1 Волновые пучки в свободном пространстве

Рассмотрим распространение коллимированного пучка как волновой процесс, который может быть описан или на основе системы уравнений Максвелла для электрической и магнитной составляющих электромагнитного поля или уравнения Гельмгольца для векторной волновой функции $\vec{\psi}(\vec{r},t)$.

Запишем исходную систему уравнений Максвелла:

$$rot\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \tag{1}$$

$$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{2}$$

$$div\vec{D} = 0, \tag{3}$$

$$div\vec{B} = 0 \tag{4}$$

и уравнение Гельмгольца:

$$\nabla^2\vec{\psi} + k^2\vec{\psi} = 0, \tag{5}$$

здесь $k^2 = \omega^2/\upsilon^2$, ω - частота монохроматического излучения, υ - фазовая скорость в среде.

Поскольку угловая апертура сигнального оптического пучка должна быть минимальна настолько, насколько позволит дифракционный предел, анализ выполним в параксиальном (приосевом) приближении. Пусть электромагнитное поле распространяется вдоль направления z, в поперечном направлении амплитуда электрической составляющей поля отлична от нуля в приосевой области и быстро убывает на значимых расстояниях от оси. Представим любую из компонент электромагнитного поля в виде $\vec{F}(x,y,z)e^{-i\omega t+ikz}$, где $\vec{F}(x,y,z)$ – медленно меняющаяся с ростом z комплексная функция.

Подставляя это произведение в уравнение Гельмгольца (5) и учитывая относительную малость вариации комплексной амплитуды вдоль направления распространения по сравнению с поперечными направлением:

$$\frac{\partial^2\vec{F}(x,y,z)}{\partial z^2} \ll k\frac{\partial\vec{F}(x,y,z)}{\partial z}$$

получим:

$$\frac{\partial^2\vec{F}(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{F}(x,y,z)}{\partial y^2} + 2ik\frac{\partial\vec{F}(x,y,z)}{\partial z} = 0. \tag{6}$$

Уравнение параболического типа (6) было впервые предложено Леонтовичем и Фоком для анализа направленного распространения электромагнитных волн. Традиционно в анализе задач распространения используется скалярное параболическое приближение с экстраполяцией интерпретации результатов для одной из линейно-поляризованных комопнент распространяющегося пучка. Подобный подход сопровождается рядом систематических упущений, неисправимых для сложно или неоднородно поляризованных пучков.

1.1 Плоско-поляризованный пучок

Строгий анализ уравнения Леонтовича-Фока (6) в векторном приближении выполним для плоско-поляризованного пучка, распространяющегося вдоль оси z и поляризованного в плоскости (x, z):

$$E_x = F_x(x,y,z)e^{-i\omega t+ikz}, \quad E_y = 0, \quad E_z = F_z(x,y,z)e^{-i\omega t+ikz}, \tag{7}$$

где $F_x(x,y,z)$, $F_z(x,y,z)$ – функции, медленно меняющиеся с изменением z.

Уравнение Максвелла для циркуляции напряженности электрической компоненты представим следующим образом:

$$\begin{aligned}
&H_x = -\frac{i}{\omega\mu}\frac{\partial F_z(x,y,z)}{\partial y}e^{-i\omega t+ikz}, \\
&H_y = -\frac{i}{\omega\mu}\left(ikF_x(x,y,z) - \frac{\partial F_x(x,y,z)}{\partial z} + \frac{\partial F_z(x,y,z)}{\partial x}\right)e^{-i\omega t+ikz}, \\
&H_z = -\frac{i}{\omega\mu}\frac{\partial F_x(x,y,z)}{\partial y}e^{-i\omega t+ikz}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Условие для потока вектора напряженности электрического поля в среде без свободных носителей заряда $div\vec{E} = 0$ запишем через функции $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$:

$$\frac{\partial F_x(x,y,z)}{\partial x} + ikF_z(x,y,z) + \frac{\partial F_z(x,y,z)}{\partial z} = 0. \tag{9}$$

Для исключения одной из функций в уравнении (9) подставим выражения для H_y и H_z в уравнение Максвелла для x-компоненты $rot\vec{H} = \dfrac{i\omega\mu}{c}\vec{E}$, и получим промежуточное уравнение:

$$-\frac{i}{\omega\mu}\frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + k^2F_x + 2ik\frac{\partial F_x}{\partial z} - ik\frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{i\omega\varepsilon}{c^2}F_x. \tag{10}$$

Поскольку в параксиальном приближении справедливо $\left|\dfrac{\partial^2 F_x}{\partial z^2}\right| \ll |k^2 f_x|$, после комбинации двух уравнений (9) и (10) получим окончательно для медленно меняющейся функции E_x:

$$\frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} - k^2 F_x + 2ik\frac{\partial F_x}{\partial z} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} = \frac{\omega^2 \varepsilon \mu}{c^2} F_x. \tag{11}$$

После очевидной замены $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu / c^2$ получим:

$$\frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + 2ik\frac{\partial F_x}{\partial z} = 0. \tag{12}$$

Для продольной компоненты электрической составляющей электромагнитного поля можно получить аналогичное уравние:

$$\frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} + 2ik\frac{\partial F_z}{\partial z} = 0. \tag{13}$$

Поскольку продольная и поперечная компоненты электрической компоненты связаны уравнением (9), можно утверждать, что любое изменение пространственного распределения амплитуды линейно поляризованной волны (именно этот случай мы обсуждаем) сопровождается возникновением продольной компоненты согласно правилу:

$$F_z = -e^{-ikz} \int \frac{\partial F_x}{\partial x} e^{ikz} dz. \tag{14}$$

В рассматриваемом масштабе $k \gg 1$ и при вычислении интеграла в правой части (14) получим:

$$F_z = -e^{-ikz} \frac{\partial F_x}{\partial x} \frac{e^{ikz}}{ik} dz + e^{-ikz} \int \frac{e^{ikz}}{ik} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} \right) dz \approx -\frac{1}{ik} \frac{\partial F_x}{\partial x}. \tag{15}$$

Векторное описание произвольного плоскополяризованного параксиального поля имеет вид:

$$E_x = F_x(x, y, l), \quad E_y = 0, \quad E_l = \frac{1}{ik} \frac{\partial F_x}{\partial x}. \tag{16}$$

Например, для гауссова пучка с профилем распределения амплитуды электрической компоненты электромагнитного поля в направлении поляризации (не в плоскости, поскольку к этой-же плоскости относится и продольная компонента) справедливо:

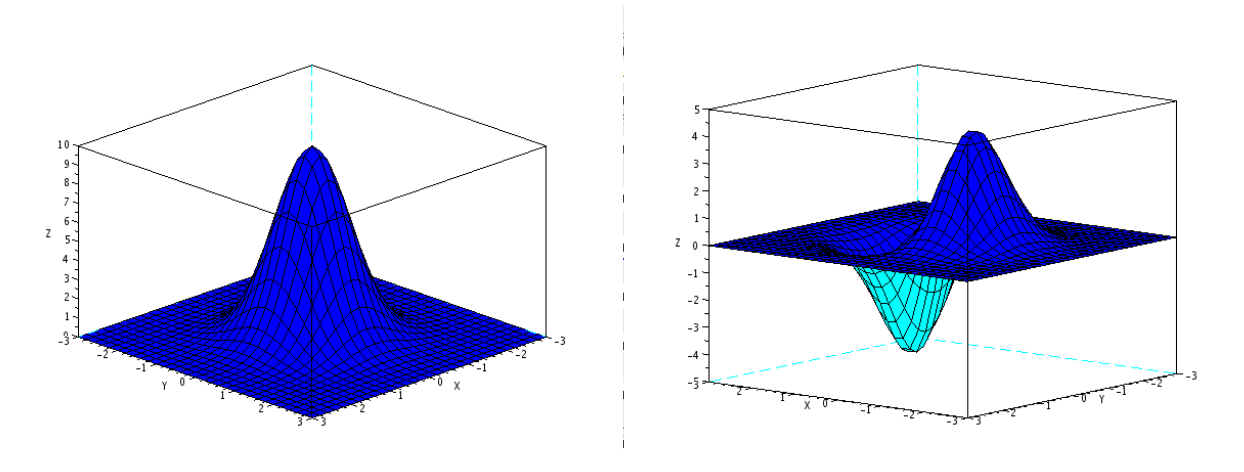
$$E_x(x,y,0) = exp\left(-\frac{x^2+y^2}{\varrho^2}\right)e^{-i\omega t+ikz},$$

$$E_y(x,y,0) = 0, \tag{17}$$

$$E_z(x,y,0) = -\frac{2ix}{k\varrho^2}exp\left(-\frac{x^2+y^2}{\varrho^2}\right)e^{-i\omega t+ikz}$$

здесь ϱ - полуширина гауссового пучка.

Пространственные профили поперечной и продольной компонент амплитуды напряженности электрического поля гауссова пучка представлены на Рис.1.



a) b)

Рис. 1: Профиль поперечной (левый рисунок) и продольной (правый рисунок) компонент электрической составляющей электромагнитного поля плоско поляризованного гауссова пучка

Наличие двух компонент электромагнитного поля сигнального оптического пучка принципиально для важного в пространственных кодовых структурах свойства структурной устойчивости, нереализуемой в скалярном приближении анализа распространения электромагнитных возмущений. Предложенные рассуждения разграничивают понятия линейно-поляризованной волны с постоянным значением амплитуды в поперечном направлении (фактически плоской волны) –

$$\frac{\partial F_x(x,y,z)}{\partial x} \equiv 0$$

и плоско-поляризованной волны –

$$\frac{\partial F_x(x,y,z)}{\partial x} \neq 0$$

для электромагнитных сигналов со сложной диаграммой направленности и распределением интенсивности. Вопрос о направлении вектора Умова-Пойнтинга, потока импульса и потока момента импульса будем обсуждать позднее, после анализа свойств структурной устойчивости сигнального пучка.

1.2 Обобщенный принцип Гюйгенса-Френеля

Анализ пространственной структуры распространяющегося сигнального пучка при проектировании приемопередающих устройств будем проводить, опииряаясь на три наблюдаемых и регистрируемых в экспериментах характеристики:

– интенсивность $I(x, y, z) = F(x, y, z)F^*(x, y, z)$,

– фазовый набег $\phi(x, y, z) = argF(x, y, z)$,

– комплексную амплитуду - $F(x, y, z) = \sqrt{I(x, y, z)}exp\,(i\phi(x, y, z))$.

При анализе анизотропных сред фазовый набег для компонент поля с различной поляризацией должен отличаться, порождая рассогласование фазовых набегов как обеих поперечных, так и продольной компонент.

Получим эволюционное уравнение для комплексной амплитуды пучка используя уравнение Леонтовича-Фока и двумерное пространственное спектральное разложение комплексной амплитуды. Используем базис плоских волн:

$$F(x, y, z) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} exp(ik(\xi x + \eta y))A(\xi, \eta, z)d\xi d\eta \tag{18}$$

здесь $A(\xi, \eta, z)$ – диаграмма направленности волнового пучка или его угловой спектр.

Для диаграммы направленности справедливо уравнение, получаемое подстановкой (18) в уравнение Леонтовича-Фока:

$$\left[2ik\frac{\partial}{\partial t} - k^2(\xi^2 + \eta^2)\right] A(\xi, \eta, z) = 0. \tag{19}$$

В оптически однородной среде ($k = Const$) решение уравнения (19) имеет вид:

$$A(\xi, \eta, z) = A(\xi, \eta, 0)exp\left(-\frac{ikz}{2}(\xi^2 + \eta^2)\right). \tag{20}$$

Фактически записанное равенство эквивалентно принципу Гюйгенса-Френеля.

На основе закона преобразования диаграммы направленности пучка в оптически однородной среде получим закон для преобразования комплексной амплитуды поля. Определим начальное распределение амплитуды в плоскости $z = 0$ и его связь с начальной формой диаграммы направленности:

$$F(x, y, 0) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} exp(ik(\xi x + \eta y))A(\xi, \eta, 0)d\xi d\eta, \tag{21}$$

и выполним обратное отображение

$$A(\xi, \eta, 0) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \iint\limits_{\mathbb{R}^2} exp(-ik(\xi x + \eta y))F(x, y, 0)dxdy.$$

Выполнив необходимые подстановки и перегруппировав множители, получим интегральное уравнение для комплексной амплитуды:

$$F(x, y, z) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \iint\limits_{\mathbb{R}^2} F(x_1, y_1, 0)dx_1dy_1 \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{ik[\xi(x-x_1)+\eta(y-y_1)]-\frac{ikz}{2}(\xi^2+\eta^2)}d\xi d\eta. \tag{22}$$

Используя табличное значение вложенного интеграла окончательно получим:

$$F(x, y, z) = \left(\frac{k}{i2\pi z}\right) \iint\limits_{\mathbb{R}^2} F(x_1, y_1, 0)e^{\frac{ik}{2z}[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2]}dx_1dy_1. \tag{23}$$

В литературе выражение (22) называют обобщенным принципом Гюйгенса-Френеля, вводя помимо прямого отображения (22) обратное ему, позволяющее определить структуру исходной комплексной амплитуды по регистрируемой где либо с необходимой для обратного интегрального преобразования точностью.