



МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА, ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

Кафедра фотоники и физики микроволн

ОПИСАНИЕ К ЗАДАЧЕ СПЕЦПРАКТИКУМА

**Цилиндрический резонатор
сантиметрового диапазона длин волн**

Зайцев К.А., Захаров П.Н., Королев А.Ф.,
Савин В.Л., Сухоруков А.П.

Москва – 2012 г.

Задача знакомит с методиками аналитического расчета, компьютерного моделирования и экспериментального исследования микроволновых резонансных электродинамических систем на примере объемного цилиндрического резонатора. Для такого объекта можно точно аналитически рассчитать распределения электромагнитного поля в объеме [1-5]. Определение резонансных частот и добротностей резонаторов путем численного моделирования проводится с использованием программного комплекса CST Microwave Studio. Экспериментальная часть выполняется с помощью векторного анализатора электрических цепей Rohde&Schwarz ZVB20. Рассматриваемая в задаче методика теоретических и экспериментальных исследований может быть успешно применена и для более сложных конструкций резонаторов, для которых получение точного аналитического решения невозможно или затруднено.

Введение

В микроволновом диапазоне применение колебательных контуров из обычных индуктивностей и емкостей становится практически невозможным из-за увеличения омических потерь и потерь на излучение. В качестве резонансных электромагнитных систем используются объемные резонаторы, образованные замкнутой проводящей поверхностью. Объемные резонаторы с металлическими стенками применяют в генераторах, усилителях, фильтрах и другой микроволновой технике в диапазоне от 1 ГГц до 100 ГГц.

Для каждого конкретного вида объемного резонатора может быть получен бесконечный ряд решений уравнений Максвелла, удовлетворяющих граничным условиям и различающихся как по частоте колебаний, так и по пространственному распределению электрической E и магнитной H компонент поля. Подобные решения принято называть собственными видами колебаний резонатора или **модами**.

Для соединения резонаторов с передающими линиями (волноводами, коаксиальными линиями) используют отверстия в стенках резонатора, штыри и петли связи. Наличие подобных связей, а также конечное значение

проводимости стенок несколько изменяет распределение поля и резонансные частоты собственных видов колебаний. Однако эти изменения обычно невелики и резонансные частоты резонаторов с элементами связи мало отличаются от частот собственных мод.

Цилиндрические резонаторы

Цилиндрические резонаторы образуются из волноводов круглого сечения путем установки двух проводящих торцевых поверхностей. Схема цилиндрического резонатора представлена на рис.1, где a - радиус резонатора, l - длина резонатора.

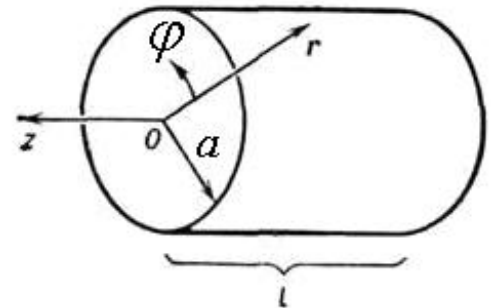


Рис. 1. Схема цилиндрического резонатора

Формально задача определения составляющих поля (структуры поля) в объемных резонаторах сводится к решению уравнений Максвелла, удовлетворяющих граничным условиям на стенках резонатора.

В случае закрытых резонаторов без потерь задача сводится к решению трехмерного векторного волнового уравнения (уравнения Гельмгольца) для вектора Герца [1-3]:

$$\nabla^2 \vec{G} + k^2 \vec{G} = 0, \quad (1)$$

где $\vec{G}_i = \vec{e}_z G_i$ - электрический ($i = \varepsilon$) или магнитный ($i = m$) вектор Герца, направленный параллельно оси z резонатора;

$G_i = A_i \psi_{\perp} \cdot \xi(z) f(t)$ - амплитудное значение электрического или магнитного вектора Герца;

ψ_{\perp} - функция поперечного распределения поля;

$\xi(z)$ - функция продольного распределения поля;

$f(t) = \exp(j\omega t)$ - функция временной зависимости поля;

$k = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$ - волновое число; $\omega = 2\pi f$ - круговая частота поля;

$\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon$ - абсолютная диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей резонатор; $\mu_a = \mu_0 \mu$ - абсолютная магнитная проницаемость среды, заполняющей резонатор; ε, μ - относительные электрическая и магнитная проницаемости среды соответственно.

В объемных цилиндрических резонаторах, могут существовать 2 типа колебаний:

1) моды, содержащие продольную составляющую электрического вектора без продольной магнитной составляющей ($G_z \neq 0, G_M = 0$), называемые Е модами или ТМ модами,

2) моды, содержащие продольную составляющую магнитного вектора без продольной электрической составляющей ($G_z = 0, G_M \neq 0$), называемые Н модами или ТЕ модами.

В системе координат, связанной с резонатором, электрический вектор Герца пропорционален продольной составляющей вектора напряженности электрического поля, а магнитный вектор Герца – продольной составляющей вектора напряженности магнитного поля.

Вектор Герца должен удовлетворять граничным условиям на боковых и торцевых стенках резонатора. Для электрических типов колебаний (Е - моды) граничные условия имеют вид:

$$\vec{G}_z \Big|_{S_{\text{ббо}}} = 0; \quad \frac{\partial G_z}{\partial n} \Big|_{S_{\text{mmo}}} = 0;$$

для магнитных типов колебаний (Н- моды):

$$\frac{\partial G_M}{\partial n} \Big|_{S_{\text{ббо}}} = 0 \quad \vec{G}_M \Big|_{S_{\text{mmo}}} = 0;$$

Где $S_{\text{ббо}}$, S_{mmo} - боковая и торцевая поверхности резонатора соответственно.

Решение уравнения (1) в цилиндрической системе координат (r, φ, z) будем искать в виде

$$G(r, \varphi, z) = \psi_{\perp}(r, \varphi) \cdot \xi(z) \tag{2}$$

В этом случае уравнение (1) разделится на два:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi_{\perp}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + k_{\perp}^2 \psi = 0, \quad (3)$$

$$\xi'' + k_z^2 \xi = 0$$

где k_{\perp} и k_z поперечное и продольное собственные значения, причем $k^2 = k_{\perp}^2 + k_z^2$.

Для колебаний магнитного типа решение запишется в виде:

$$G_M = C_1 J_n \left(\frac{\chi_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) \sin \left(\frac{p\pi}{l} z \right), \quad (4)$$

для колебаний электрического типа:

$$G_E = C_2 J_n \left(\frac{\nu_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) \cos \left(\frac{p\pi}{l} z \right), \quad (5)$$

где C_1, C_2 - константы, определяемые нормировкой краевой задачи, ν_{mn} - корень с номером m функции Бесселя порядка n , χ_{mn} - корень с номером m производной функции Бесселя порядка n (см. табл. 1,2 в приложении).

Найдем резонансную частоту собственных видов колебаний в цилиндрическом резонаторе [5-7]:

Для колебаний вида H_{mnp} :

$$\omega_{mnp} = \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\epsilon\epsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{\chi_{mn}}{a} \right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2}. \quad (6)$$

Для колебаний вида E_{mnp} :

$$\omega_{mnp} = \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\epsilon\epsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{\nu_{mn}}{a} \right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2}. \quad (7)$$

Для колебаний типа H_{mnp} и E_{mnp} индекс m соответствует числу полных периодов стоячих волн поля, укладываемых по окружности резонатора (азимутальное направление), индекс n характеризует число полупериодов стоячей волны поля, укладываемых по диаметру $2a$ (радиальное направление), а индекс p соответствует числу полупериодов поля стоячей волны, укладываемых на длине резонатора l (продольное направление).

Распределения компонент поля для мод магнитного и электрического типов представлены в таблице 1.

Анализ выражений показывает, что простейшему виду электрических мод соответствует $m = 0, n = 1, p = 0$. В этом случае электрическое поле характеризуется компонентой E_z , а магнитное – компонентой H_φ . При этом собственная длина волны не зависит от протяженности цилиндра вдоль продольной оси z . Распределение силовых линий E_{010} - колебаний представлена на рисунке 2.

Кроме структуры поля моды E_{010} на рис.2. также представлена H_{111} мода.

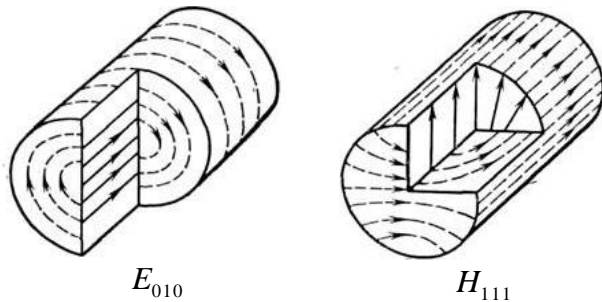


Рис. 2. Структуры полей низших мод цилиндрического резонатора

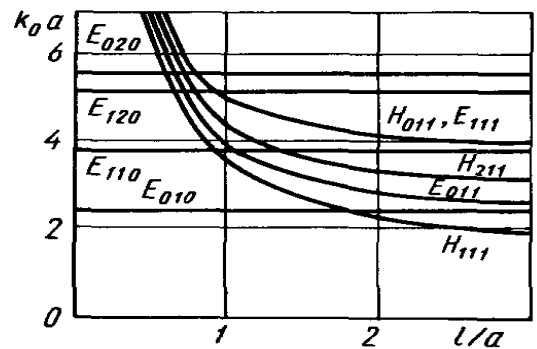


Рис. 3. Зависимость собственных волновых чисел различных видов колебаний в цилиндрическом резонаторе от l/a

Компоненты мод магнитного типа	Компоненты мод электрического типа
$E_r = \frac{E_{0r}}{r} \cdot J_n\left(\frac{\chi_{mn}}{a} r\right) \sin(m\varphi) \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right)$	$E_r = E_{0r} \cdot J_n'\left(\frac{\nu_{mn}}{a} r\right) \cos(m\varphi) \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right)$
$E_\varphi = E_{0\varphi} J_n'\left(\frac{\chi_{mn}}{a} r\right) \cos(m\varphi) \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right)$	$E_\varphi = \frac{E_{0\varphi}}{r} J_n\left(\frac{\nu_{mn}}{a} r\right) \sin(m\varphi) \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right)$
$E_z = 0$	$E_z = E_{0z} J_n\left(\frac{\nu_{mn}}{a} r\right) \cos(m\varphi) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right)$
$H_r = H_{0r} J_n'\left(\frac{\chi_{mn}}{a} r\right) \cos(m\varphi) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right)$	$H_r = \frac{H_{0r}}{r} J_n\left(\frac{\nu_{mn}}{a} r\right) \sin(m\varphi) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right)$
$H_\varphi = \frac{H_{0\varphi}}{r} J_n\left(\frac{\chi_{mn}}{a} r\right) \sin(m\varphi) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right)$	$H_\varphi = H_{0\varphi} J_n'\left(\frac{\nu_{mn}}{a} r\right) \cos(m\varphi) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right)$
$H_z = H_{0z} J_n\left(\frac{\chi_{mn}}{a} r\right) \cos(m\varphi) \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right)$	$H_z = 0$

Согласно рис.3. для «длинных» резонаторов с отношением длины l к радиусу a :

$$l/a > \pi / \sqrt{v_{10}^2 - \chi_{11}^2} \approx 2,03 \quad (8)$$

низшим видом колебаний будет H_{111} . Для «коротких» резонаторов с $l/a < 2,03$ - колебаний вида E_{010} . При $l/a = 2,03$ резонансные частоты этих видов колебаний совпадают, хотя структуры полей разные. Такие моды называют вырожденными.

Возбуждение резонаторов

Поскольку резонаторы обычно связаны с внешними цепями, то их колебательные системы следует рассматривать не изолированно, а в сочетании с присоединенными к ним возбуждающими устройствами. В качестве возбуждающих устройств применяют петлевые или штыревые антенны, щели и отверстия в общих боковых стенках резонатора и волноводов.

На рис. 4 показаны способы возбуждения колебаний в цилиндрическом резонаторе с помощью петли, введенной через отверстие в боковой стенке или стержня,

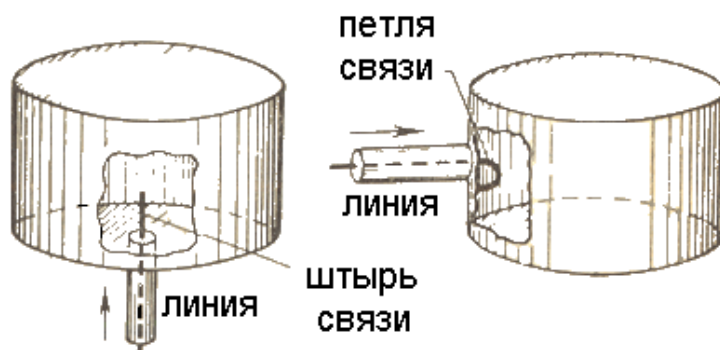


Рис. 4. Возбуждение резонаторов

введенного через плоскость верхней стенки. Плоскость петли перпендикулярна силовым линиям магнитного поля. Возбуждаемое стержнем электрическое поле также сонаправлено с полем моды. Часто конструкция элемента связи предусматривает плавную регулировку глубины погружения петли и стержня, это определяет значение коэффициента связи резонатора.

Собственная и нагруженная добротность резонатора

Собственная добротность резонатора Q_0 , определяемая омическими потерями в стенках, рассчитывается из соотношения:

$$Q_0 = \frac{\omega_0 W}{P_{рез}}, \quad (9)$$

где ω_0 - резонансная частота системы, W - запасенная в резонаторе энергия, $P_{рез}$ - мощность, поглощаемая стенками резонатора, определяемая как

$$P_{рез} = \frac{1}{2\sigma d} \int_S H_t H_t^* ds = \frac{1}{2} \int_S R_{нов} H_t H_t^* ds. \quad (10)$$

Здесь H_t тангенциальная составляющая магнитного поля, S - полная площадь поверхности резонатора (торцевая и боковая), σ - проводимость стенок резонатора по постоянному току,

$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega_0 \sigma \mu_a}} - \quad (11)$$

толщина скин-слоя, $R_{нов} = \sqrt{\frac{\omega_0 \mu_a}{2\sigma}}$ - поверхностное сопротивление металла.

Энергия W , запасенная в объеме резонатора V , определяется выражением:

$$W = W_E = W_H = \frac{1}{2} \varepsilon \int_V |E|^2 dv = \frac{1}{2} \mu \int_V |H|^2 dv. \quad (12)$$

Для цилиндрического резонатора аналитические выражения для **собственных** добротностей первых мод выглядят следующим образом [6]:

$$\begin{aligned} Q^{E_{010}} &= \frac{1}{d} \cdot \frac{al}{a+l} \\ Q^{E_{011}} &= \frac{1}{d} \cdot \frac{al}{2a+l} \\ Q^{H_{111}} &= \frac{1}{d} \cdot \frac{al}{(2a-l) \cdot \left(\frac{\lambda}{2l}\right)^2 + l \frac{(\chi_{11})^2}{(\chi_{11})^2 - 1}} \end{aligned} \quad (13)$$

В случае связанных резонаторов, когда сопротивление нагрузок (линий передачи) являются активными, ВЧ-мощность рассеивается как в самом резонаторе, так и в нагрузках. $P_{полн} = P_{рез} + P_{лин}$.

Добротность резонатора с учетом полных потерь называют **нагруженной**

$$Q_n = \frac{\omega_0 W}{P_{полн}}, \quad (14)$$

а величина $Q_{вн}$ т.н. внешней добротности равна отношению энергии, запасенной в резонаторе, к потерям мощности во внешних цепях.

$$\frac{1}{Q_{вн}} = \frac{1}{\omega_0} \frac{\sum P_{лин}}{W} \quad (15)$$

Связь величин собственной, нагруженной и внешней добротностей определяется из соотношения:

$$\frac{1}{Q_n} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{вн}} \quad (16)$$

Методика экспериментального определения собственной добротности

Рассмотрим метод определения добротностей связанного резонатора из результатов эксперимента. Суть метода сводится к представлению резонатора в качестве исследуемой нагрузки Z линии с волновым сопротивлением Z_0 , (рис. 5).

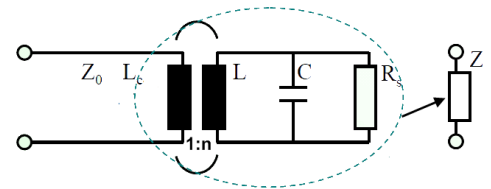


Рис. 5. Эквивалентная схема объемного резонатора, связанного с линией передачи

Устройство связи резонатора с линией передачи в данном случае рассматривается как идеальный трансформатор с коэффициентом трансформации n . Для индуктивной связи (возбуждающий элемент типа петля) $n = \frac{L_c}{L}$, где L_c - индуктивность петли. При этом импеданс нагрузки выражается через импеданс резонатора простой формулой $Z = Z_c \cdot n$.

Резонатор можно представить как параллельно подключенные L, C, R_s - соответственно эквивалентные сосредоточенные индуктивность, емкость и шунтовое сопротивление. Поэтому импеданс резонатора запишем в виде:

$$Z_c = \frac{1}{\frac{1}{R_s} + i\omega C + \frac{1}{i\omega L}} = \frac{R_s}{1 + iQ_o \left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right)} = \frac{R_s}{1 + iQ_o \xi}, \quad (17)$$

где $\omega_o = 2\pi f_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ - резонансная частота колебательной системы,

$Q_o = \frac{R_s}{\omega_o L} = R_s \omega_o C$ - собственная добротность, а $\xi = \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}$ - расстройка.

Зная импеданс резонатора, определим импеданс нагрузки как

$$Z = nZ_c = \frac{nR_s}{1 + iQ_o \xi} = \frac{\beta Z_o}{1 + iQ_o \xi}, \quad (18)$$

где $\beta = \frac{R_s}{Z_o} \cdot n$ - коэффициент связи резонатора с линией передачи, который

также может быть определен через собственную Q_o и внешнюю $Q_{вн}$

добротности $\beta = \frac{Q_o}{Q_{вн}}$ [7].

Таким образом, коэффициент связи определяет, где теряется больше энергии, в резонаторе или в линиях связи. Так, при $Q_{вн} < Q_o$ $\beta > 1$, такой режим называется режимом пересвязи резонатора. При $Q_{вн} > Q_o$ $\beta < 1$ наблюдается режим, называемый режимом недосвязи резонатора. Тот или иной режим может быть установлен, например, при изменении глубины введения возбуждающего элемента. Для определенности в данной работе выбран режим малой связи (режим недосвязи).

Коэффициент отражения на входе резонатора по напряжению:

$$\Gamma = S_{11} = V_{отп} / V_{пад}, \quad (19)$$

где $V_{пад}$ и $V_{отп}$ - комплексные амплитуды напряжений падающей и отраженной волн, можно представить через волновое сопротивление линии Z_o и импеданс нагрузки Z [1-4]:

$$\Gamma = \frac{Z - Z_o}{Z + Z_o}. \quad (20)$$

Тогда для комплексного коэффициента отражения с учетом (18) можно записать

$$\Gamma = \frac{\beta - 1 - iQ_o\xi}{\beta - 1 - iQ_o\xi} = \frac{(\beta - 1)^2 - Q_o^2\xi^2}{(\beta + 1)^2 + Q_o^2\xi^2} + i \frac{-2\beta Q_o\xi}{(\beta + 1)^2 + Q_o^2\xi^2} = \text{Re}(\Gamma) + i \text{Im}(\Gamma) \quad (21)$$

При неизменной глубине погружения элемента связи, а также в случае узкой полосы частот, коэффициент связи β можно считать независимым от частоты. На резонансной частоте импеданс нагрузки Z действителен и не имеет реактивных составляющих. Поэтому для режима недосвязи коэффициент β легко определить, зная коэффициент отражения на резонансной частоте $\Gamma(f_o)$:

$$\beta = \frac{1 - \Gamma(f_o)}{1 + \Gamma(f_o)}. \quad (22)$$

Коэффициент отражения по мощности определяется как квадрат коэффициента отражения по напряжению. При этом

$$\frac{P_{omp}}{P_{nao}} = \Gamma^2 = \Gamma \cdot \Gamma^* = |S_{11}|^2 = \frac{(\beta - 1)^2 + Q_o^2\xi^2}{(\beta + 1)^2 + Q_o^2\xi^2}, \quad (23)$$

где P_{nao} и P_{omp} - мощности падающей и отраженной волн соответственно.

Решая это уравнение относительно Q_o , получаем формулу для определения собственной добротности системы

$$Q_o = \sqrt{\frac{(\beta - 1)^2 - (\beta + 1)^2 \cdot \Gamma^2}{\xi^2(\Gamma^2 - 1)}}. \quad (24)$$

Следует отметить, что данная формула применима вблизи резонансной частоты в полосе Δf , определяемой нагруженной добротностью системы Q_H по формуле

$$\frac{\Delta f}{f_o} = \frac{1}{Q_H} = \frac{Q_o}{1 + \beta} \quad (25)$$

Численное моделирование электродинамических структур

В настоящее время в связи с развитием компьютерных технологий и распространением программных комплексов для расчета трехмерных электромагнитных полей при исследовании и проектировании СВЧ-структур всё больше используют численное моделирование. Такой подход позволяет существенно ускорить и упростить процесс разработки и оптимизации устройств.

Численное моделирование объемных резонаторов в данной задаче будет производиться в программном комплексе CST Microwave Studio. Основным методом решения задач электродинамики в данном программном продукте является метод конечных интегралов (МКИ) [8-9], представляющий собой схему последовательной дискретизации уравнений Максвелла в интегральной форме. Уравнения Максвелла в интегральной форме имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_{\partial A} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = - \iint_A \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} \\ \oiint_{\partial V} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} = 0 \\ \oint_{\partial A} \vec{H}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = \iint_A \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(\vec{r}, t) + \vec{J}(\vec{r}, t) \right) \cdot d\vec{A} \\ \oiint_{\partial V} \vec{D}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} = \iiint_V \rho(\vec{r}, t) dV \end{array} \right. , \quad (26)$$

$\forall A, V \in R^3$, где A есть поверхность, ограниченная замкнутым контуром ∂A , V – объем, ограниченный замкнутой поверхностью ∂V , $d\vec{l}$ – бесконечно малый векторный элемент контура ∂A , $d\vec{A}$ – бесконечно малый векторный элемент поверхности A , длина которого равна площади бесконечно малой области поверхности, а направление ортогонально к этой области (направлен наружу в случае замкнутой поверхности).

Для численного решения уравнений Максвелла определяется конечный объем, ограничивающий рассматриваемый объект. Задача электродинамики решается в ограниченной односвязной пространственной области $\Omega \in R^3$. Область Ω разбивается на конечное число N_p ячеек с помощью регулярной

сетки (в общем случае МКИ допускает более сложные формы ячеек). Свяжем дискретную декартову систему координат с сеткой: пусть индекс i является дискретной координатой в направлении оси x , j – в направлении оси y , k – в направлении оси z . Применяя первое из уравнений (26) (закон Фарадея) к грани ячейки с индексом (i, j, k) (рис. 6), получим

$$e_x(i, j, k) + e_y(i+1, j, k) - e_x(i, j+1, k) - e_y(i, j, k) = -\frac{d}{dt} b_z(i, j, k), \quad (27)$$

где скалярный элемент $e_x(i, j, k) = \int_{(x_i, y_j, z_k)}^{(x_{i+1}, y_j, z_k)} \vec{E} \cdot d\vec{s}$ есть электрическое

напряжение вдоль одного из ребер (коллинеарного с осью x) рассматриваемой грани, в точности равное интегралу электрического поля вдоль данного ребра, и аналогично для других напряжений. Таким образом, циркуляция вектора \vec{E} в левой части первого уравнения (26) вычисляется как сумма четырех напряжений (27). Скалярная величина $b_z(i, j, k) = \int_{A_z(i, j, k)} \vec{B} \cdot d\vec{A}$ представляет собой магнитный поток через рассматриваемую грань ячейки.

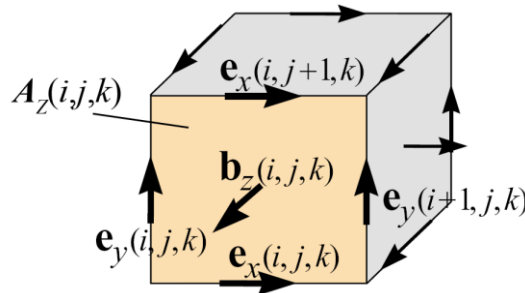


Рис. 6. Ячейка сетки, электрические напряжения e вдоль ребер грани A и магнитный поток b через грань

Все напряжения $e_x(i, j, k), e_y(i, j, k), e_z(i, j, k)$ группируются в единый вектор-столбец \vec{e} . Элементы располагаются в лексикографическом порядке, вначале компонуются напряжения по оси x , затем по оси y , затем по оси z :

$$\vec{e} = (e_x(0,0,0), e_x(0,0,1), \dots, e_x(i_{\max}, j_{\max}, k_{\max}), e_y(0,0,0), \dots, e_y(i_{\max}, j_{\max}, k_{\max}), e_z(0,0,0), \dots, e_z(i_{\max}, j_{\max}, k_{\max}))^T. \quad (28)$$

При помощи такой же процедуры, магнитные потоки группируются в единый вектор \vec{b} . После этого система уравнений может быть записана в матричном виде:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 & \dots & -1 & \dots & -1 \\ & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}}_C \underbrace{\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{3 \cdot N_p} \end{pmatrix}}_{\vec{e}} = -\frac{d}{dt} \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{3 \cdot N_p} \end{pmatrix}}_{\vec{b}}. \quad (29)$$

Матрица C содержит лишь топологическую информацию (знаки элементов $e(i, j, k)$, обусловленные ориентацией ребер ячеек в пространстве), таким образом, матричные элементы принимают значения $C_{i,j} \in \{-1, 0, 1\}$. C представляет собой дискретный оператор ротора на основной сетке.

Аналогичным образом дискретизируется второе уравнение системы (26), приводя ко второму уравнению в результирующей дискретной системе (30). Матрица S в (30) также содержит только топологическую информацию и представляет собой дискретный оператор дивергенции на основной сетке.

Для дискретизации оставшихся двух уравнений Максвелла необходимо ввести вторичную сетку, ортогональную к первой [8-9]. В случае регулярной основной сетки, разместим узлы вторичной сетки в геометрических центрах ячеек, образованных основной сеткой. Вторичная сетка необходима для вычисления циркуляций вектора \vec{H} по контурам, пронизывающим грани, образованные основной сеткой (см. третье уравнение системы (26); соответствующие магнитные потоки вектора \vec{B} записаны в (27)). Вторичная сетка также используется для вычисления потоков вектора электрической индукции и электрических токов в третьем и четвертом уравнениях (26). Используя процедуру, аналогичную описанной выше для вторичной сетки и двух оставшихся уравнений Максвелла, получим их дискретизированную форму.

В результате получим систему матричных уравнений, называемых сеточными уравнениями Максвелла [8-9]:

$$\begin{cases} C\bar{e} = -\frac{d}{dt}\bar{b}, & S\bar{b} = 0, \\ \tilde{C}\bar{h} = \frac{d}{dt}\bar{d} + \bar{j}, & \tilde{S}\bar{d} = q, \end{cases} \quad (30)$$

где \tilde{C} и \tilde{S} есть дискретные операторы ротора и дивергенции на вторичной сетке, соответственно. Полученные матричные уравнения могут быть использованы для численного моделирования.

Сетка

В CST MS возможно применение двух типов сетки: прямоугольной и

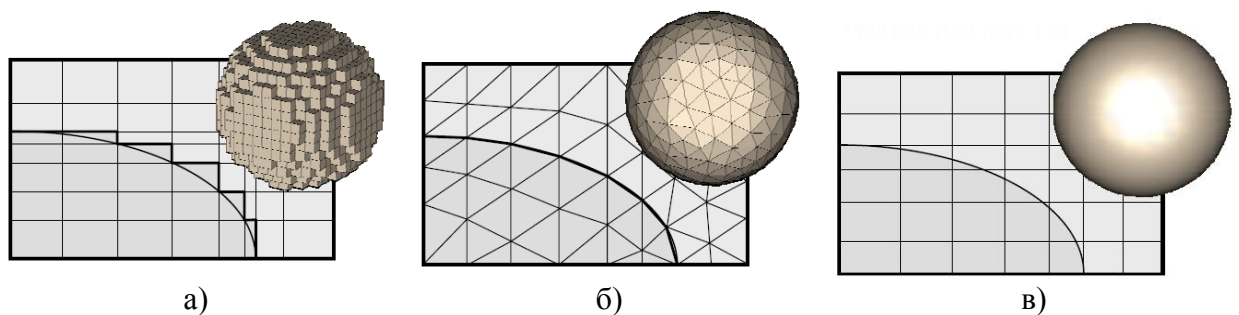


Рис. 7. Виды сеток в CST Microwave Studio.

тетрагональной. Для прямоугольной сетки легко рассчитать координаты узлов, в связи с этим генерировать её быстро, и для этого не требуются большие объемы памяти. Для генерации тетрагональной сетки необходимо значительно большее время и машинные ресурсы.

Для стандартного метода конечно разностного разбиения (рис. 7а) характерно расположения узлов сетки на поверхности объекта с образованием ступенек. При этом хорошее соответствие границам объекта достигается измельчением ячеек сетки. Для тетрагональной сетки также характерно расположение узлов на поверхности объекта (рис. 7б). Треугольное разбиение дает возможность гораздо точнее описать поверхность исследуемого объекта, нежели прямоугольная сетка. По умолчанию в CST MS используется метод идеализации границ (Perfect Boundary Approximation). В отличии от стандартных прямоугольной и тетрагональной сеток узлы в PBA методе разбиения в общем случае не находятся на границе объекта (рис. 7в). Сетка строится таким образом, что

граница объекта проходит внутри каждой её ячейки, а узлы любой из ячеек расположены как внутри, так и снаружи объекта.

Задача на собственные значения

Для исследования резонаторов без потерь система уравнений Максвелла сводится к уравнению Гельмгольца (1), и решается задача на собственные значения в ограниченной объемом резонатора области. Полученные собственные значения будут соответствовать собственным дискретным частотам резонатора, а собственные векторы – объемному распределению электромагнитного поля. Важной характеристикой резонатора также является собственная добротность, которая может быть получена на основе анализа полученного распределения электромагнитного поля.

Для решения задачи на собственные значения в CST предлагается использовать метод подпространств Крылова (Advanced Krylov Subspace) или метод Якоби-Девидсона [9]. Оба метода основаны на поиске собственных значений матриц. Первый метод не учитывает потери в структуре, однако, для высокодобротных систем позволяет вычислять потери после решения основной задачи. Метод Якоби-Девидсона позволяет учесть комплексную диэлектрическую и магнитную проницаемость вещества. Время расчетов для метода Крылова при исследовании большого числа мод значительно меньше, к тому же предполагается исследование высокодобротной закрытой системы, поэтому в дальнейшем будем использовать метод Крылова для решения в CST MS краевой задачи на собственные значения.

Расчет собственной добротности в CST MS основан на использовании формулы (9). Полученные собственные поля резонатора интегрируются на выбранной сетке и дают значения запасенной энергии (12) и мощности потерь в стенках (10).

Экспериментальные исследования

Экспериментальные исследования основаны на измерении комплексного коэффициента отражения по напряжению от исследуемого устройства. Такую задачу называют задачей рассеяния, в которой определяются элементы матрицы рассеяния, связывающей амплитуды падающих волн с амплитудами отраженных волн. При однопортовых измерениях матрица рассеяния сводится к единственному элементу S_{11} , модуль которого определяет коэффициент отражения, а аргумент – разность фаз падающей и отраженной волн.

Для проведения экспериментов используют классическую схему рефлектометра, принципиальная схема которого изображена на рис. 9. Она состоит из генератора СВЧ сигнала с возможностью изменения частоты возбуждения, направленных ответвителей, позволяющих разделить падающий и отраженный сигналы, устройства индикации на базе VGA дисплея, портов подключения исследуемых устройств, панели управления

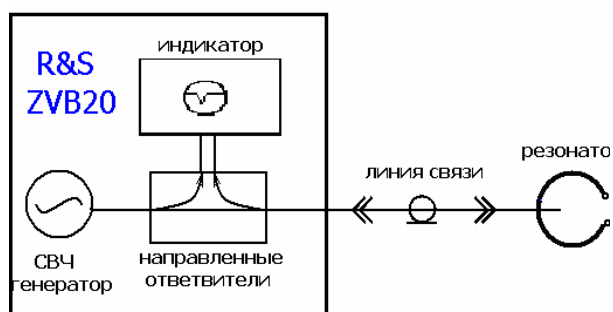


Рис. 9. Блок схема установки

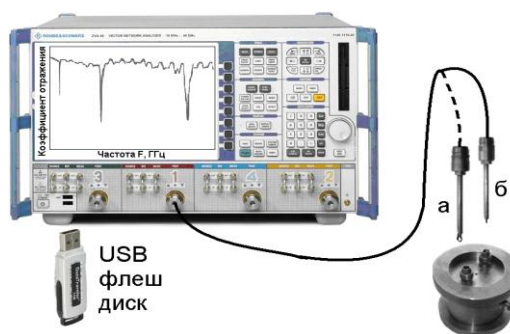


Рис. 10. Внешний вид установки при возбуждении а)петлей; б)штырем

системой и интерфейсов ввода-вывода результатов LAN, USB, GPIB. Все перечисленные элементы конструктивно собраны в одном корпусе векторного анализатора электрических цепей ZVB 20 [10].

Возбуждение резонатора производится через верхнюю крышку посредством петли связи или штыря связи, рис. 10. Глубина погружения возбуждающего элемента определяет связь резонатора с линией. Чем глубже погружается элемент связи, тем больше становится внешняя добротность, а

также больше искажается поле моды ввиду возмущения поля металлическим объектом. Для определенности в данной работе считается, что поле моды слабо искажается возбуждающим элементом, поэтому связь резонатора с линией не велика. Для безошибочного выбора режима малой связи на каждом возбуждающем элементе нанесены метки. При выполнении упражнений не следует погружать элемент связи в полость резонатора глубже отмеченных положений.

Экспериментальную зависимость модуля коэффициента отражения от частоты необходимо записать в файл на внешнем USB флеш-диске для последующей обработки.

Порядок выполнения задачи


Упражнение 1. Расчет аналитических значений собственных частот и собственных добротностей цилиндрического резонатора.


1) Измерить диаметр $D = 2a$ и длину l двух предложенных резонаторов с помощью штангенциркуля. Рассчитать аналитические значения собственных частот мод E_{010} , H_{111} , E_{011} , используя формулы (6),(7).


Исследуемый резонатор изготовлен из латуни. Табличные значения для проводимости латуни $\sigma = 1.57 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$. В реальности проводимость материала стенок резонатора отлична от табличных значений. Наличие окислов и шероховатостей, связанных с точностью обработки металла, существенно снижает эффективную проводимость материала. Для учета данных факторов при расчете добротностей рекомендуется использовать $\sigma_{\text{эфф}} = 1.5 \cdot 10^5 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$.


2) По формулам (13) рассчитать теоретические значения добротностей исследуемых мод и занести полученные результаты расчета в таблицу отчета (см приложение).


Упражнение 2. Решение задачи на собственные значения для цилиндрического резонатора средствами CST MS.


1) Запустить CST DESIGN ENVIRONMENT, выбрать CST Microwave Studio  и, игнорируя выбор заготовок проектов, создать новый пустой проект.




2) Выбрать единицы измерения (**Solve->Units** или используя пиктограмму ). Рекомендуется в качестве единиц длины использовать миллиметры (mm), частоты- гигагерцы (GHz), времени – наносекунды (ns).


3) Построить модель цилиндра, используя стандартную фигуру (**Objects->Basic Shapes->Cylinder** или ). В качестве внутреннего радиуса (Inner radius) выбрать 0, в качестве внешнего (Outer radius) указать значение $a = \frac{D}{2}$, полученное в упр. 1. По умолчанию считается, что материал из которого выполнен создаваемый цилиндр –является вакуумом.

4) Задать диапазон частот (**Solve->Frequency** или ), в котором будем искать решения задачи на собственные значения. Для этого необходимо воспользоваться результатами, полученными в упр.1. Удобно задать диапазон от 4 до 6 ГГц.

5) Указать граничные условия (**Solve->Boundary Conditions** или ). Условие electric (Et=0) соответствует заданию металлической поверхности, при этом электрическая компонента э/м поля содержит только составляющую, направленную по нормали к границе.

6) Определить материал стенок исследуемого объекта (**Solve->Background material** или ). При решении краевой задачи методом Крылова предполагается, что стенки резонатора идеально проводящие $\sigma = \infty$, поэтому необходимо выбрать Material type: PEC (Perfect Electric Conductor).

7) Задать сетку разбиения исследуемого объекта. Для её просмотра необходимо переключиться в режим сетки (**Mesh->Mesh View** или ). Визуализация сетки производится путем выбора интересующего сечения (**Mesh->X/Y/Z plane Normal; Increment/Decrement Index**). Параметры ячеек сетки определяются в меню свойств (**Mesh->Global Mesh Properties** или ). Количество линий на длину волны (Lines per wavelength), рассчитываемое по наибольшему значению частоты рассматриваемого диапазона, определяет минимальное количество линий сетки по каждому из координатных направлений. Варьируя перечисленные параметры, можно сгущать линии сетки или делать их более разреженными. Количество ячеек сетки отображается в поле Meshcells диалогового окна Mesh Properties () , а также в нижнем правом углу в соответствующем поле (Meshcells=xxxxx) статусной строки. Для более точного анализа необходимо выбрать как можно более мелкий размер ячеек, однако, это приводит к увеличению времени счета. Рекомендуется выбрать количество ячеек разбиения от 100 до 200 тысяч *.

8) Запустить подпрограмму решения задач на собственные значения Eigenmode solver:  , указав в поле Method: AKS, количество мод – не менее 5.

Обработка полученных результатов

9) Из навигационного дерева результатов выбрать интересующие векторные поля электрических и магнитных компонент исследуемых мод (**2D/3D Results->Modes->Mode 1-5->e,h**). Возможна визуализация линий равного уровня выбранной векторной компоненты поля при открытии соответствующей папки дерева результатов **2D/3D Results->Modes->Mode 1-5->e,h->X,Y,Z,Abs,Normal,Tangential**. Для удобства рекомендуется

* ПК на базе Celeron Mobile 1.5 ГГц с 1 Гб ОЗУ затрачивает 10 мин для решения задачи с 135 тыс. ячеек сетки

использовать функцию отображения поля в интересующем сечении (**Results->3D Fields on 2D Plane**), а также функции вращения, сдвига и увеличения исследуемого объекта (**View->Mode->Rotate,Pan,Zoom**). Диалог изменения свойств отображаемых результатов (**Results->Plot Properties**) позволяет менять фазу моды, размер и количество отображаемых векторов, плоскость, в которой исследуются поля.

При выполнении упражнения необходимо схематически зарисовать векторные поля электрической и магнитной компонент каждой из исследуемых мод. Также желательно сохранить картины полей на флеш-диск, используя PrintScreen или встроенную подпрограмму (макрос) **Macros->Graphics->Save Image**.

10) Собственные частоты исследуемых мод отображаются на экране результатов при выборе интересующей компоненты моды в поле Frequency, а также в пункте меню **Results->View Logfiles-Solver Logfile**. Их необходимо занести в таблицу отчета.






11) Используя встроенные в CST MS макросы рассчитать собственные добротности Q_0 , считая, что стенки резонатора выполнены из материала с эффективной проводимостью $\sigma_{эфф} = 1.5 \cdot 10^5 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$. Для этого, открыв пункт меню **Results->Loss and Q calculation** и выбрав из списка интересующую моду, получим значение собственное значение добротности. В подпрограмме использована методика, описываемая (9), (10), (12).

Material/Solid	Conductivity	Mue	Loss/W(peak)	Loss/%	Q
***Cond. Enclosure**	1.5600e+007	1	6.9573e+006	100	8.2880e+003
***Sum**			6.9573e+006		8.2880e+003

Отметим, что в CST реализована возможность расчета толщины скин-слоя d по формуле (11). Использование макроса (**Macros->Calculate->Calculate Skin-Depth and Surface Roughness**) позволит проверить величину толщины скин-слоя, полученную в упражнении 1.

Занести полученные значения собственных добротностей в таблицу отчета.

Упражнение 3. Экспериментальное исследование низших мод цилиндрического резонатора.

- 1) Включить прибор, нажав на передней панели кнопку STANDBY 
- 2) Выбрать режим однопортовых измерений S11 кнопкой 
- 3) Подключить коаксиальный соединительный кабель к выбранному порту векторного анализатора (подключение выполняет преподаватель).
- 4) Загрузить параметры калибровки для данного кабеля (выполняется преподавателем).
- 5) Кнопками ,  задать диапазон частот от 4 до 6 ГГц с шагом 1 МГц.
- 6) Подключить возбуждающий элемент связи типа штырь.
- 7) Поместить до указанной отметки возбуждающий элемент типа штырь в отверстие торцевой крышки резонатора с длиной $l=40$ мм («короткий»).
- 8) Снять зависимость коэффициента отражения от частоты $\Gamma(f)$ в выбранном диапазоне. Клавишей  установить линейный масштаб коэффициента отражения **Lin Mag**.
- 9) Сохранить полученную зависимость на USB флеш диск, выданный преподавателем. **ВАЖНО! НЕ ИСПОЛЬЗОВАТЬ ЛИЧНЫЕ НОСИТЕЛИ ВО ИЗБЕЖАНИЕ ЗАРАЖЕНИЯ АППАРАТУРЫ ВРЕДНОСНЫМИ ПРОГРАММАМИ.**
- 10) С помощью функций маркера определить резонансные частоты исследуемой структуры и занести их в таблицу отчета
- 11) Подсоединить возбуждающий элемент типа петля и, поместив его в торцевой порт резонатора, повторить измерения п. 7-10. Для получения максимального количества и глубины резонансов рекомендуется вращать петлю в отверстии резонатора.

- 12) Повторить упражнение 3 для резонатора с длиной $l=65\text{мм}$ («длинный»).

Обработка результатов эксперимента

- 13) Зная значение модуля коэффициента отражения $\Gamma(f_0)$ на резонансной частоте выбранного типа колебаний, определить коэффициент β по формуле (19).
- 14) Для выбранного типа колебаний вблизи резонансной частоты в полосе, определяемой (21), построить зависимость функции $Y(f) = \frac{(\beta-1)^2 - (\beta+1)^2 \cdot \Gamma(f)^2}{(\Gamma(f)^2 - 1)}$ от квадрата расстройки $X(f) = \xi(f)^2$
- 15) Определить коэффициент наклона прямой $Y(X)$, определяющий квадрат собственной добротности Q_o^2 . Указать точность определения.
- 16) Занести значение собственной добротности выбранного типа колебаний в таблицу отчета.
- 17) Повторить пп. 13-16 для оставшихся резонансных пиков.

В результате выполнения работы для четырех первых мод цилиндрического резонатора должны быть получены

1) аналитические значения собственных частот и собственных добротностей

2) теоретические значения собственных частот и собственных добротностей, картины распределения электромагнитного поля, рассчитанные в результате моделирования.

3) экспериментальные зависимости модуля коэффициента отражения от частоты $\Gamma(f)^{**}$, экспериментальные значения резонансных частот и собственных добротностей

** Требуется получить 3 зависимости: 2 для «короткого» резонатора, возбуждая петлей и штырем через торцевую крышку и 1 для «длинного» резонатора, возбуждая штырем через верхнюю крышку.

Приложение 1.

Таблица 1. Корни ν_{mn} функции Бесселя порядка n

$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}$	0	1	2
1	2,405	3,832	5,135
2	5,520	7,016	8,417

Таблица 2. Корни χ_{mn} производной функции Бесселя порядка n

$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}$	0	1	2
1	3,832	1,840	3,054
2	7,016	5,335	6,705

Приложение 2.

Содержание таблицы отчета

	Аналитическая теория	Моделирование	Эксперимент
i) мода E_{mnp} (H_{mnp})			
Частота f, ГГц			
Собственная добротность Q_0			

Список литературы

1. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. // Теория волн. М., Наука, 1990.
2. Карлинер М.М. // Электродинамика СВЧ. Новосибирск, Изд. НГУ, 1999.
3. Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцов А.Д. // Техническая электродинамика. М., Радио и связь, 2000.
4. Григорьев А.Д. Электродинамика и техника СВЧ, Москва, Высшая школа, 1990.
5. Будаков Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике, изд.3, Москва 1979 г., стр 140,645
6. Ширман Я.Д. Радиоволноводы и объемные резонаторы. – М.: Связьиздат, – 1959.
7. Шабунин С.Н., Соловьянова И.П. Волноводы и объемные резонаторы: Методические указания по курсу “Электродинамика и распространение радиоволн”. Екатеринбург: УГТУ, 1998.
8. M. Clemens, T. Weiland, “Discrete electromagnetism with the finite integration technique,” Progress In Electromagnetics Research, PIER 32, pp. 65–87, 2001.
9. CST Microwave Studio® CST GmbH, Darmstadt, Germany, www.cst.com.
10. Rohde&Schwarz, Germany, www.rohde-schwarz.com