

## СЕКЦИЯ 7. АКУСТОЭЛЕКТРОНИКА И АКУСТООПТИКА

<b>Экспериментальное исследование дифракции света на наклонной фазовой решетке</b>	
<i>А.С. Волошин, В.И. Балакиш</i> .....	2
<b>Акустооптическое управление световыми пучками в инфракрасном диапазоне</b>	
<i>В.Б. Волошинов, Г.А. Князев, Л.А. Кулакова, Н. Гупта</i> .....	6
<b>Двумерное описание акустооптического взаимодействия при произвольных углах дифракции</b>	
<i>Е.А. Дьяконов</i> .....	7
<b>Квазилинейное акустооптическое взаимодействие в неоднородном акустическом поле</b>	
<i>А.В. Маслаков, Е.А. Дьяконов, В.Б. Волошинов</i> .....	11
<b>Анизотропная дифракция света в ячейках с фазированными пьезопреобразователями</b>	
<i>Л.И. Михеев, В.И. Балакиш</i> .....	15
<b>Сравнение характеристик двух типов широкоапертурных акустооптических фильтров</b>	
<i>Т.В. Юхневич, В.Б. Волошинов</i> .....	19

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФРАКЦИИ СВЕТА НА НАКЛОННОЙ ФАЗОВОЙ РЕШЕТКЕ

А.С. Волошин, В.И. Балакший

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
физический факультет*

andrey.voloshin@physics.msu.ru

В работе проведено исследование дифракции света на криволинейной дифракционной решетке. Актуальность проблемы обусловлена тем, что подобные дифракционные решетки встречаются во многих областях современной оптики: в акустооптике, интегральной оптике, голографии, оптической обработке информации и спектральном анализе. Первые работы по данной тематике в приложении к проблемам голографии были выполнены еще в 1969 г. Х. Когельником [1]. В последнее время этой задачей активно занялись в акустооптике. Ее актуальность связана с тем, что многие кристаллы, используемые в акустооптике, отличаются чрезвычайно сильной акустической анизотропией, приводящей к большим углам сноса акустической энергии. Так, например, в кристалле парателлурита ( $\text{TeO}_2$ ), основном материале для изготовления акустооптических (АО) приборов видимого и ИК диапазонов спектра, угол сноса  $\alpha$  (угол между фазовой и групповой скоростями) достигает  $74^\circ$  [2]. Это означает, что угол между штрихами фазовой решетки, созданной акустической волной, и плоскостью решетки равен  $16^\circ$  вместо обычных  $90^\circ$ .

В работах [3,4] проблема влияния акустического сноса на характеристики АО дифракционного спектра была поставлена в общем виде, но никакого подробного анализа проведено не было. В работах [5, 6] задача анализировалась для раман-натовского режима АО взаимодействия. Наиболее полное теоретическое рассмотрение этой проблемы для брэгговского режима анизотропной дифракции представлено в работах [7,8]. В этих исследованиях были получены аналитические выражения для амплитуды света, рассеянного в +1-й и нулевой порядки дифракции. Получено явное выражение для фазовой расстройки, отвечающей за эффективность дифракции, что позволило рассчитать все основные характеристики АО взаимодействия:

- угловые характеристики;
- частотные характеристики, определяющие спектральное разрешение и быстродействие АО приборов;
- передаточные функции АО взаимодействия.

В настоящей работе представлены результаты экспериментальной проверки теоретического анализа, выполненного в [7,8]. Для этого была создана установка, позволяющая изучать все перечисленные выше

характеристики дифракции света на ультразвуке. Основным ее элементом являлась АО ячейка. Ячейка была изготовлена из кристалла парателлурита с плоскостью взаимодействия  $(1\bar{1}0)$  и углом среза  $\chi \approx 10^\circ$ . Угол сноса акустической энергии составил в этом случае  $\alpha = +54^\circ$ . Выбранный срез ячейки позволил изучить главные особенности влияния сноса акустической энергии на рассеяние света. Источником оптического излучения служил He-Ne лазер с длиной волны  $\lambda = 0.63$  мкм.

На рис. 1 представлена основная характеристика АО взаимодействия – зависимость угла Брэгга  $\varphi_B$  от частоты ультразвука  $f$ , рассчитанная для указанного среза кристалла. Различные ветви этой кривой соответствуют разным поляризациям света и  $\pm 1$ -м порядкам дифракции. Для экспериментального исследования были выбраны ветви  $+1e$  (анизотропная дифракция необыкновенной волны в  $+1$ -й порядок) и  $-1o$  (анизотропная дифракция обыкновенной волны в  $-1$ -й порядок). Область вблизи вертикальной касательной (тангенциальная точка) используется в АО фильтрах, а область минимума для ветви  $+1e$  – в АО дефлекторах [3]. На рисунке жирными линиями показана область, в которой позволяла работать геометрия ячейки. Именно эта область используется для спектральной фильтрации оптических изображений.

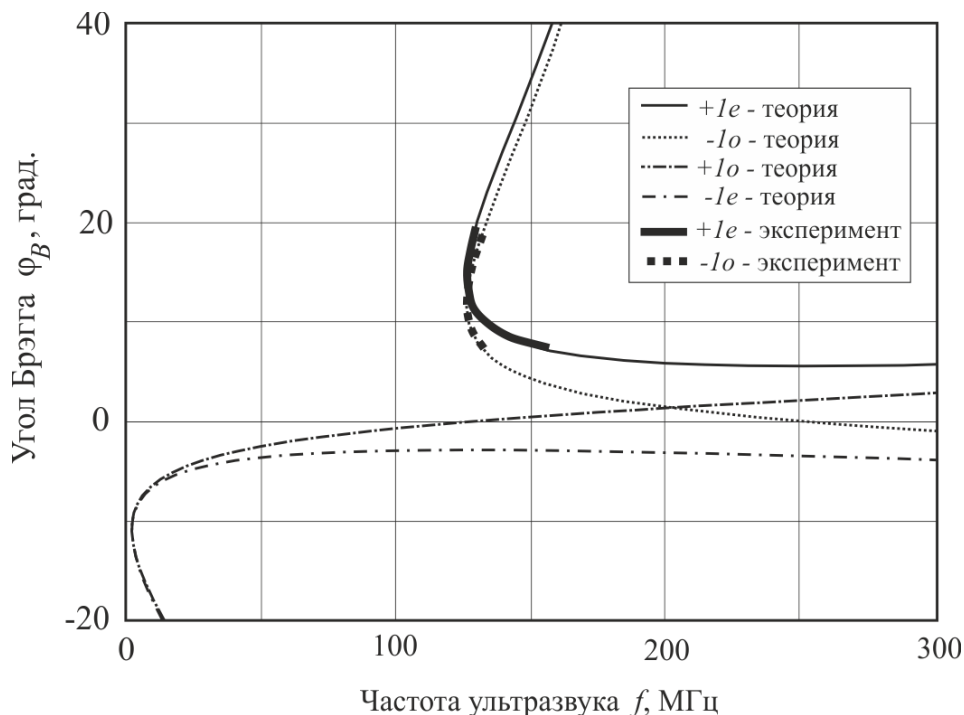


Рис. 1. Зависимость углов Брэгга от частоты ультразвука в ячейке из кристалла парателлурита с углом среза  $\chi \approx 10^\circ$

В эксперименте была измерена ширина частотных характеристик по уровню 3 дБ. Методика измерений состояла в следующем. Для каждого установленного угла падения света по максимуму дифрагированного

излучения находилась частота ультразвука, для которой выбранный угол падения являлся брэгговским  $\varphi_B$ . Затем изменялась частота ультразвука и регистрировались значения частоты  $f_1$  и  $f_2$ , при которых эффективность дифракции падала вдвое от максимального значения. Отсюда находился частотный диапазон  $\Delta f = f_2 - f_1$ . Результаты измерений сопоставлялись с расчетом.

Измерения были выполнены для  $e$ - и  $o$ -поляризаций падающего света. Результаты представлены на рис. 2а и 2б точками вместе с расчетными кривыми, показанными сплошной линией. Для сравнения приведены также кривые для углов сноса  $\alpha = 0^\circ$  (штрих-пунктирная линия) и  $\alpha = -54^\circ$  (пунктирная). Можно отметить хорошее соответствие теории с экспериментом, подтверждающее эффект влияния сноса акустического пучка на характеристики АО взаимодействия. Так, например, рис. 2б показывает для случая необыкновенной поляризации падающего света зависимость ширины частотных характеристик  $\Delta f$  от угла Брэгга  $\varphi_B$ . Используя кривую  $+1e$  на рис. 1, можно пересчитать эти графики в зависимость  $\Delta f$  от центральной частоты  $f_0$  частотного диапазона. Черная кривая относится к случаю  $\alpha = 0^\circ$  (акустический снос отсутствует); соответствующую полосу обозначим как  $\Delta f_0$ . Эта кривая позволяет оценить влияния акустического сноса на частотные характеристики. Видно, что полоса АО взаимодействия  $\Delta f_0$  резко возрастает при приближении к дефлекторной геометрии. На частоте  $f_0 = 239$  МГц (точка минимума для ветви  $+1e$  на рис. 1) она достигает 24 МГц. Именно из-за широкого частотного диапазона (т.е. малой частотной селективности) точка  $D$  выбирается в качестве рабочей в АО дефлекторах.

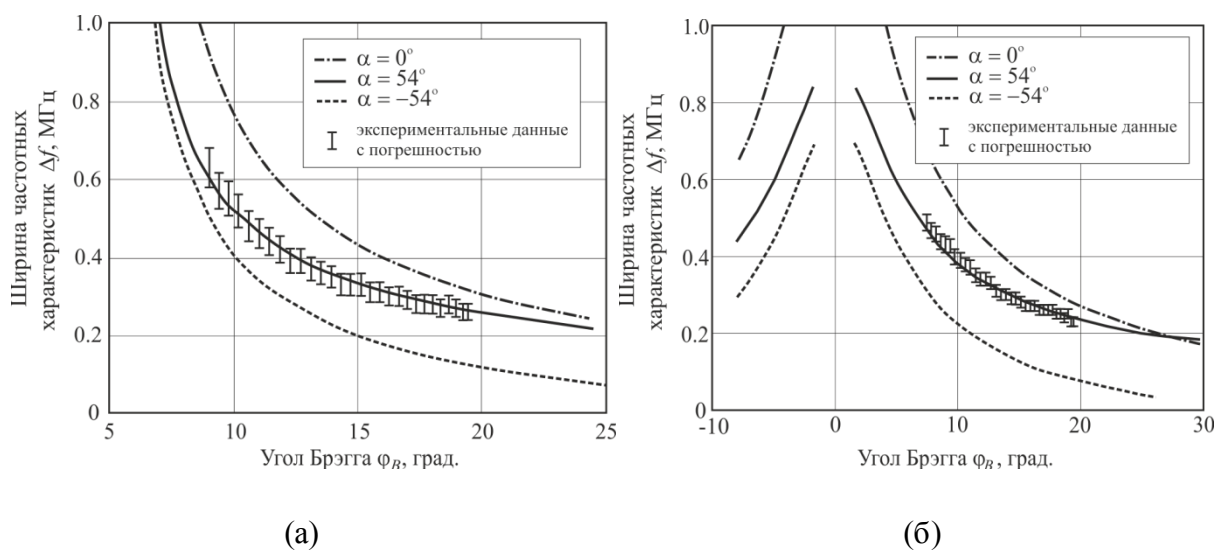


Рис. 2. Ширина частотных характеристик для ветви  $+1e$  (а) и для ветви  $-1o$  (б)

Сплошная и пунктирные линии характеризуют АО ячейки с углами сноса  $\alpha = \pm 54^\circ$  (ширина полосы  $\Delta f_{\pm}$ ). Расчет выполнен для диапазона углов Брэгга от  $5^\circ$  до  $25^\circ$ , который наиболее интересен с практической точки зрения. Всюду в этом диапазоне акустический снос приводит к уменьшению полосы частот АО взаимодействия. Но степень сужения полос  $\Delta f_{\pm}$  разная в зависимости от частоты синхронизма  $f_0$  и знака угла сноса.

Полученные результаты подтверждают сильное влияние сноса акустической энергии на характеристики дифракционного спектра. Видно, что учет сноса приводит к сужению частотного диапазона взаимодействия почти для всех углов Брэгга. Для больших же значений угла Брэгга возможно уширение частотной характеристики. Это говорит о том, что снос акустического пучка является важным эффектом АО взаимодействия и его необходимо учитывать при разработке АО устройств.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kogelnik H. Coupled wave theory for thick hologram gratings. // Bell Syst. Tech. J., 1969, v. 48, № 9, pp. 2909-2947.
2. V.V. Voloshinov, N.V. Polikarpova // Appl. Opt. 2009. V. 48. № 7. P. C55.
3. Балакший В.И., Парыгин В.Н., Чирков Л.Е. Физические основы акустооптики. – М.: Радио и связь, 1985.
4. Задорин А.С., Шарангович С.Н. Исследование акустооптического взаимодействия в условиях фазовой расстройки. // Оптика и спектроскопия, 1985, т. 59, № 3, с. 592-596.
5. Zakharov A.V., Polikarpova N.V., Blomme E. Intermediate regime of light diffraction in media with strong elastic anisotropy. // Proc. SPIE, 2005, v. 5953, pp.5953OD:10.
6. Kastelik J.-C., Yushkov K.B., Dupont S., Voloshinov V.B. Cascaded acousto-optical system for the modulation of unpolarized light. // Optics Express, 2009, v.17, №15, pp.12767-12776.
7. Балакший В.И., Волошин А.С. Акустооптическое взаимодействие в кристаллах с большой акустической анизотропией. // Оптика и спектроскопия, т. 110, № 5, с. 840-846 (2011).
8. Волошин А.С., Балакший В.И. Влияние акустической анизотропии на передаточные функции акустооптического взаимодействия. // Труды 13-й Всероссийской школы-семинара "Физика и применение микроволн", секция 7, М., с. 3-7 (2011).

## АКУСТООПТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ СВЕТОВЫМИ ПУЧКАМИ В ИНФРАКРАСНОМ ДИАПАЗОНЕ

В.Б. Волошинов<sup>1</sup>, Г.А. Князев<sup>1</sup>, Л.А. Кулакова<sup>2</sup>, Н. Гупта<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Физический факультет, Москва, Россия*

<sup>2</sup> *Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе, Санкт-Петербург, Россия*

<sup>3</sup> *Научно-исследовательская лаборатория армии США, Адельфай, Мэриленд, США*

E-mail: volosh@phys.msu.ru

В лекции обсуждается проблема эффективного акустооптического управления параметрами электромагнитного излучения, длины волн которого заключены в пределах 3.0 – 30 мкм и относятся к дальней инфракрасной (ИК) части электромагнитного спектра. Также анализируется возможность управления методами акустооптики излучением терагерцового (ТГц) диапазона с длинами волн свыше 30 мкм. Проведенное исследование доказывает, что в дальнем ИК и ТГц диапазоне спектра величина фазовой задержки, индуцированная ультразвуком, оказывается на два порядка меньше, чем в видимом световом диапазоне. Это означает, что в акустооптических устройствах, работающих при больших длинах волн, проигрыш в величине эффективности дифракции оказывается особенно заметным. Поэтому для модуляции электромагнитного излучения необходимо выбирать материалы с большими значениями диэлектрической проницаемости и фотоупругих констант. Указанному критерию частично удовлетворяют кристаллы теллура, прозрачные для среднего и дальнего ИК излучения с длинами волн света от 4.0 до 23 мкм. В широкоапертурном акустооптическом фильтре на кристалле теллура осуществлена акустооптическая фильтрация электромагнитного излучения с хорошим спектральным разрешением, а также реализована обработка оптического изображения с удовлетворительным качеством отфильтрованной картины.

## ДВУМЕРНОЕ ОПИСАНИЕ АКУСТООПТИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ УГЛАХ ДИФРАКЦИИ

Е.А.Дьяконов

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
физический факультет  
ead1989@gmail.com

Одной из важных задач современной акустооптики является исследование дифракции света на ультразвуке в материалах, обладающих сильной анизотропией упругих свойств. Основной особенностью таких материалов является значительный снос энергии ультразвуковой волны. С этим связано существование таких режимов акустооптического взаимодействия, которые принципиально невозможны в изотропных средах. В частности, при определенном значении частоты ультразвука световой пучок +1 порядка дифракции оказывается направлен точно вдоль ультразвукового столба [1]. Существующая теория акустооптического взаимодействия, основанная на рассмотрении плоских световых волн, не позволяет адекватно описать этот и близкие к нему режимы дифракции. Возникает необходимость строго учитывать ограничение области взаимодействия в пространстве по двум координатам, обусловленное конечными размерами светового и ультразвукового пучков [1]. Для этого необходимо распространить известные одномерные уравнения связанных мод на двумерное пространство.

Пусть волновые векторы взаимодействующих волн лежат в плоскости  $Oxz$ , а ультразвуковое поле имеется в слое среды при  $0 < x < l$ , как показано на рис. 1. Тогда диэлектрическая проницаемость среды равна:

$$\varepsilon = n^2 + 2n\Delta n \sin(\vec{K}\vec{r} - 2\pi ft), \quad (1)$$

где  $n$  - показатель преломления невозмущенной среды,  $\Delta n$  - амплитуда изменения показателя преломления,  $\vec{K}$  - волновой вектор ультразвуковой волны,  $f$  - ее частота,  $\vec{r} = \{x, y, z\}$  - радиус-вектор,  $t$  - переменная времени.

Для нахождения электромагнитного поля световых волн необходимо решить волновое уравнение, которое в двумерном случае имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (\varepsilon \vec{E})}{\partial t^2}, \quad (2)$$

где  $\vec{E}$  - напряженность электромагнитного поля волны,  $c$  - скорость света.

Будем искать решение уравнения (2) в виде:

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_y \sum_p C_p(x, z) \exp[i(\vec{k}_p \vec{r} - \omega_p t)], \quad (3)$$

где  $\vec{e}_y = \{0, 1, 0\}$  - вектор поляризации волн,  $p$  - номер порядка дифракции,  $C_p$  - медленно меняющаяся комплексная амплитуда,  $\vec{k}_p$  - волновой вектор

волны,  $\omega_p$  - ее циклическая частота. Из условия стационарности решения следует, что  $\omega_p = \omega_0 + 2\pi f p$ . Полагая  $2\pi f \ll \omega_0$ , получим уравнение для  $C_p$ :

$$(\vec{m}_p \cdot \vec{\nabla} C_p) - \frac{i\lambda}{4\pi m} \nabla^2 C_p = \frac{q}{2} (C_{p-1} \exp(-i\vec{\eta}_{p-1}\vec{r}) - C_{p+1} \exp(i\vec{\eta}_p\vec{r})), \quad (4)$$

где  $\vec{m}_p = \vec{k}_p / |\vec{k}_p|$  - вектор волновой нормали,  $\lambda = 2\pi m / |\vec{k}_0|$  - длина волны падающего света в вакууме,  $\vec{\nabla}$  - производная по радиус-вектору,  $q = 2\pi\Delta n / \lambda$  - параметр акустооптической связи,  $\vec{\eta}_p = \vec{k}_{p+1} - \vec{k}_p - \vec{K}$  - вектор расстройки. Введем также обозначение  $\theta_p$  - угол дифракции ( $p$ )-го порядка (см. рис. 1). Тогда  $\vec{m}_p = \{\cos \theta_p, 0, \sin \theta_p\}$ , при этом для падающего света  $-90^\circ < \theta_0 < 90^\circ$ .

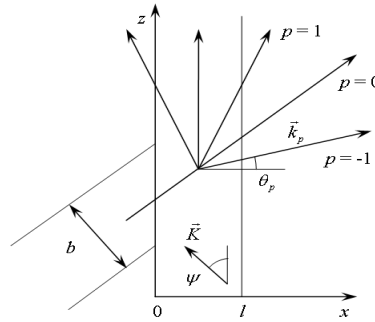


Рис. 1. Конфигурация взаимодействующих волновых пучков.

Слагаемое в (4), содержащее вторые производные от  $C_p$ , описывает дифракцию световых пучков на собственной апертуре, а также различные фазовые эффекты. Исследование акустооптического взаимодействия с помощью подобного уравнения проводилось в [2]. Если длина волны света достаточно мала, то это слагаемое можно отбросить и получить

$$(\vec{m}_p \cdot \vec{\nabla} C_p) = (q/2) (C_{p-1} \exp(-i\vec{\eta}_{p-1}\vec{r}) - C_{p+1} \exp(i\vec{\eta}_p\vec{r})). \quad (5)$$

Уравнение (5) следует решать с граничными условиями:

$$C_0(0, z) = f(z); C_p(0, z) = 0 \text{ при } |\theta_p| < 90^\circ; C_p(l, z) = 0 \text{ при } |\theta_p| > 90^\circ, \quad (6)$$

где функция  $f(z)$  определяет профиль сечения падающего пучка света. При этом искомая эффективность дифракции в ( $p$ )-й порядок равна

$$I_p = \int_{-\infty}^{\infty} |C_p(l, z)|^2 \cos \theta_p dz \text{ при } |\theta_p| < 90^\circ; I_p = \int_{-\infty}^{\infty} |C_p(0, z)|^2 |\cos \theta_p| dz \text{ при } |\theta_p| > 90^\circ. \quad (7)$$

При решении уравнения связанных мод (5) сохраняется свобода выбора направлений векторов расстроек  $\vec{\eta}_p$ , определяемых геометрической конфигурацией области акустооптического взаимодействия. Корректный учет этих векторов является принципиальным условием для правильного решения акустооптической задачи.

Рассмотрим практически интересный режим дифракции Брэгга в +1 порядок. В этом случае существует единственный вектор расстройки  $\vec{\eta}_0 = \{\eta_x, 0, \eta_z\}$ , а в системе (5) сохраняются только два уравнения:



$$\begin{aligned} \frac{\partial C_0}{\partial x} \cos \theta_0 + \frac{\partial C_0}{\partial z} \sin \theta_0 &= -\frac{q}{2} \exp[i(\eta_x x + \eta_z z)] C_1, \\ \frac{\partial C_1}{\partial x} \cos \theta_1 + \frac{\partial C_1}{\partial z} \sin \theta_1 &= \frac{q}{2} \exp[-i(\eta_x x + \eta_z z)] C_0. \end{aligned} \quad (8)$$

Данную систему удается решить в квадратурах лишь при  $\theta_1 < 90^\circ$ , и тогда:

$$\begin{aligned} C_0(x, z) &= f(z - x \operatorname{tg} \theta_0) - \frac{q \cos \theta_0}{2 \sin(\theta_1 - \theta_0)} \int_{x \operatorname{tg} \theta_0}^{x \operatorname{tg} \theta_1} \exp(i \eta_{\parallel} g_0) \sqrt{\frac{g_1}{g_0}} J_1(q \sqrt{g_0 g_1}) f(z - p) dp, \\ C_1(x, z) &= \frac{q \cos \theta_0}{2 \sin(\theta_1 - \theta_0)} \exp[-i(\eta_x x + \eta_z z)] \int_{x \operatorname{tg} \theta_0}^{x \operatorname{tg} \theta_1} \exp(i \eta_{\parallel} g_0) J_0(q \sqrt{g_0 g_1}) f(z - p) dp, \end{aligned} \quad (9)$$

где обозначено  $g_0 = (p \cos \theta_0 - x \sin \theta_0) / \sin(\theta_1 - \theta_0)$ ,  $g_1 = (x \sin \theta_1 - p \cos \theta_1) / \sin(\theta_1 - \theta_0)$ ,  $J_{0,1}$  - функции Бесселя первого рода.

В приближении малой эффективности дифракции можно пренебречь обратной перекачкой энергии из отклоняемого светового пучка в проходящий. Система уравнений (8) в этом случае принимает более простой вид

$$\frac{\partial C_0}{\partial x} \cos \theta_0 + \frac{\partial C_0}{\partial z} \sin \theta_0 = 0; \quad \frac{\partial C_1}{\partial x} \cos \theta_1 + \frac{\partial C_1}{\partial z} \sin \theta_1 = \frac{q}{2} \exp[-i(\eta_x x + \eta_z z)] C_0. \quad (10)$$

Эту систему можно решить уже при произвольном значении  $\theta_1$ :

$$C_0(x, z) = f(z - x \operatorname{tg} \theta_0); \quad C_1(x, z) = \frac{q \cos \theta_0}{2 \sin(\theta_1 - \theta_0)} \exp[-i(\eta_x x + \eta_z z)] \int_{x \operatorname{tg} \theta_0}^B \exp(i \eta_{\parallel} g_0) f(z - p) dp, \quad (11)$$

где  $B = x \operatorname{tg} \theta_1$  при  $\theta_1 < 90^\circ$  и  $B = (x - l) \operatorname{tg} \theta_1 + l \operatorname{tg} \theta_0$  при  $\theta_1 > 90^\circ$ .

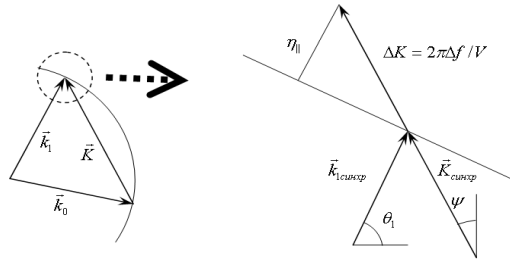


Рис. 2. Векторная диаграмма дифракции Брэгга и параметр расстройки.

Из выражений (9) и (11) видно, что модуль амплитуды каждой из взаимодействующих волн определяются не обоими составляющими вектора расстройки, а их комбинацией  $\eta_{\parallel} = \eta_x \cos \theta_1 + \eta_z \sin \theta_1$ , равной проекции вектора расстройки на направление дифракции света. Если рассматривать практически важный случай акустооптического взаимодействия, близкого к синхронизму, то можно пренебречь сканированием отклоненного пучка света при перестройке частоты и положить  $\theta_0 = \psi - \theta_B$ ,  $\theta_1 = \psi + \theta_B$ , где  $\theta_B = \arcsin(\lambda f / 2nV)$  - угол Брэгга,  $\psi$  - угол сноса энергии ультразвуковой волны,  $V$  - скорость этой волны. Из рис. 2 видно, что параметр  $\eta_{\parallel}$  связан с частотной отстройкой  $\Delta f$  соотношением:

$$\eta_{\parallel} = 2\pi \Delta f \sin(\theta_1 - \psi) / V. \quad (12)$$

Вычисляя интеграл (11) с учетом (12), можно определить диапазон частот акустооптического взаимодействия, в котором эффективность дифракции в +1 порядок превышает  $1/2$ .

На рис. 3 представлена зависимость частотного диапазона взаимодействия от частоты ультразвуковой волны, вычисленная в случае дифракции светового пучка прямоугольного сечения шириной  $b$ , то есть при  $f(z) = \text{rect}(z \cos \theta_0 / b)$ . Для сравнения пунктирной линией изображена аналогичная зависимость, вычисленная по существующей теории [1]. Видно, что вблизи частоты  $f^* = 2nV \cos \psi / \lambda$ , когда  $\theta_1 = 90^\circ$ , частотный диапазон существенно определяется размером светового пучка. Одномерная теория не позволяет учесть этот параметр, и вычисленный по ней частотный диапазон стремится к нулю в точке  $f = f^*$ .

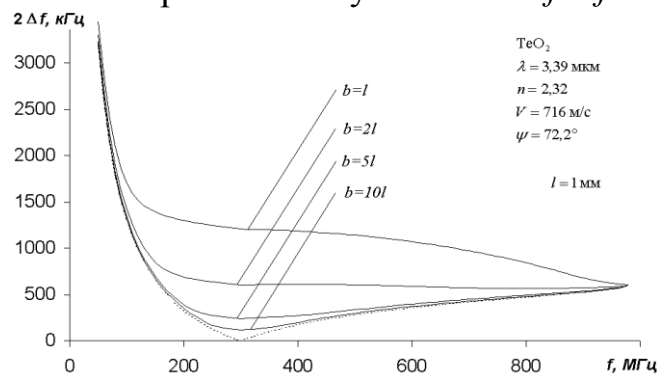


Рис. 3. Зависимость полосы акустооптического взаимодействия от частоты ультразвука.

Параметр  $N = b \cos \theta_1 / l \sin(\theta_1 - \theta_0)$  определяет основной фактор, влияющий на пространственное ограничение области взаимодействия. При  $N \gg 1$  таким фактором является конечный размер ультразвукового пучка, и результаты решения по новому методу сводятся к результатам существующей теории, основанной на одномерном уравнении связанных мод. Если  $N \ll 1$ , то область взаимодействия ограничена в основном апертурой светового пучка, а при  $N \sim 1$  оба фактора оказывают сравнимое влияние на процесс акустооптической дифракции. В этом случае одномерное рассмотрение дает принципиально ошибочные результаты и потому неприменимо. В частности, при  $f = f^*$  получается  $N = 0$ .

Таким образом, разработанный метод теоретического описания акустооптического взаимодействия позволяет рассматривать дифракцию света на ультразвуке при произвольных углах падения и дифракции света, в том числе в случаях, когда необходимо учитывать ограничение области акустооптического взаимодействия в пространстве по двум координатам.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Voloshinov V., Makarov O. Proceedings SPIE, 1998, v.3581, p.108-117.
2. Князев Г.А., Мещеряков А.В., Сухоруков А.П. Известия РАН, сер. Физическая, 2011, т. 75, N 12, с. 1751-1754.

## КВАЗИКОЛЛИНЕАРНОЕ АКУСТООПТИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В НЕОДНОРОДНОМ АКУСТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

А.В. Маслаков, Е.А. Дьяконов, В.Б. Волошинов  
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
физический факультет  
maslakov\_al@mail.ru

Акустооптические приборы находят широкое применение в современной оптоэлектронике и лазерной физике. К подобным приборам относятся акустооптические (АО) фильтры [1], перспективные для использования в волоконно-оптических линиях связи со спектральным уплотнением каналов (WDM-technology) в качестве спектральных селекторов сигналов. Эти фильтры выделяют световые потоки на заданной длине волны и направляют их в те или иные волоконно-оптические каналы. Наиболее подходящими для применения в WDM линиях связи являются перестраиваемые АО фильтры на кристаллах парателлуриата с квазиколлинеарной геометрией взаимодействия света и звука. Особенность данных устройств заключается в том, что свет в АО ячейку направляется коллинеарно с групповой скоростью звука, обеспечивая большую длину АО взаимодействия и, как следствие, узкую полосу пропускания прибора.

Перестраиваемые квазиколлинеарные акустооптические фильтры были впервые предложены в Московском университете [2]. При исследовании характеристик фильтров был экспериментально обнаружен необычный эффект: при больших уровнях управляющей мощности, соответствующих эффективности дифракции близкой к 100%, прекращался переход световой энергии из дифрагированного луча в проходящий световой пучок. Обнаруженный эффект был изучен слабо и не имел соответствующего теоретического объяснения. Таким образом, целью данной работы являлось построение математической модели, описывающей указанный характер взаимодействия, при котором отсутствует обратное рассеяние световой энергии в нулевой порядок дифракции.

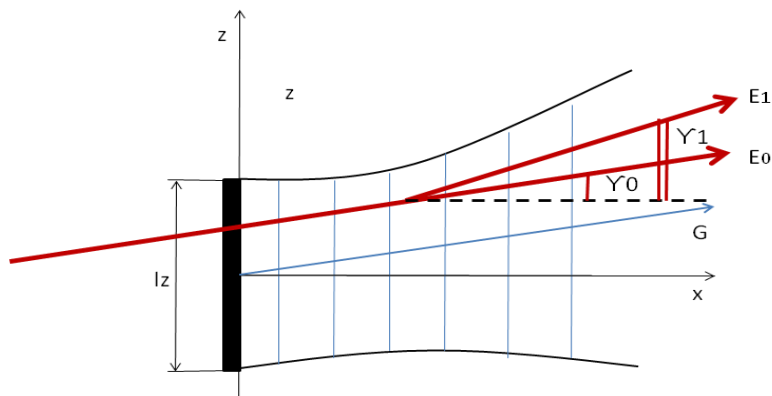


Рис. 1. Геометрия квазиколлинеарного акустооптического взаимодействия.

Схема рассматриваемого взаимодействия приведена на Рис. 1, где  $G$  – вектор Пойнтинга, векторы  $E_1$  и  $E_0$  соответствуют амплитудам световых полей первого и нулевого порядков. Известно [3], что поле упругих смещений частиц среды в монохроматической волне, возбуждаемой плоским пьезоэлектрическим преобразователем, расположенном в плоскости  $x=0$ , имеет вид:

$$s(x, y, z, t) = \text{Re}\{S_0 H_y(x, y) H_z(x, z - xt g \gamma)\} \exp(-i\omega[t - x/v_s]). \quad (1)$$

В соотношении (1)  $S_0$  - амплитуда колебаний вблизи преобразователя,  $v_s$  - фазовая скорость центральной акустической волны,  $\omega$  - её циклическая частота,  $\gamma$  - угол сноса звукового поля в плоскости дифракции  $xz$ . В соотношении (1) учитывается, что снос акустической волны существует только в этой плоскости. Величины  $H_y(x, y)$  и  $H_z(x, z)$  - это двумерные комплексные профили акустического поля, описывающие его пространственную структуру. Если преобразователь занимает в плоскости  $yz$  область  $-0.5l_y \leq y \leq 0.5l_y$  и  $-0.5l_z \leq z \leq 0.5l_z$ , то в нормированных координатах  $X_y$  и  $X_z$  профили имеют идентичный вид:

$$H_y(x, y) = H(X_y, y/l_y), X_y = \frac{\Lambda B_y}{\pi d_y^2} x$$

$$H_z(x, z) = H(X_z, z/l_z), X_z = \frac{\Lambda B_z}{\pi d_z^2} x \quad (2)$$

$$H(\alpha, \beta) = 0.5 \left\{ \text{erf}\left(\frac{\beta + 0.5}{\sqrt{i\alpha}}\right) - \text{erf}\left(\frac{\beta - 0.5}{\sqrt{i\alpha}}\right) \right\}$$

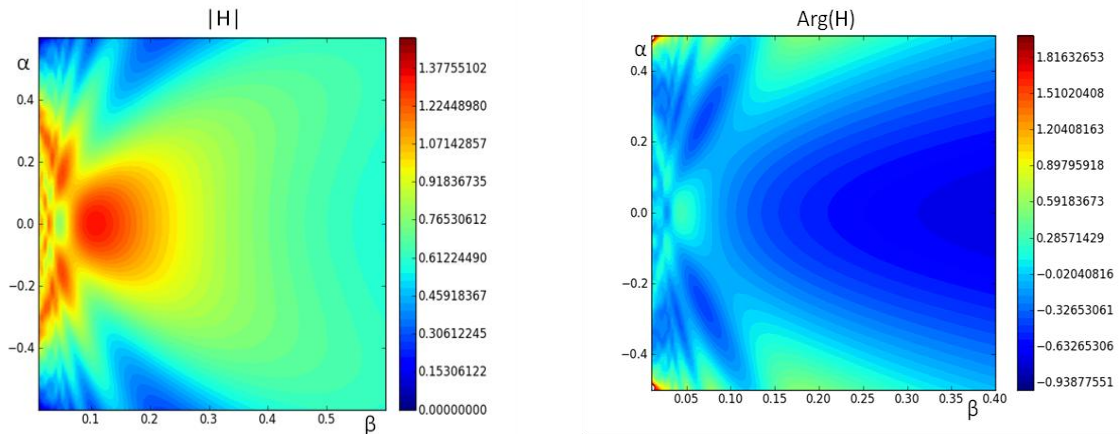


Рис. 2. Распределение амплитуды и фазы функции  $H(\alpha, \beta)$ .

В соотношениях (2)  $\Lambda$  - длина звуковой волны,  $\text{erf}(\xi)$  - функция ошибок,  $B_z$  и  $B_y$  - факторы квадратичной анизотропии кристалла. В дальнейшем световой пучок считается достаточно узким, так что  $H_y(x, y) = \text{const}$  на пути его следования. Распределение модуля и фазы функции  $H(\alpha, \beta)$  в отсутствие акустического сноса приведены на Рис. 2.

Для решения задачи дифракции света на ультразвуке в квазиколлинеарной геометрии взаимодействия необходимо распространить хорошо известные одномерные уравнения связанных мод на двумерный случай [4]. При синхронизме данные уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_0}{\partial x} \cos \gamma_0 + \frac{\partial C_0}{\partial z} \sin \gamma_0 &= -\frac{q^*}{2} C_1 \\ \frac{\partial C_1}{\partial x} \cos \gamma_1 + \frac{\partial C_1}{\partial z} \sin \gamma_1 &= +\frac{q}{2} C_0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $C_{0,1}$ - комплексные амплитуды светового поля в 0 и +1 порядках дифракции,  $\gamma_{0,1}$  - углы между волновыми векторами световых волн и осью  $x$ ,  $q$ - коэффициент акустооптической связи. В приближении того, что прошедший и дифрагированный световые пучки распространяются практически вместе, т.е.  $\gamma_1 = \gamma_0 = \gamma$ , можно перейти в новую систему координат, ориентированную в направлении взаимодействия света и звука:

$$\begin{aligned} z' &= z + x \tan \gamma \\ x' &= x, \end{aligned} \quad (4)$$

С учетом замены (4) соотношения (3) существенно упрощаются:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_0}{\partial z'} \sin \gamma &= -\frac{q^*(x', z')}{2} C_1 \\ \frac{\partial C_1}{\partial z'} \sin \gamma &= +\frac{q(x', z')}{2} C_0. \end{aligned} \quad (5)$$

Учитывая конкретный вид звукового поля (1), параметр связи можно записать в виде  $q = 2VH_z(x, z)$  или в новой системе координат  $q(x', z') = 2VH_z(x', z') = 2VH((z' - z) \tan \gamma, 2z - z')$ , где  $V$ - безразмерный параметр, характеризующий акустическую мощность.

Граничные условия для системы (5) выглядят следующим образом:

$$C_0(x = 0, z) = f(z), C_1(x = 0, z) = 0, \quad (6)$$

где  $f(z)$ - профиль падающего светового пучка в плоскости  $xz$  на входе в кристалл. В расчете в качестве входного пучка света рассматривается узкий гауссов пучок и пучок в виде дельта-функции, падающий на входную грань кристалла под углом  $\gamma$  к оси  $x$ . Закономерности взаимодействия в обоих случаях качественно не различаются, поэтому в дальнейшем под падающим светом подразумевается пучок в виде дельта-функции. Энергия падающего пучка равна  $|C_0(x = 0, z)|^2 = 1$ , поэтому эффективность дифракции будет численно равна энергии дифрагированного пучка  $\eta = W = |C_1(x = l, z)|^2$ , где  $l$  - длина области взаимодействия.

Численное моделирование позволяет исследовать зависимость эффективности дифракции от мощности управляющего сигнала  $\eta(V)$ . При варьировании длины области взаимодействия  $l$ , размера преобразователя  $l_z$ ,

координаты входа падающего света на входную грань кристалла  $z=z_0$ , выступающих в роли параметров данной задачи, характер исследуемой зависимости будет существенным образом изменяться. При различных значениях данных параметров возможна как полная периодическая “перекачка” энергии из +1-го в 0-й порядок дифракции и обратно, так и частичная перекачка энергии или полное отсутствие “перемодуляции”. При фиксированных значениях длины взаимодействия и ширины преобразователя, соответствующих конфигурации реального квазиколлинеарного фильтра, изменение входной координаты пучка позволяет достичь 100%-ной эффективности дифракции в широком диапазоне значений управляющей мощности (Рис. 3). Причиной этого является наличие фазовой неоднородности звукового поля. Качественное объяснение данного эффекта дается в работе [5].

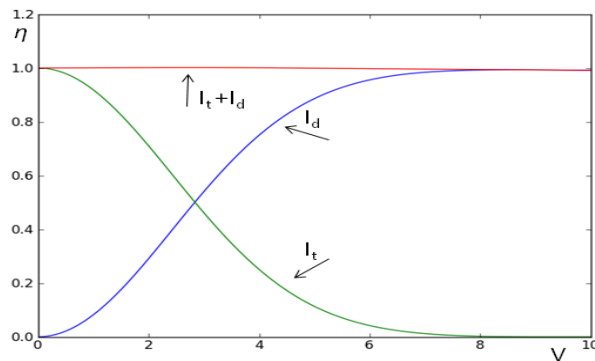


Рис. 3. Зависимость интенсивностей 0-го и +1-го порядков дифракции от управляющей мощности.

Таким образом, результатом данной работы является построение математической модели квазиколлинеарной АО дифракции, соответствующей экспериментальным исследованиям. Предложенная модель учитывает фазовую неоднородность звукового поля и позволяет дать теоретическое обоснование наблюдаемого эффекта отсутствия обратного рассеяния света.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Балакший, В.Н. Парыгин, Л.Е. Чирков “Физические основы акустооптики”, М.: Радио и связь, 1985.
2. V.V. Voloshinov // Opt. Eng. 1992. V. 31. № 10. P. 2089.
3. А.Г. Хаткевич // Акустический журнал. 1978. Т. 24. № 1. С. 108.
4. Е.А. Дьяконов, В.Б. Волошинов //Труды школы-семинара ”Волны-2011” 2011. С. 16.
5. С.Н. Антонов и др.// ЖТФ. 2009. Т. 79. № 6. С. 119.

## АНИЗОТРОПНАЯ ДИФРАКЦИЯ СВЕТА В ЯЧЕЙКАХ С ФАЗИРОВАННЫМИ ПЬЕЗОПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯМИ

Л.И. Михеев, В.И. Балакший

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
физический факультет*

mikheev\_lev@mail.ru, balakshy@phys.msu.ru

Дифракции света на ультразвуке (акустооптическое взаимодействие) в настоящее время является одним из основных эффектов, которые используются для управления оптическим излучением. На основе этого явления созданы и применяются во всем мире такие приборы, как модуляторы, дефлекторы и фильтры. Приборы такого рода обладают широкими функциональными возможностями, надежностью и простотой конструкции [1].

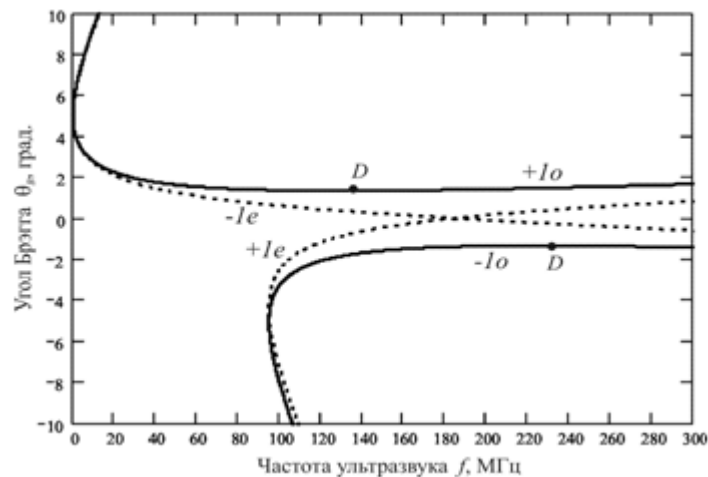


Рис. 1. Частотная зависимость углов Брэгга в ниобате лития

Одной из важных особенностей акустооптического (АО) взаимодействия в твердых телах является сильное влияние поляризации света на характеристики дифракции. Это видно из приведенных на рис. 1 зависимостей углов Брэгга  $\theta_B$  от частоты ультразвука  $f$  для световых волн разных поляризаций. Расчет выполнен для кристалла ниобата лития в случае однородного акустического поля, когда сдвиговая акустическая волна распространяется под углом  $\theta_a = 85^\circ$  к кристаллографической оси  $Z$ , а плоскость АО взаимодействия совпадает с плоскостью  $YZ$ . На рисунке представлены зависимости  $\theta_B(f)$  для обыкновенной ( $o$ ) и необыкновенной ( $e$ ) волн, рассеиваемых в  $+1$ -й и  $-1$ -й порядки дифракции. Буквами  $D$  отмечены рабочие точки анизотропных дефлекторов. Из рисунка видно, что при настройке ультразвука на определенную частоту и выборе определенного угла падения неполяризованного света мы попадем либо на одну из кривых, либо в точку пересечения кривых. В обоих случаях в

однородном акустическом поле при дифракции неполяризованного света не удается превысить порог эффективности дифракции в 50% для +1-го или –1-го порядков дифракции. Задача же для большинства АО устройств – получение максимальной световой мощности (до 95–99% от падающей) в одном порядке дифракции.

Указанное обстоятельство затрудняет создание эффективных устройств для управления неполяризованным излучением. Поэтому целью данной работы являлось изучение возможности создания АО приборов (в частности, дефлекторов) на основе эффекта анизотропной дифракции света в пространственно периодическом акустическом поле. Для такого поля кривые на рис. 1 будут располагаться по-другому, что дает основание надеяться на нахождение такой геометрии АО взаимодействия, при которой эффективность дифракции неполяризованного света будет больше, чем в случае однородного акустического поля (то есть будут эффективно дифрагировать и необыкновенная, и обыкновенная волны одновременно). Периодически неоднородное акустическое поле в АО ячейке может быть создано встречно-штыревым преобразователем (ВШП). Нанесение ВШП на кристалл значительно проще и дешевле, чем нанесение пластинчатого пьезопреобразователя, поэтому стоимость АО ячейки при такой конструкции должна снизиться во много раз. В такой постановке эта задача до сих пор не рассматривалась.

## МЕТОДИКА РАСЧЕТА

Неоднородность акустического поля сказывается двояким образом. Амплитудная неоднородность лишь изменяет величину акустической мощности, необходимой для получения заданной эффективности АО дифракции. Фазовая неоднородность, означающая искривление волнового фронта пучка, сказывается сильнее. В этом случае такой важный параметр акустооптики, как угол Брэгга, теряет смысл, поскольку он отсчитывается от фронта акустической волны. Это означает, что ни при каком угле падения света на АО ячейку нельзя выполнить условие фазового синхронизма – всегда существует фазовая расстройка, различная в разных точках акустического поля. Фазовая неоднородность акустического поля существенно изменяет амплитудные, угловые и частотные характеристики АО взаимодействия, что, разумеется, сказывается на работе АО приборов [2]. По этой причине дальнейшие расчеты будут выполнены только для варианта фазовой неоднородности. Брэгговская дифракция света в неоднородном акустическом поле описывается нелинейной системой уравнений, отличающейся от стандартной системы для брэгговского режима АО взаимодействия тем, что коэффициент АО связи  $q$  и фаза акустической волны  $\Phi$  зависят от пространственной координаты  $x$  [2]:



$$\begin{cases} \frac{dC_0}{dx} = \frac{q^*(x)}{2} C_1 \exp\{j[\eta x - \Phi(x)]\} \\ \frac{dC_1}{dx} = -\frac{q(x)}{2} C_0 \exp\{-j[\eta x - \Phi(x)]\} \end{cases}, \quad (1)$$

где  $C_0$  и  $C_1$  – амплитуды волн нулевого и первого порядков дифракции,  $\eta$  – параметр фазовой расстройки. Для фазово-неоднородного акустического поля с пространственным периодом  $d$  фазу акустической волны можно аппроксимировать следующим выражением:

$$\Phi(x) = \Phi_0 \cos(2\pi x/d), \quad q = \text{const.}, \quad (2)$$

где  $\Phi_0$  – глубина фазовой модуляции.

### РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

Для расчета был выбран срез кристалла ниобата лития с направлением волновой нормали ультразвука  $\mathbf{m}$  под углом  $\theta_a = 85^\circ$  к оси  $Z$  в плоскости  $YZ$ . Расчет выполнен для длины волны света  $\lambda = 1,06$  мкм и медленной акустической моды, распространяющейся со скоростью  $V = 4,06 \cdot 10^5$  см/с.

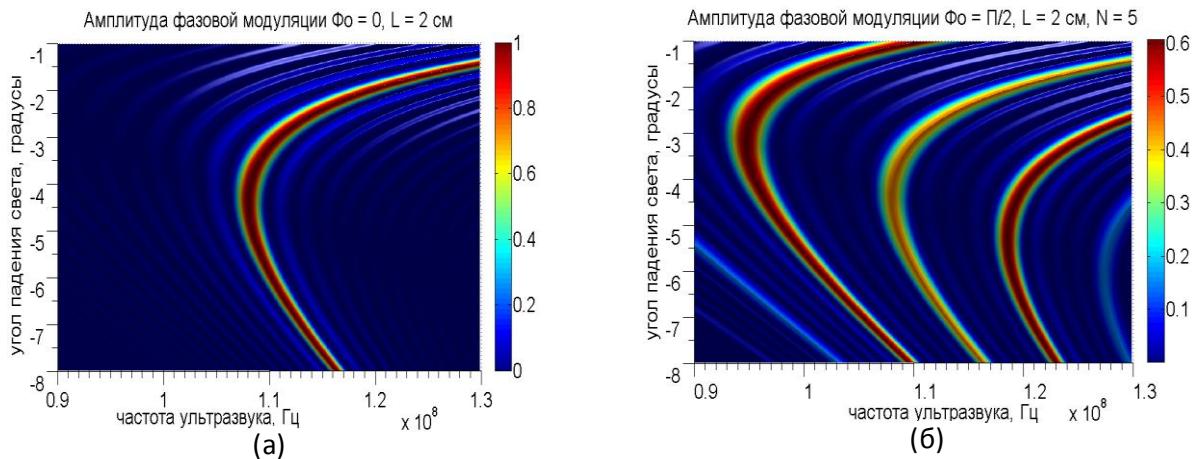


Рис. 2. Области АО взаимодействия для однородного (а) и неоднородного (б) акустического поля

На рис. 2 показаны области АО взаимодействия для однородного акустического поля (а) и периодически неоднородного поля (б). Расчет выполнен для необыкновенной поляризации падающего света и рассеяния света в +1-й порядок. На рис. 2а красно-зеленая дуга показывает область взаимодействия, где эффективность дифракции меняется не более чем на 3 дБ от максимального значения. Имеется полное соответствие этой области с кривой  $+1e$  на рис. 1. График на рис. 2б построен для неоднородного акустического поля с глубиной фазовой модуляции  $\Phi_0 = \pi/2$ , длиной взаимодействия  $L = 2$  см, числом периодов  $N = 5$  (число «пальцев» ВПП). Хорошо видно, как происходит расщепление основной области взаимодействия и появление дополнительных областей по бокам.

Такой расчет был проведен отдельно для вариантов обыкновенной и необыкновенной поляризации падающего света. Полученные зависимости для оптимальных углов падения света  $\vartheta_{opt}(f)$  затем были совмещены на одном графике. Результат представлен на рис. 3, где красные кривые относятся к случаю необыкновенной поляризации падающего света, рассеиваемого в +1-й порядок, а зеленые кривые – к случаю обыкновенной поляризации света, рассеиваемого тоже в +1-й порядок).

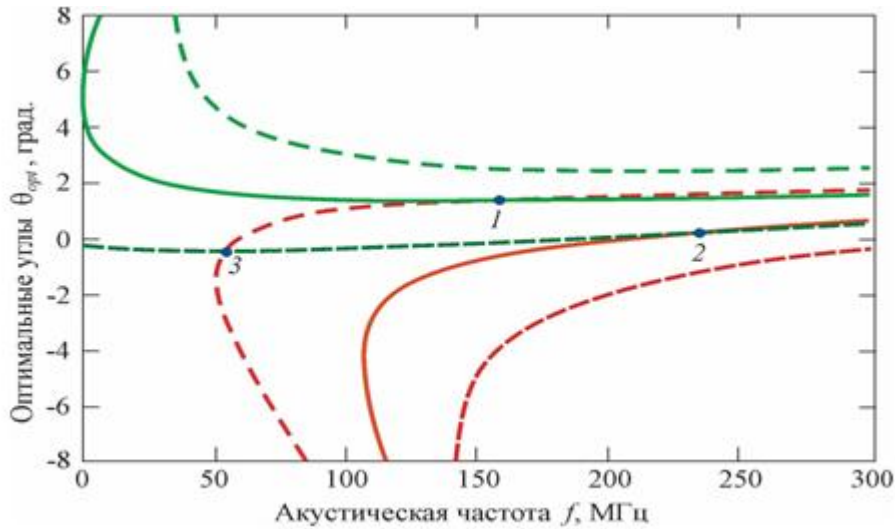


Рис. 3. Оптимальные углы для обыкновенной (зеленые кривые) и необыкновенной (красные кривые) поляризации падающего света

Задав соответствующие значения частоты ультразвука и угла падения неполяризованного света, можно получить рассеяние обеих поляризационных компонент в +1-й порядок дифракции (точки 1, 2 и 3 на рисунке). Наиболее удобной является точка 3, где пересекаются штриховые кривые для разных поляризаций. Здесь при соответствующей мощности ультразвука можно получить практически 100%-ную эффективность дифракции для каждой компоненты света.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В.И. Балакший, В.Н. Парыгин, Л.Е. Чирков “Физические основы акустооптики” М.: Радио и связь, 1985.
2. V.I. Balakshy, B.B. Linde, A.N. Vostrikova “Acousto-optic interaction in a non-homogeneous acoustic field excited by a wedge-shaped transducer” // Ultrasonics, 2008, V.48, No 5, PP.351-356.

## СРАВНЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ДВУХ ТИПОВ ШИРОКОАПЕРТУРНЫХ АКУСТООПТИЧЕСКИХ ФИЛЬТРОВ

Т.В. Юхневич, В.Б. Волошинов

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
физический факультет  
yukhnevich@physics.msu.ru*

В настоящее время среди различных методов управления световыми потоками широко применяются акустооптические методы, которые используются в современной оптике, оптоэлектронике и лазерной технике для управления амплитудой, частотой, фазой и поляризацией электромагнитной волны [1]. Достоинства акустооптических методов состоит в том, что они позволяют изменять параметры оптических сигналов в режиме реального времени, когда быстродействие таких устройств составляет десятки микросекунд.

Среди оптоэлектронных устройств большой интерес представляют перестраиваемые акустооптические фильтры [1,2]. Данные фильтры можно подразделить на два класса: коллинеарные фильтры, которые работают, в основном, с коллимированными пучками, и широкоапертурные фильтры, позволяющие обрабатывать изображения. Одной из важных задач, решаемых при помощи широкоапертурных акустооптических фильтров, является спектральный анализ изображений различных объектов. Кроме того, широкоапертурные акустооптические фильтры могут осуществлять и пространственную фильтрацию световых пучков, формирующих изображения в монохроматическом свете [2].

Для работы широкоапертурных фильтров используется специальная геометрия акустооптического взаимодействия в анизотропных средах [1]. В одноосных кристаллах такая геометрия может быть реализована как при распространении света вблизи оптической оси кристалла, так и при прохождении света вдали от оптической оси, когда акустооптическое взаимодействие близко к коллинеарному. Широкоапертурная геометрия может быть реализована в следующих материалах:  $\text{TeO}_2$ , KDP, Te, CdS,  $\alpha\text{-SiO}_2$ ,  $\text{Hg}_2\text{Cl}_2$ ,  $\text{Hg}_2\text{Br}_2$ ,  $\text{Mg}_2\text{F}$  и  $\text{Tl}_3\text{AsSe}_3$ . Практически во всех этих кристаллах до последнего времени применялась лишь приосевая геометрия. Однако, в акустооптике известно, что широкоапертурная дифракция реализуется и при углах падения света, близких к  $\theta = 90^\circ$ . К сожалению, подобный тип широкоапертурной дифракции в настоящее время исследован недостаточно полно, а возможность применения близкой к коллинеарной дифракции в акустооптических фильтрах и вовсе не рассматривалась.

В данной работе проведен расчет основных характеристик широкоапертурных фильтров с геометрией взаимодействия вдали от оси кристалла парателлурита. К таким характеристикам относятся полоса

пропускания, угол разведения падающего и дифрагированного луча в зависимости от угла среза кристалла  $\alpha$  и некоторые другие параметры. Все расчеты производились для длины волны оптического излучения  $\lambda = 632.8$  нм. Также был проведен сравнительный анализ основных характеристик акустооптических фильтров с геометрией взаимодействия вдали от оси кристалла парателлурита с классическими устройствами, в которых угол Брэгга близок нулю.

Максимальная угловая апертура фильтра в плоскости акустооптического взаимодействия определяется углом отклонения дифрагированного пучка по отношению к падающему свету  $\Delta\theta_d$ . Этот угол определялся по следующей формуле [3]:

$$\Delta\theta_d = \theta_i - \arccos\left(\frac{n_i}{n_o} \cos \theta_i\right), \quad (1)$$

где  $\theta_i$  - угол падения света,  $n_o$  и  $n_i$  – обыкновенный и необыкновенный показатель преломления кристалла, соответственно.

Анализируя дифракцию с нарушением условия фазового синхронизма можно найти полосу пропускания акустооптического фильтра, которая определяется по уровню 3 дБ следующей формулой [2,3]:

$$\delta\lambda \leq 0.8 \frac{\lambda V}{f l_1 \cos^2 \psi \sin^2 \theta_d}, \quad (2)$$

где  $V$  и  $f$  – скорость и частота ультразвука, соответственно,  $\psi$  – угол акустического сноса,  $l_1$  – длина пьезопреобразователя,  $\theta_d$  – угол дифракции.

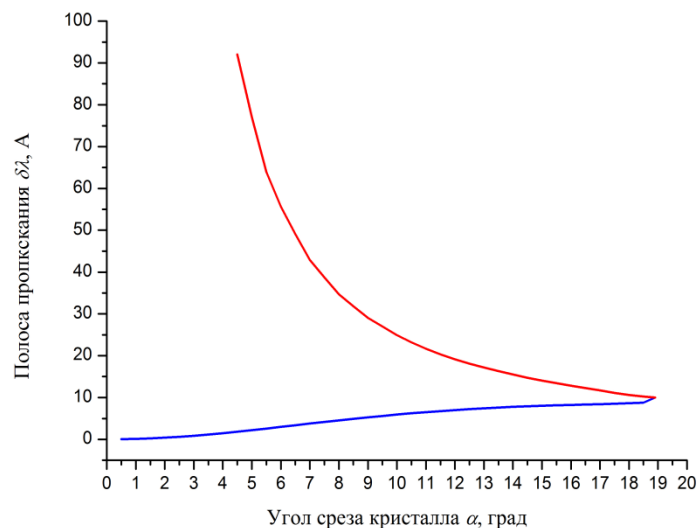


Рис. 1 Зависимость полосы пропускания фильтра от угла среза кристалла.

На рисунках 1 и 2 представлены полосы пропускания и угла разведения падающего и дифрагированного луча в двух типах широкоапертурных фильтров в зависимости от угла среза кристалла. Синей линией показана зависимость для фильтра с геометрией взаимодействия вдали от оси кристалла, красной – для фильтра с

приосевой геометрией взаимодействия. Из представленных результатов видно, что фильтры с геометрией взаимодействия вдали от оси кристалла парателлурита обладают меньшей полосой пропускания, чем у традиционных устройств. Однако фильтры с приосевой геометрией распространения имеют более широкую апертуру, чем вновь исследуемые устройства.

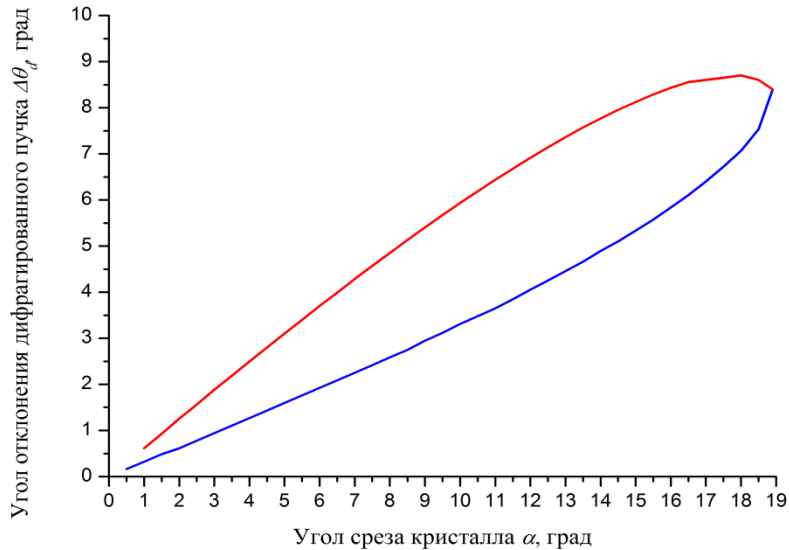


Рис.2 Зависимость угла разведения падающего и дифрагированного луча от угла среза кристалла.

В таблице 1 представлены сравнительные характеристики двух типов широкоапертурных фильтров с различными углами среза кристалла. Сравнивая данные, приведенные в таблице, можно сделать вывод о том, что по таким характеристикам, как полоса пропускания и пространственное разрешение широкоапертурные акустооптические фильтров с геометрией распространения вдали от осей кристалла превосходят классические устройства. Фильтры с приосевой геометрией взаимодействия, наоборот, превосходят исследуемые устройства по реальной угловой апертуре и потребляемой мощности. Проигрыш новых устройств в величине акустооптического качества может быть частично скомпенсирован за счет увеличения длины взаимодействия света и звука, и, следовательно, за счет использования кристаллов большей длины.

Из данных таблицы видно, что фильтры с малыми углами среза обоих типов мало пригодны для применения в системах анализа изображений, так как исследуемые приборы обладают ограниченным углом разведения падающего и дифрагированного луча и малой угловой апертурой. Что же касается фильтров с приосевой геометрией взаимодействия, то они имеют весьма широкую полосу пропускания. Поэтому для изготовления фильтров не следует выбирать кристаллы с малыми углами среза. Оказалось, что фильтры с углом среза кристалла  $\alpha = 18^\circ$  близки по своим

характеристикам. Очевидно, что устройства с геометрией взаимодействия вдали от оси кристалла имеют более высокую разрешающую способность по сравнению с известными устройствами, в которых свет распространяется близко к оптической оси кристалла.

Таблица 1. Сравнительные характеристики широкоапертурных фильтров с размером пьезопреобразователя  $l_1 = 1.0$  см на длине волны света  $\lambda = 632.8$  нм.

№	$\theta_B, ^\circ$	$f, \text{МГц}$	$\Delta\theta_d, ^\circ$	$\delta\lambda, \text{А}$	N	$M_2 * 10^{-18}, \text{с}^3/\text{г}$	$P$ 100%, Вт
1	2,6 <sup>0</sup>	21,5	1,25 <sup>0</sup>	420	7	1180	0,07
2	86,2 <sup>0</sup>	149,3	0,6 <sup>0</sup>	1	32	0,46	2,2
3	13,4 <sup>0</sup>	117,9	5,9 <sup>0</sup>	25	128	624	0,16
4	69,8 <sup>0</sup>	176,0	3,3 <sup>0</sup>	6	165	11	2,4
5	30,4 <sup>0</sup>	235,3	8,7 <sup>0</sup>	11	300	132	0,77
6	47,2 <sup>0</sup>	237,6	7 <sup>0</sup>	9	314	40	2,1

Таким образом, можно сделать вывод, что фильтры с геометрией взаимодействия вдали от оси кристалла превосходят классические фильтры по пространственной и спектральной разрешающей способности. Поэтому новые устройства могут быть использованы при решении специальных задач, например, когда при работе со световыми пучками необходимо получить более высокое качество отфильтрованных изображений.

## ЛИТРАТУРА

1. В.И.Балакший, В.Н.Парыгин, Л.Е.Чирков, “Физические основы акустооптики”, М.: Радио и связь, 1985.
2. Л.Н.Магдич, К.Б.Юшков, В.Б.Волошинов // Квантовая электроника. 2009. № 4. С. 347-352.
3. V.V. Voloshinov, K.V. Yushkov, V.B.J. Linde // J. Opt. A: Pure Appl., 2007. №9, p.341-347.