6 Бездифракционные оптические пучки

Бездифракционый режим распространения пучка фактически означает сохранение пространственных амплитудной и фазовой структур пучка на конечных или полубесконечных трассах. Основное внимание при анализе бездифракционных режимов, как правило, уделяется возможности при осевой локализации основной доли переносимой пучком энергии. Исследованы несколько видов бездифракционных режимов, каждый из которых удовлетворяет условиям на угловой спектр, апертуру и переносимую энергию. В таблице 6.2 перечислены наиболее часто обсуждаемые виды решений, применяемые при создании оптических микроманипуляторов и иных устройств, требующих бездифракционных свойств пучка.

Таблица 6.1: Соответствие геометрии и типа бездифракционных пучков

Геометрия	**Бездифракционные пучки**
Декатрова	Косинусоидальные пучки
Цилиндрическая	Бесселевы пучки
Эллиптическая	пучки Матье
Параболическая	пучки Вебера

Самыми известными среди бездифракционных пучков являются моды Бесселя – решение уравнения Гельмгольца в цилиндрических координатах. При изменении профиля рефракционных характеристик среды или требований симметрии решений могут требоваться эллиптические координаты, для которых собственные решения имеют вид функций Матье или параболические координаты, до-

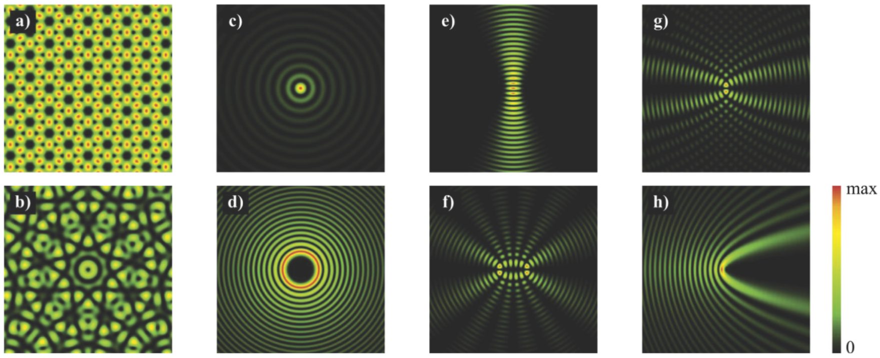

Рис. 6.1: Амплитудные распределения бездифракционных пучков; Косинусоидальные пучки: (a) ячеистый пучок, (b) девятикомпонентный пучок; пучки Бессель-Гаусса: (c) нулевого порядка, (d) десятого порядка; пучки Матье: (e) нулевого порядка четный и нечетный, (f) шестого порядка четный и нечетный; пучки Вебера: (g) симметричный, (h) неограниченный.

пускающие решения в виде пучков Вебера. Все типы бездифракционных пучков можно объединить в бездифракционный класс решений уравнения Гельмгольца, энергетически ограниченные пучки составят подкласс Гельмгольца-Гаусса. "Строгий" бездифракционный режим, исключающий гауссову модуляцию профиля, требует бесконечно широкой апертуры пучка и, соответственно – бесконечной переносимой энергии. Любое ограничение апертуры приводит к ограничению протяженности бездифракционной зоны.

6.1 Угловой спектр бездифракционных пучков

Идеальные бездифракционные пучки должны иметь бесконечную апертуру, угловой спектр подобных пучков относительно узок и стремится в пределе к дельта-функции. Рассмотрим произвольный пучок с комплексной амплитудой $F(x, y, z)$, распространяющийся в непоглощающей и нерассеивающей среде. Пусть в сечении $z = 0$ пучок описывается распределением комплексной амплитуды $F_0(x_0, y_0, 0)$.

Выполним разложение исходного профиля по плоским волнам:

$$\Phi_0(k_x,k_y,k_z)=\iint\limits_{\mathbb{R}^2} F_0(x_0,y_0,0)exp\left(iz\sqrt{k^2-(k_x^2+k_y^2)}\right)* \\ *exp[-ik_xx_0-ik_yy_0]dx_0dy_0. \tag{6.1}$$

Пусть угловой спектр исходного пучка имеет кольцевую структуру и в разложении (6.1) присутствуют только волны, компоненты углов наклона которых удовлетворяют условию:

$$k_x^2+k_y^2=k_R^2.$$

Комплексная амплитуда распространяющегося пучка с кольцевым угловым спектром сохраняется в процессе распространения (дополнительный фазовый набег переходит в фазовый множитель описания структуры поля). Действительно, выполним обратное Фурье-отображение (6.1):

$$F^R(x,y,z)=exp\left(iz\sqrt{k^2-k_R^2}\right)\iint\limits_{\mathbb{R}^2} F_0(x_0,y_0,0)* \\ *\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{[-ik_x(x_0-x)-ik_y(y_0-y)]}dk_xdk_ydx_0dy_0, \tag{6.2}$$

после интегрирования по угловым проекциям получим произведение двух δ-функций от разности координат,

$$F^R(x,y,z)=exp\left(iz\sqrt{k^2-k_R^2}\right)F_0^R(x,y,0).$$

Накладываемые апертурные ограничения на формируемый пучок приведут к расплыванию кольца угловых компонент волнового вектора. Согласно принципу неопределенности, ширина "размытия" кольца допустимых спектральных значений обратно пропорциональна линейным размерам апертуры A. Определим дисперсию значений поперечных компонент волнового вектора $\sigma_R(A) = \pi/A$ и сформулируем условие относительной малости дополнительного фазового набега за счет уширения углового спектра:

$$L_{max}\left[\sqrt{k^2-k_R^2}-\sqrt{k^2-(k_R+\sigma_R(A))^2}\right] \ll 2\pi,$$

или

$$L_{max} \ll \frac{k}{k_R}A.$$

Интервал расстояний от "источника" $[0, L_{max}]$ можно называть квазибездифракционным с позиции влияния дополнительного фазового набега на распределение поля пучка.

Ряд задач формирования и распространения квазибездифракционных пучков удобно рассматривать в полярной системе координат. Определим компоненты волнового вектора и преобразование дифференциалов в полярной системе следующим образом:

$$k_x = k_r\cos\theta, \quad k_y = k_r\sin\theta,$$

$$dk_x dk_y \Rightarrow k_r dk_r d\theta, \quad dxdy \Rightarrow rdrd\theta$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

В таких переменных произвольное бездифракционное поле, сформированное на базе кольцевого спектра $k_r = k_R$ может быть записано в форме интеграла Уиттекера:

$$F^R(x,y,z) = exp\left(iz\sqrt{k^2-k_R^2}\right)\int_0^{2\pi}\Phi(\theta)exp[ik_R(x\cos\theta+y\sin\theta)]d\theta. \tag{6.3}$$

Введение апертурных ограничений и возможной ориентационной неоднородности углового спектра можно записать в виде произведения двух независимых функций - радиальной $R(k_r - k_R)$ и азимутальной $T(\theta)$:

$$\Phi(k_r,\theta) = R(k_r-k_R)T(\theta).$$

Простейшая экспериментальная схема синтеза квазибездифракционного пучка на базе первичного кольцевого распределения представлена на Рис.6.2. В задней фокальной плоскости линзы создается кольцевое распределение поля, соответственно в передней фокальной плоскости формируется бездифракционная структура согласно (6.3). Глубина бездифракционного распространения L_{max} определяется апертурой линзы, но не линейными размерами первичного кольца.

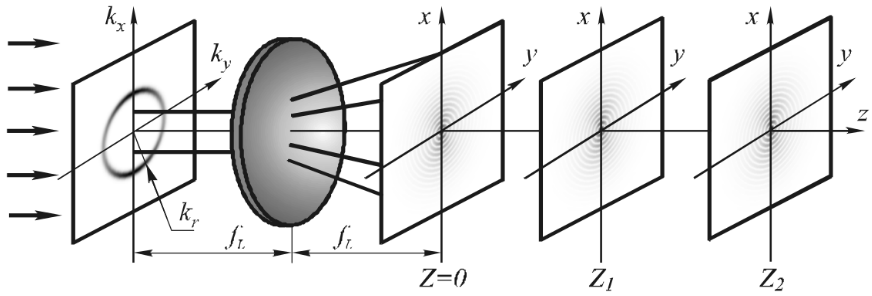

Рис. 6.2: Простейшая схема синтеза квадибездифракционного пучка

Формально изображенная на рисунке кольцевая щель имеет низкую энергетическую эффективность при создании начальных угловых кольцевых распределений. В зависимости от требуемой интенсивности при осевой зоны, длины бездифракционного распространения и термостойкости для синтеза пучков используют аксиконы и дифракционные оптические элементы.

6.2 Косинусоидальные пучки и пучки Бессель-Гаусса

Рассмотрим монохроматический пучок, распространяющийся вдоль оси z в бездифракционном приближении. Для упрощения аналитических преобразований будем полагать распределение интенсивности в плоскости $[x, y]$ центросимметричным. Электрическая компонента электромагнитного поля пучка $\vec{E}(x, y, z, t)$ подчиняется волновому уравнению:

$$\Delta\vec{E}(x, y, z, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}(x, y, z, t) = 0. \tag{6.4}$$

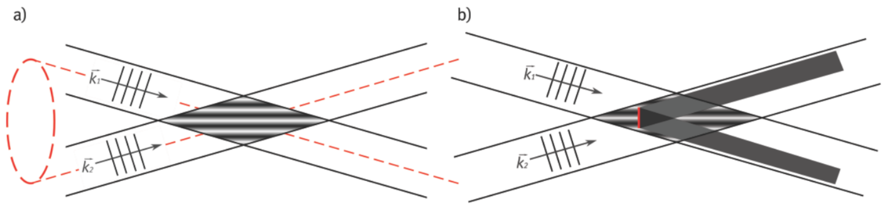

Рис. 6.3: Синтез недифрагирующего косинусоидального пучка как суперпозиции двух плоских волн - "a" . Иллюстрация процесса самовосстановления пучка после препятствия - "b"

В декартовых координатах решение уравнения (6.4) имеет вид совокупности плоских волн, простейшая суперпозиция которых формирует косинусоидальные пучки, как это показано на Рис.6.3. В зависимости от числа волновых компонент и угла наклона в зоне интерференции парциальных волн могут синтезироваться распределения интенсивности различных порядков осевой симметрии.

Перейдем к цилиндрической системе координат и преобразуем выражение для электрической компоненты поля волны с учетом осевой симметрии и запретом изменения амплитуды в процессе распространения:

$$\vec{E}(x,y,z,t) \Rightarrow \vec{E}(r,\varphi,z,t) = \vec{A}(r)exp(im\varphi + ik_z z - i\omega t),$$

$$\frac{d^2A(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dA(r)}{dr} + \left(k_r^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)A(r) = 0. \tag{6.5}$$

здесь k_r и k_z - поперечная и продольная компоненты волнового вектора, удовлетворяющие условию $k_r^2 + k_z^2 = \omega^2/c^2$. Если каждая из компонент волнового вектора действительна (в среде отсутствуют поглощение и рассеяние), профиль пучка, сформированный в сечении $z = 0$ сохраняется в любом другом сечении. Собственными функциями уравнения (6.5), соответствующими собственным значениям $m = 1, \pm 1, \pm 2 \ldots$ являются функции Бесселя первого рода:

$$E(r,\varphi,z,t) = J_m(k_r r)exp(im\varphi + ik_z z - i\omega t)$$

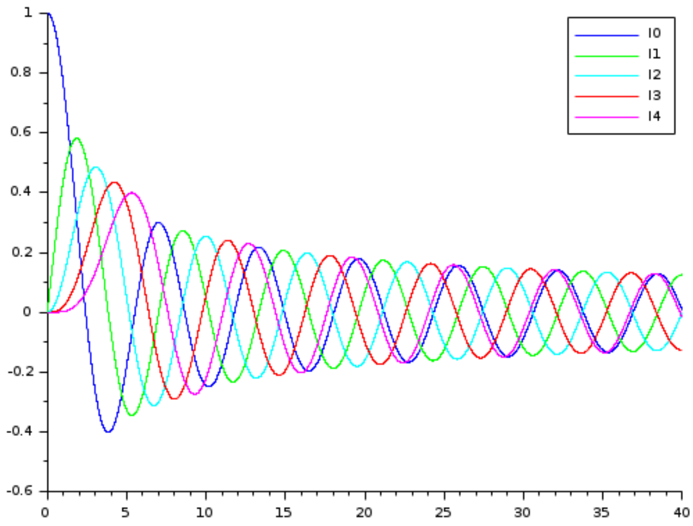

Рис. 6.4: Функции Бесселя для $m = 0, 1, 2, 3, 4$

Примеры зависимости функции Бесселя первого рода от координаты показаны на Рис.6.4. Как следует из свойств функций Бесселя, только $J_0(r)$, соответствующая $m = 0$, отлична от нуля на оси симметрии пучка и соответствует желаемому профилю с максимальной концентрацией интенсивности в центре пучка. Остальные собственные функции волнового уравнения в бездифракционном приближении описывают трубчатые пучки.

Интенсивность осесимметричного бездифракционного пучка убывает при удалении от оси по закону:

$$I(r, \varphi, z, t) \sim J_m^2(k_r r) \sim \frac{1}{k_r r},$$

соответственно каждое из "колец" переносит практически одно и то же значение энергии. Подобная структура пучка требует бесконечной энергии для своего бездифракционного воспроизведения при распространении. Неизбежное ограничение апертуры, эквивалентное гашению интенсивносности периферийных "колец" вызовет дифракционное расплывание распространяющегося пучка на расстояниях, больших некоего критического значения. Ниже будут анализироваться экспериментальные методы создания пучков Бесселя и ограничения длины бездифракционного распространения.

6.3 Пучки Матье

Переход от декартовой к эллиптической системе координат выполним следующим образом:

$$x = c\,\mathrm{ch}\,\eta \cos\xi,$$

$$y = c\,\mathrm{sh}\,\eta \sin\xi,$$

где $\eta \geqslant 0$, $\xi \in [0,\ 2\pi)$, c - параметр эксцентриситета эллипса.

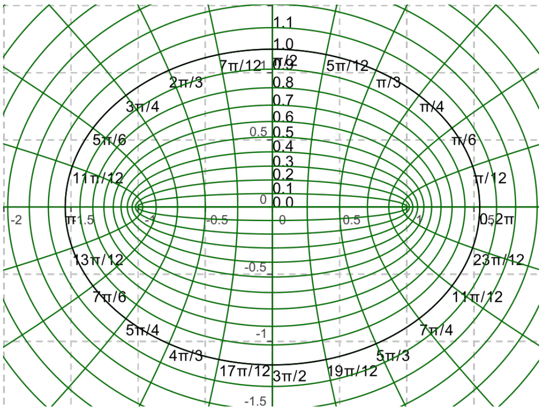

Рис. 6.5: Эллиптические координаты

Определим семейство конфокальных эллипсов и гипербол согласно тождествам:

$$\frac{x^2}{c^2\,\mathrm{ch}^2\,\eta} + \frac{y^2}{c^2\,\mathrm{sh}^2\,\eta} = \cos^2\xi + \sin^2\xi = 1$$

$$\frac{x^2}{c^2\cos^2\xi} - \frac{y^2}{c^2\sin^2\xi} = \mathrm{ch}^2\,\eta - \mathrm{sh}^2\,\eta = 1$$

откуда следует, что кривые $\xi = Const$ являются эллипсами, а кривые $\eta = Const$ являются гиперболами.

Уравнение Гельмгольца в эллиптических координатах может быть преобразовано к уравнению Матье от одной переменной следующего вида:

$$\frac{\partial^2 F(u)}{\partial u^2} + (a - 2qcos(2u))F(u) = 0,$$

где $q = c^2 k_\perp^2/4$. Уравнение Матье допускает разделение решений на два типа – четные и нечетные решения порядка m. Каждое из решений может быть представлено как произведение двух из четырех допустимых для заданного собственного значения m специальных функций Матье (Je_m, Jo_m, ce_m, se_m):

$$M_m^e(\mu, \xi, q, z) = C_m Je_m(\xi, q) ce_m(\eta, q) e^{ik_z z} e^{i\omega t}, \quad m = 0, 1, \ldots,$$

$$M_m^o(\mu, \xi, q, z) = S_m Jo_m(\xi, q) se_m(\eta, q) e^{ik_z z} e^{i\omega t}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

здесь η, ξ - эллиптические координаты, C_m, S_m - нормировочные множители. Профили амплитуды и фазы четных и нечетных решений представлены на Рис.6.6.

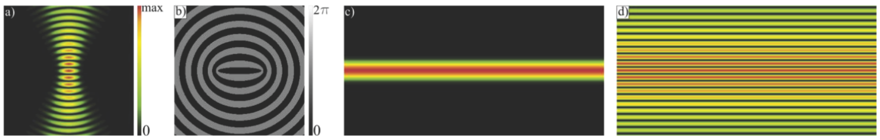

Рис. 6.6: Бездифракционный четный пучок Матье нулевого порядка: (a) – поперечное распределение интенсивности в плоскости (x,y), (b) – поперечная фаза, (c) – продольное распределение интенсивности в плоскости (x,z), (d) – продольное распределение интенсивности в плоскости (y,z)

Помимо четные и нечетных бездифракционных пучков Матье можно синтезировать геликоидные пучки Матье как суперпозицию четных и нечетных:

$$HM_m^{\pm}(\mu, \xi, q) = M_m^e(\mu, \xi, q) \pm i M_m^o(\mu, \xi, q), \quad m = 0, 1, 2, \ldots.$$

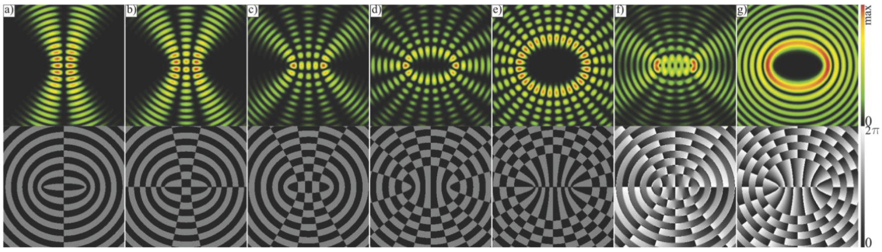

Рис. 6.7: Нормированная интенсивность (верхний ряд) и фаза (нижний рад) в поперечном сечении пучков Матье, формируемых в системе с q=27. (a) M_1^o, (b) M_2^e,(c) M_4^e, (d) M_9^o, (e) M_14^o, (f) HM_6^+, (g) HM_{12}^+

Отличие геликоидов Матье от четных- нечетных структур заключается в допустимых значениях фазы. Фаза геликоидов в поперечном сечении меняется в диапазоне $[0, 2\pi)$, фаза четных и нечетных пучков принимает только два допустимых значения - $0, \pi$. На Рис.6.7 представлены примеры различных типов пучков Матье, иллюстрирующие описанное свойство.

6.4 Синтез кольцевого спектра с помощью аксикона

Метод синтеза бездифракционного пучка с помощью аксикона был впервые предложен Я.Б. Зельдовичем в 1966 году и до настоящего времени является наиболее энергетически эффективным. Аксикон представляет собой тело вращение, образующее в главном сечении равнобедренный треугольник, падающий пучок в простейшем случае выбирается гауссовым с перетяжкой, расположенной на входной поверхности аксикона. Типичный ход лучей за аксиконом представлен на Рис.6.8.

Определим основные параметры синтезируемого пучка Гаусс-Бесселя – глубину бездифракционного распространения Z_{B0} и ширину центрального максимума d_0. Ширина центрального максимума обычно определяется между двумя узлами интенсивности (двумя нулями), которые расположены на окружности радиуса r, удовлетворяющего условию $k_r r \approx 2.4$. Глубина бездифракционного распространения зависит от апертуры аксикона и угла схождения лучей в зоне интерференции. Угол схождения также определяет поперечный размер центрального максимума. Пусть показатель преломления аксикона составляет n, угол при вершине α, волновой вектор k и дополнительный масштабный коэффициент κ, учитывающий различные доступные определения ширины центрального максимума.

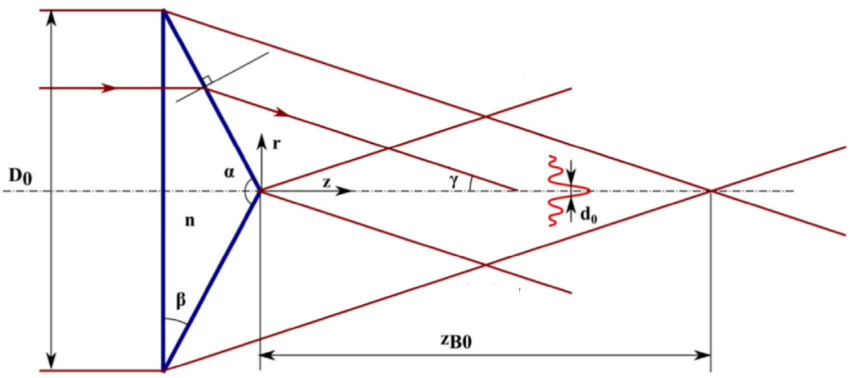

Рис. 6.8: Синтез квадибездифракционного пучка с помощью аксикона

Используя уравнения геометрической оптики, определим связь угла схождения интерферирующих волн и угла при вершине аксикона:

$$\gamma = \arcsin\left(n\cos\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2}$$

Линейный размер центрального максимума составит:

$$d_0 = \frac{2\kappa}{k_r} = \frac{2\kappa}{k\sin\gamma} \approx \frac{\kappa\lambda}{\pi(n-1)\cos(\alpha/2)}$$

при $\kappa = 2.4$ размер центрального максимума составляет от нескольких λ для углов при вершине менее 150^o до практически бесконечных значений при $\alpha \to 180^o$.

Максимальная длина бездифракционного распространения составит:

$$L_{max} = \frac{D_0}{2\,\mathrm{tg}\,\gamma} \approx \frac{\pi D_0}{2\kappa\lambda} d_0$$

Записанное выражение иллюстрирует различие между распространением Бессель-Гауссова пучка с конечной апертурой D_0 и диаметром центральной зоны d_0 и обычного Гауссова пучка с перетяжкой w_0. Протяженность фокусного пятна Гауссова пучка (Релеевская длина) квадратична по размеру перетяжки – $L_{Gauss} = \pi w_0^2/4\lambda$, Бессель-Гаусса – линейна.

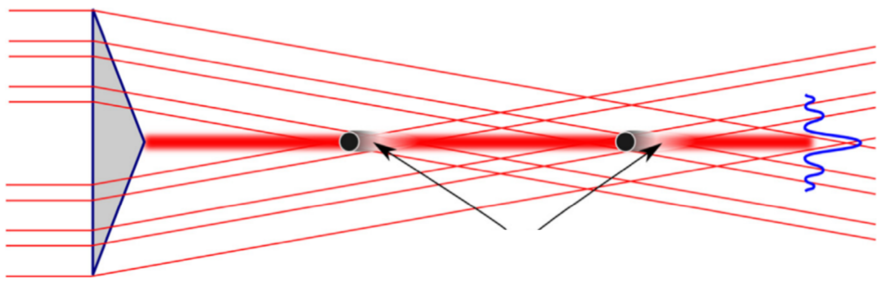

Рис. 6.9: Схема регенерации квазибездифракционного пучка

Важное физическое свойство любого бездифракционного пучка – способность к самовосстановлению после нарушения целостности препятствиями или рефракционными аномалиями, сравнимыми по линейным размерам с шириной центрального максимума. Самовосстановление объясняется соотношением конечной апертуры препятствия и практически неограниченной апертуры пучка совместно с бесконечной энергией, переносимой через заданное сечение.

Самовосстановление пучка не является аналогом рассматривавшейся ранее структурной устойчивости. Поддержание бездифракционного режима требует бесконечно большой мощности источника, максимально широкой апертуры и мало пригоден для задач оптической связи. В физических условиях совпадающей геометрии действующих потенциалов для структурно устойчивых параксиальных пучков и бездифракционных пучков решения уравнения Гельмгольца формируют собственные функции, из суперпозиции которых можно "собрать" бездифракционный пучок, соответствующий заданной геометрии. В таблице 6.2 перечислены соответствующие простейшим геометриям типы бездифракционных и структурно-устойчивых пучков.

Таблица 6.2: Соответствие геометрии и решений уравнения Гельмгольца

Геометрия	**Бездифракционные пучки**	**Структурно устойчивые пучки**
Декатрова	Косинусоидальные пучки	Эрмит-Гауссовы пучки
Цилиндрическая	Бесселевы пучки	Лагерр-Гауссовы пучки
Эллиптическая	пучки Матье	Эйнс-Гауссовы пучки
Параболическая	пучки Вебера	?????