \sum_{l=1}^N \omega_{il}(t) p_{il}^T(t) \right], \quad (3)$$

где  $s_i = \sum_{j=1}^N \omega_{ij}$  – общая входная сила узла  $i$ ,  $p_{ij}^T(t)$  – это степень локальной синхронизации между осциллятором  $i$  и  $j$  усредненная по времени в интервале  $[t-T, t]$ , которая определяется через уравнение:

$$p_{ij}^T(t) = \left| \frac{1}{T} \int_{t-T}^t e^{\sqrt{-1}[\varphi_j(\tau) - \varphi_i(\tau)]} d\tau \right|. \quad (4)$$

Здесь параметр управления  $T$  был выбран равным  $T = 100$  для всех расчетов, аналогично работам [10, 11].

Для анализа синхронизации с использованием интегральных характеристик аналогично работам [12, 13] мы рассматривали макроскопический сигнал, представляющий собой усреднения колебаний по некоторому подмножеству  $N$

элементов сети (в данном исследовании рассматривался сигнал, представляющий собой усреднение по всей сети из  $N$  осцилляторов):

$$X(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos(\varphi_i(t)) \quad (5)$$

где  $\varphi_i(t)$  - это фазы осцилляторов генерируемых от каждого узла в сети.

Характеристика (5) в первом приближении может рассматриваться как аналог интегрального сигнала электроэнцефалограммы и характеризуют вклад некоторой группы осцилляторов (нейронов в нейронной сети) в регистрируемый в эксперименте сигнал от сети осцилляторов (2).

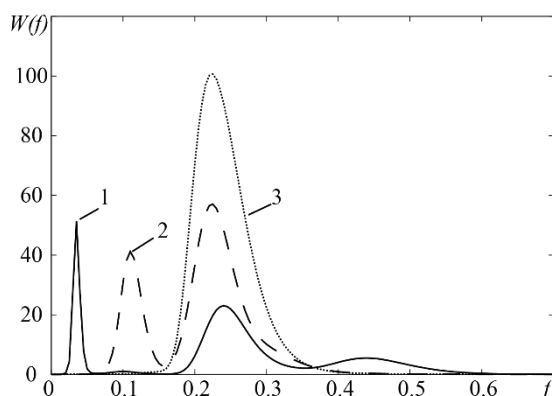


Рис. 1. Вейвлет спектр макроскопического сигнала (2) для различных  $\lambda$ :  $\lambda=1.5$  (кривая 1),  $\lambda=2.5$  (кривая 2),  $\lambda=3.5$  (кривая 3).

В качестве примера рассмотрим, как ведет себя сеть состоящая из  $N=150$  генераторов Курамото при увеличении силы связи  $\lambda$ . Соответствующие вейвлет-спектры интегрального сигнала приведены на рис. 1 для нескольких значений  $\lambda$ :  $\lambda=1.5$  (кривая 1),  $\lambda=2.5$  (кривая 2),  $\lambda=3.5$  (кривая 3). Каждый максимум на вейвлетном спектре соответствует формирующемуся кластеру. Хорошо видно, что с увеличением силы связи  $\lambda$  в адаптивной сети образуется некоторое количество кластеров, число которых уменьшается с ростом интенсивности связи, что приводит в итоге к режиму глобальной фазовой синхронизации в сети и, как следствие, образованию единого кластера.

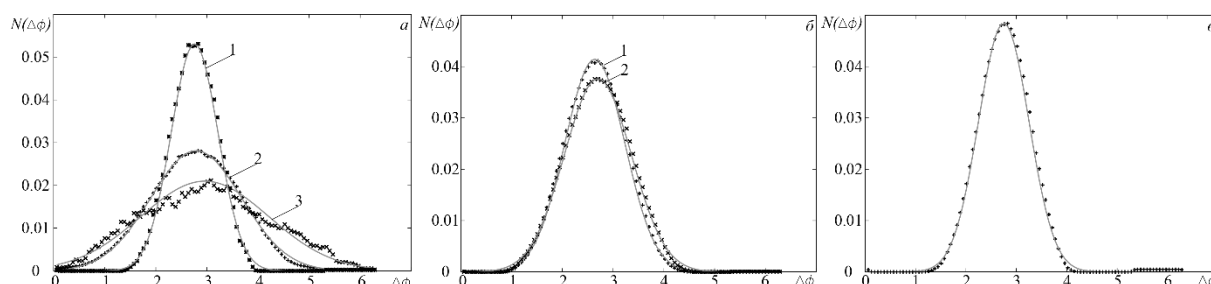


Рис. 2. Распределение разности фаз между осцилляторами Курамото в адаптивной сети для различной силы связи  $\lambda$ :  $\lambda=1.5$  (а),  $\lambda=2.5$  (б),  $\lambda=3.5$  (в). Цифрами на графике обозначены кластеры возникающие в сети. Сплошная кривая соответствует функции Гаусса, использованной для аппроксимации распределений.

На рис. 2 представлена эволюция распределения фаз анализируемых сетевых кластеров. Данное распределение позволяет не только качественно, но и количественно установить число связанных между собой осцилляторов в кластерах адаптивной сети. Сравнивая между собой вейвлет-спектры интегрального сигнала (рис. 1) и

распределения фаз сетевых кластеров (рис. 2) можем заметить для случая малой связи  $\lambda=1.5$  (рис. 2а) пик с максимальной амплитудой соответствует распределению фаз с наибольшей дисперсией, в то время как распределение фаз с наименьшей дисперсией соответствует второму по величине пику на вейвлет-спектре сигнала. По количеству входящих в кластер осцилляторов рассмотренные кластеры примерно равны. Далее если рассматривать случай  $\lambda=2.5$  (рис. 2б) можно отметить, что кластеры также равны по количеству входящих в них осцилляторов, так как на рассматриваемой зависимости наблюдается равенство дисперсии и амплитуды характеристики. Случай большой связи соответствует единственному кластеру также с Гауссовым распределением фаз осцилляторов (рис. 2в).

Таким образом, в представленном докладе рассматривается анализ фазовой синхронизации путем изучения вейвлет-спектров интегрального сигнала и эволюции распределения разности фаз в кластерах адаптивной сети. Показано, что диагностика синхронизации по вейвлет-спектрам их сравнение с распределением разностей фаз осцилляторов дает корректное качественное и количественное описание процессов кластеризации при большой силе связи в адаптивной сети. Использование такого подхода для анализа сети Курамото с адаптивными связями дает нам возможность определить какое количество осцилляторов находится во взаимодействии в том или ином кластере. Практическая значимость представленных результатов связана с анализом реальных объектов, состоящих из большого числа сетевых элементов, где экспериментальные данные ограничены использованием интегральных характеристик. Примерами, которые включаются в изучение, являются нейронные сети с помощью электроэнцефалографии, биологические популяции того или иного вида, и большое число других реальных сетей, описываемых математическими моделями, где элементы можно идентифицировать по их частотам и фазам соответственно. Дальнейшим шагом исследования планируется анализ биологических данных на основе проведенной работы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-02-00624) и Министерства образования и науки РФ (задания 3.23.2014/К и 931).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths // Synchronization: a Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 432 p.
2. S. Boccaletti et al // Physics Reports. 2006. Vol. 424. P. 175-308.
3. S.N. Dorogovtsev, J.F.F. Mendes, "Evolution of networks", Oxford University Press, 2003.
4. J.G. Restrepo, E. Ott, B.R. Hunt // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 71. P. 036151.
5. LH Yu, JC Fang // Acta Physica Sinica. 2012. Vol. 54 N 9. P. 4012-4018.
6. J. Shuai, K. Wong // Physical Review E. 1993. Vol. 57, N 6. P. 7002-7007.
7. G. Buzsaki, A. Draguhn // Science. 2004. Vol. 304. P. 1926-1929.
8. S. Zschocke, E.-J. Speckmann. "Basic Mechanisms of the EEG (Brain Dynamic series)". Boston, Birknauser. 1993.
9. Y. Kuramoto Chemical oscillations, waves, and turbulence. N. Y.: SpringerVerlag, 1984. 156 p.
10. S. Assenza et al. // Scientific Reports. 2013. V. 1. N 99. P. 1.
11. V.A. Makarov et al. // Proc. SPIE. 9448, (2015) 94481S
12. А.А. Харченко, В.В. Макаров, А.Е Храмов // Изв. РАН. Сер. физическая. 78, 12 (2014) 1616–1620
13. V.A. Maksimenko et al. // Proc. SPIE. 9322, (2015) 932213

## Самосогласованная динамика ансамбля автогенераторов и двумерного коаксиального поля

С.П. Чернявский

ЧелГУ, г. Челябинск

[pavlovich.1313@gmail.com](mailto:pavlovich.1313@gmail.com)

Изучение формирования пространственно-временных структур в распределённых колебательных нелинейных системах представляет интерес для различных областей естествознания и прикладных задач. Взаимодействие активной среды и волнового поля имеет место в работе приборов сильноточной электроники со сверхразмерными электродинамическими структурами [1]. Использование простых эталонных моделей, позволяет качественно исследовать поведение систем, а так же получить численные результаты [2, 3].

В работах [3,5] был получен новый класс сигналов, пространственно-временная конфигурация которых является неоднородной. Сигналы такого типа имеют высокую упорядоченность во временной области и демонстрируют хаотическую динамику в пространственной области. Этот класс сигналов требует изучения. Целью данной работы является исследование распределения пространственных мод волнового поля, а так же формирования режимов динамического хаоса в данном типе сигналов.

В данной работе рассматривается дискретная по времени и пространственным координатам модель волнового поля, взаимодействующего с ансамблем активных осцилляторов [2,3,5,7]. Колебательное поле представляет собой двумерную область в виде кругового кольца (рис. 1). Внешняя граница области имеет радиус  $r_0$ , внутренняя граница имеет радиус  $r_i$ . Модель колебательной среды представлена в виде связанных дискретных осцилляторов.

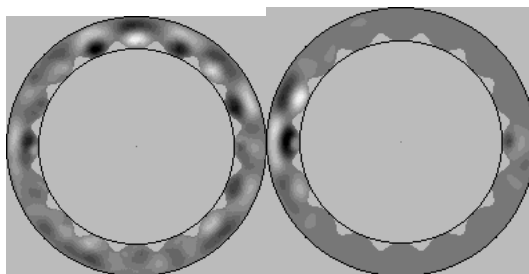


Рис. 1. Пространственная конфигурация поля.

Динамика поля описывается системой уравнений в конечных разностях:

$$u(x, y, t + 1) = a_1 u(x, y, t) - a_2 u(x, y, t - 1) + bW(x \pm 1, y \pm 1, t) + gF(x, y, t) \quad (1)$$

где  $u(x, y, t)$  - функция дискретных аргументов определяющая состояние поля в точке с координатами  $x, y$  в момент времени  $t$ ,  $g$  - коэффициент связи волнового поля с составляющими активную среду автогенераторами.

Коэффициенты  $a_1$  и  $a_2$  уравнения (1) выражаются следующим образом:

$$a_1 = 2(1 - 2v^2)\exp(-\gamma), a_2 = \exp(-2\gamma), b = v^2 \exp(-\gamma) \quad (2)$$

где  $v$  - фазовая скорость волны,  $\gamma$  - декремент затухания.

Решение уравнения (1), при  $g = 0$ , с коэффициентами (2) для неограниченной области имеет вид:

$$u(x, y, t) = \exp(-\gamma t) \sin(k_x x + k_y y - \omega t) \quad (3)$$

где  $\omega = vk$  – дисперсия в области длинных волн.

Функция  $W$  в уравнении (1) определяет связь осцилляторов колебательной среды следующим образом:  $W(x \pm 1, y \pm 1, t) = u(x - 1, y, t) + u(x + 1, y, t) + u(x, y - 1, t) + u(x, y + 1, t)$ . Функция  $F(x, y, t)$  определяющая действие осцилляторов на поле имеет вид:

$$F(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \delta(x - x(n))\delta(y - y(n))z(n, t) \quad (4)$$

где  $\delta(s) = \begin{cases} 1, & s = 0 \\ 0, & s \neq 0 \end{cases}$ ,  $z(n, t)$  описывает состояние осциллятора в точке с координатами  $x(n)$ ,  $y(n)$  в момент времени  $t$ . Пространственная конфигурация ансамбля осцилляторов в волновом поле задается последовательностью  $\{x(n), y(n)\}$ , где  $n = 1, \dots, N$ .

Динамика активного источника, воздействующего на поле в точке с координатами  $x(n)$ ,  $y(n)$  в момент времени  $t$ , описывается уравнением:

$$z(n, t + 1) = d_1(z)z(n, t) - d_2(z)z(n, t - 1) + g\Delta u(x(n), y(n), t) \quad (5)$$

где  $\Delta u(x(n), y(n), t) = u(x(n), y(n), t) - u(x(n), y(n), t - 1)$ .

Коэффициенты уравнения (5) нелинейно зависят от состояния осциллятора:

$$d_1 = 2\exp\left(\varepsilon(1 - \alpha z^2(n, t))\right) \cos(\beta), d_2 = \exp\left(2\varepsilon(1 - \alpha z^2(n, t))\right) \quad (6)$$

При малой нелинейности ( $\varepsilon \ll 1, \varepsilon\alpha \ll 1$ ), уравнение (5) переходит в дискретную модификацию уравнения Ван-дер-Поля рассмотренную в [4,8]. При этом  $\beta$  является частотой колебаний осциллятора.

Записи реализаций функции  $u(x_i, y, t)$   $i = 1 \dots M, M = 21$  равномерно распределённых по поверхности кольца позволяют получить спектральные и энергетические характеристики изменения волнового поля во времени.

Параметр упорядоченности  $H$  позволяет оценить когерентность колебаний во времени и регулярность пространственной структуры[6]:

$$H_{t,s}(m) = \frac{1}{L-1} \sum_{k=1}^{L-1} S_{t,s}(k, m) \ln(S_{t,s}(k, m)) \quad (7)$$

где  $L$  - объём выборки,  $k$  - номер гармоники дискретного преобразования Фурье,  $m$  - номер точки колебательного поля, в которой произведена запись для спектральной плотности временной реализации ( $S_t(k, m)$ ). Для  $S_s(k, m)$   $m$  - время записи распределения поля. Для  $0.7 \leq H < 1$  колебательный режим можно считать синусоидальным, для  $H < 0.6$  можно говорить о хаотическом режиме системы. Спектральные плотности и параметр упорядоченности вычислялись на последних  $L = 1200$  отсчетах стационарной части огибающей.

Гофрированная внутренняя граница определяется следующим образом:

$$r(\varphi) = r_i + A \sin^4(n_c \varphi) \quad (8)$$

где  $A$  – амплитуда гофры,  $n_c$  – число вариаций по азимутальному углу. На границе колебательного поля приняты нулевые граничные условия.

Проведено исследование влияния амплитуды гофры на формирование колебательных режимов, в ходе которого получен стационарный режим работы, демонстрирующий хаотическое поведение и принадлежащий классу сигналов описанных в [3,5]. В качестве эталонного сигнала был выбран режим описанный в работе [3] под номером 6. Временная энтропия полученного режима  $H_t = 0.8130$ , пространственная  $H_s = 0.4868$ . Пространственный спектр режима представлен на рисунке 2.



На исследование формирования мод в колебательных режимах решающее значение оказывает расположение активных элементов в волновом поле. Для возбуждения одной из мод с заданным числом вариаций по азимуту  $n$  и радиусу  $m$  (собственная  $(n, m)$ -мода), необходимо определить координаты и частоту  $\beta$  в коэффициентах уравнения (5) нужным образом. При возбуждении собственной моды воздействие поля на активные элементы примем нулевым,  $g = 0$ .

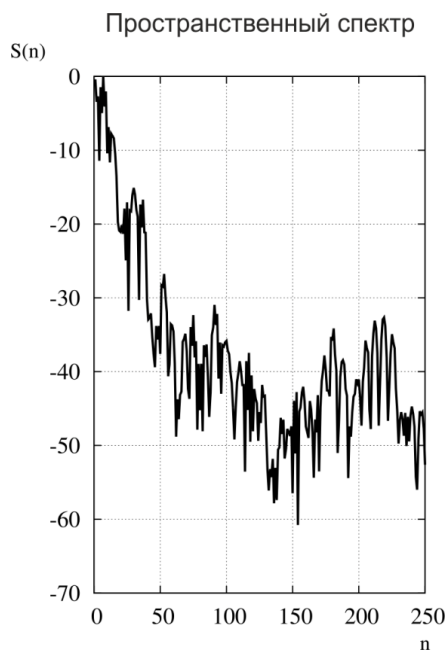


Рис.2. Пространственный спектр.

Распределение волнового поля по координатам для собственной  $(n, m)$ -моды мало отличается от круглой области для принятых в работе параметров и определяется как:

$$u_{n,m}(x, y) = J_n \left( \frac{\mu_m^{(n)} r}{r_0} \right) \sin(n\varphi) \quad (9)$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\varphi = \arcsin \frac{y}{r}$ ,  $\mu_m^{(n)}$  -  $m$ -й корень функции Бесселя  $J_n(\mu) = 0$ . Осцилляторы были расположены на окружности радиусом  $r_s$ , который соответствует максимум радиальной зависимости моды:

$$r_s = r_{n,m} = \frac{r_0 V_m^{(n)}}{\mu_m^{(n)}} \quad (10)$$

где  $V_m^{(n)}$  -  $m$ -й корень производной функции Бесселя  $J_n'(\mu) = 0$ . Частоты осцилляторов  $\beta_s$  были в среднем равны частоте моды  $\beta_{n,m} = \frac{v \mu_m^{(n)}}{r_0}$ :

$$\beta_s = \beta_{n,m} + \Delta\beta\zeta \quad (11)$$

где величина  $\Delta\beta$  определяет разброс частот, а случайная величина  $\zeta$  равномерно распределена в интервале  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . В работах [2, 7] описанный выше способ задания параметров ансамбля называется настройкой на  $(n, m)$ -моду, а колебательные режимы, формируемые ансамблями -  $(n, m)$ -модами. Будем придерживаться данной терминологии.

Используя описанный метод расстановки осцилляторов, была продемонстрирована возможность получения чистой моды, что говорит о высокой

степени синхронизации ансамбля осцилляторов при данном расположении активных элементов.

Показано, как увеличение модуляции гофры, рассмотренное выше влияет на пространственную конфигурацию колебательной системы. При вводе модуляции, увеличивается количество мод (рисунок 3). При наличии пространственного хаоса можно говорить, что введение модуляции гофры увеличивает количество энергии, которую может поглощать система.

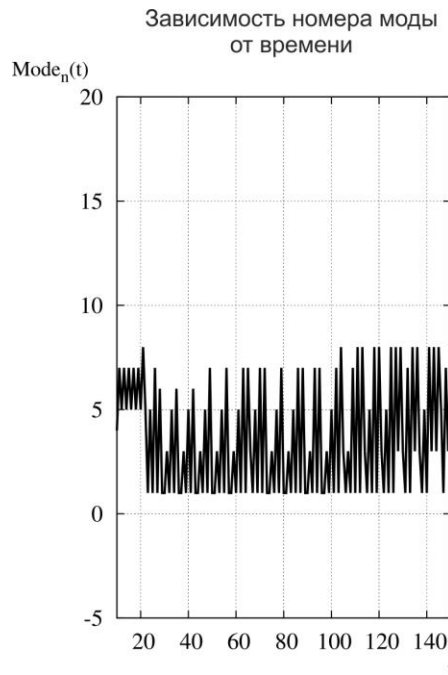


Рис.3. Зависимость номера моды от времени.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В.А. Черепенин// Успехи физ. Наук 2006 Т. 176. №10. С. 1124
2. В.Н. Корниенко, А.П. Привезенцев // Радиотехника и электроника. 2010. Т. 55. №3. С. 362-368.
3. В.Н. Корниенко, А.П. Привезенцев // Радиотехника и электроника. 2012. Т. 57. №2. С. 211-218.
4. В.В. Зайцев // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2008. Т. 11. № 4. С. 98-103
5. В.Н. Корниенко, А.П. Привезенцев // Радиотехника и электроника. 2011. Т. 56. №4. – С. 417-422.
6. В. Корниенко, А. Привезенцев "Порядок и хаос в динамике интенсивного потока пространственного заряда" Saarbrücken: LAP, 2012
7. В.Н. Корниенко, А.П. Привезенцев // Радиотехника и электроника. 2011. Т. 56. №4. – С. 417-422.
8. В.В. Зайцев, С.В. Давыденко, О.В. Зайцев // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2000. Т. 3. №2. С.64