5 Спиральные сигнальные пучки

Структурная устойчивость комплексной амплитуды пучка в параксиальном приближении может быть расширена ещё одним преобразованием – пространственной закруткой относительно оси распространения. Физически обоснована аналогия растяжения-сжатия при фокусировке-дефокусировке пучка и его "скручивания" в допустимых параксиальным приближениям направлениях при прохождении фазовых неоднородностей, порождающих в частном случае фазовые дислокации.

Вектор Умова-Пойнтинга описывается для параксиальных пучков двумя компонентами - "потоковой" и "вихревой". "Потоковая" достаточна для анализа процессов фокусировки-дефокусировки или поперечного растяжения-сжатия пучка. "Вихревая" компонента дополняет ещё одну степень свободы, движение в которой соответствует деформации кручения.

5.1 Комплексная амплитуда и фаза спиральных пучков

Рассмотрим общие условия структурной устойчивости относительно масштабных преобразований и вращения пучка. Условие для профиля интенсивности можно записать следующим образом:

$$I(x, y, z) = D(z) I_0 \left(\frac{x \cos\theta(z) - y \sin\theta(z)}{d(z)}, \frac{x \sin\theta(z) + y \cos\theta(z)}{d(z)} \right), \tag{5.1}$$

здесь $\theta(z)$ - угол поворота исходного профиля пучка на расстоянии z от начало отсчета, $d(z) \geq 0$ - пространственный масштаб, принимаемый одинаковым по обеим направлениям.

Введем новую пару координат, отслеживающих вращение и растяжение-сжатие профиля пучка:

$$X + iY = \frac{x + iy}{d(z)} e^{i\theta(z)}.$$

Условие сохранение энергии пучка независимо от выбора системы и масштаба координат позволяет определить связь между коэффициентами пространственного масштабирования $d(z)$ и масштабирования значений интенсивности $D(z)$:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} I(x, y, z) dx dy = D(z) d^2(z) \iint_{\mathbb{R}^2} I_0(X, Y) dX dY, \;\Rightarrow\; D(z) = \frac{1}{d^2(z)}.$$

Ранее, при анализе структурной устойчивости профиля интенсивности была использована система уравнений, получаемая из параболического уравнения Леонтовича-Фока:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(I\dfrac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(I\dfrac{\partial \phi}{\partial y}\right) + k\dfrac{\partial I}{\partial z} = 0, \\ 2I\left(\dfrac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 I}{\partial y^2}\right) - \left(\dfrac{\partial I}{\partial x}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial I}{\partial y}\right)^2 - 4I^2\left[\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial x}^2\right) + \left(\dfrac{\partial \phi}{\partial y}^2\right) + 2k\dfrac{\partial \phi}{\partial z}\right] = 0. \end{cases}$$

Подставим в эту систему уравнений требование к ротационной устойчивости (5.1) и запишем первое уравнение системы в координатах (X, Y, z):

$$\bigtriangledown\left(I_0 \bigtriangledown\left[\phi - \frac{1}{2}kd(z)d^{'}(z)(X^2 + Y^2)\right]\right) + k\theta^{'}(z)d^2(z)\left(X\frac{\partial I_0}{\partial Y} - Y\frac{\partial I_0}{\partial X}\right) = 0 \tag{5.2}$$

здесь оператор градиента профиля интенсивности также работает в системе координат $\{X, Y\}$ – $\bigtriangledown = \left(\dfrac{\partial}{\partial X}, \dfrac{\partial}{\partial Y}\right)$.

Определим фазовый множитель комплексной амплитуды пучка следующим образом:

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{2}kd(z)d^{'}(z)(X^2+Y^2) + \phi_0(X,Y,z)$$

следовательно комплексная амплитуда структурно-устойчивого пучка может быть записана в виде:

$$F(x,y,z) = \frac{1}{d(z)}\sqrt{I_0(X,Y)}exp\left(i\frac{1}{2}kd(z)d^{'}(z)(X^2+Y^2) + i\phi_0(X,Y,z)\right)$$

При выполнении условия Зоммерфельда на бесконечности, предыдущее выражение можно переписать так:

$$F(x,y,z) = \frac{1}{d(z)}F_0(X,Y)exp\left(i\frac{1}{2}kd(z)d^{'}(z)(X^2+Y^2) + i\gamma(z)\right), \tag{5.3}$$

отметим, что $F_0(X,Y) = \sqrt{I_0(X,Y)}exp(i\phi_0(X,Y,0))$ должна допускать аналитическое продолжение до целой функции второго порядка роста. Фактически запись (5.3) означает структурную устойчивость фазы спирального пучка при условии структурной устойчивости интенсивности.

Для коэффициентов преобразования масштабов и угла поворота исходного профиля, а также фазы пучка из решения системы уравнений следует:

$$d(z) = d_0\sqrt{1+\frac{4(z-z_0)^2}{k^2\rho^4}},$$

$$\theta(z) = \theta_0 \operatorname{arctg}\left(\frac{2(z-z_0)}{k\rho^2}\right) + \theta_1,$$

$$\gamma(z) = -\gamma_0 \operatorname{arctg}\left(\frac{2(z-z_0)}{k\rho^2}\right) + \gamma_1,$$

здесь $d_0, \theta_0, \gamma_0, \theta_1, \gamma_1, \rho$ - произвольные константы, определяемые в более конкретной постановке задачи.

Для определения допустимых параболическим уравнением собственных функций и собственных значений, подставим (5.3) в (5.2), получим уравнение для комплексной амплитуды:

$$\bigtriangledown^2 F_0 + 4i\theta_0 \left(X\frac{\partial F_0}{\partial Y} - Y\frac{\partial F_0}{\partial X} \right) - 4F_0(X^2 + Y^2 - \gamma_0) = 0 \qquad (5.4)$$

при записи уравнения выбраны значения $d_0 = 1, z_0 = \theta_1 = \gamma_1 = 0$.

Если исходная "закрутка"пучка отсутствует $\theta_0 = 0$, решением уравнения (5.4) будут полиномы Эрмит-Гаусса или Лагерр-Гаусса в зависимости от типа рассматриваемой симметрии со спектром собственных значений $\gamma_0^{HG} = n + m + 1, n, m = 0, 1, \dots$ или $\gamma_0^{LG} = n + |m| + 1, n, \pm m = 0, 1, \dots$.

5.2 Спиральные пучки в базисе Лагерр-Гаусса

Уравнение для комплексной амплитуды пучка (5.4) преобразуем к виду, разделяющему операторную – левую – часть и правую часть, содержащую в качестве множителя собственные значения:

$$\hat{H}F_0(X,Y) = \gamma_0 F_0(X,Y), \qquad (5.5)$$

$$\hat{H} \equiv \bigtriangledown^2 + 4i\theta_0 \left(X\frac{\partial}{\partial Y} - Y\frac{\partial}{\partial X} \right) - 4(X^2 + Y^2)$$

Для любого действительного значения θ_0 существует хотя-бы одно собственное значение и собственная функция. Поскольку рассматриваемая задача обладает осевой симметрией, набор собственных функций можно представить в базисе Лагерр-Гаусса:

$$F_0(X,Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{n,m} LG_{n,m}(X,Y).$$

После подстановки записанного разложения в уравнение (5.5) получим бесконечный набор тождеств, которые должны выполняться для каждой из Лагерр-Гауссовых компонент:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{n,m} LG_{n,m}(X,Y)(2n+|m|+\theta_0 m-\gamma_0+1)=0,$$

или

$$c_{n,m}(2n+|m|+\theta_0 m-\gamma_0+1)=0.$$

Поиск собственных значений сводится к определению пар квантовых чисел (n_0, m_0), удовлетворяющих условию:

$$2n+|m|+\theta_0 m=\gamma_0-1. \tag{5.6}$$

Разберем варианты значений (n_0, m_0) при различных условиях на масштаб "спиральности" пучка.

Пусть θ_0 – иррациональное число, при котором допустима только одна пара значений (n_0, m_0). Собственная функция в такой ситуации формально теряет зависимость от θ_0, поскольку исходная радиально-симметричная форма "не различает" направления вращения:

$$F(x,y,z)=\frac{1}{|\sigma(z)|}exp\left(\frac{2iz(x^2+y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2}-i(2n_0+|m_0|+1)arg\sigma\right)*$$

$$*LGn_0,m_0\left(\frac{x}{\rho|\sigma|},\frac{y}{\rho|\sigma|}\right).$$

здесь

$$\sigma=1+\frac{2iz}{k\rho^2}.$$

Если $\theta_0=0$, закручивание пучка отсутствует, а допустимые комбинации квантовых чисел определяются условием:

$$2n+|m|=N,\quad \gamma_0=N+1,\quad N=0,1,\ldots$$

здесь γ_0 - параметр начального фазового набега.

Комплексная амплитуда пучка с "замороженным вращением" может быть представлена в виде суперпозиции конечного числа (равного N) Лагерр-Гауссовых компонент:

$$F(x,y,z) = \frac{1}{|\sigma(z)|} exp\left(\frac{2iz(x^2+y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2} - i(N+1)arg\sigma\right) *$$

$$* \sum_{n=0}^{[N/2]} \left(c_n LG_{n,N-2n} + c_{-n} LG_{n,2n-N}\right).$$

для компактности представления в записи опущены аргументы функций Лагерр-Гаусса. Из записанного выражения следует правило отбора для допустимых типов комплексных функций невращающихся пучков. Структурно устойчивы будут лишь комплексные амплитуды, имеющие в перетяжке вид произведения гауссовой функции на набор полиномов с жестко ограниченными комбинациями собственных значений. Этот-же вывод можно было бы получить, выбрав в качестве базиса функции Эрмит-Гаусса или Эрмит-Лагерр-Гаусса.

Некоторые примеры структурно-устойчивых распределений представлены на Рис.5.1.

5.3 Пучки с целочисленным значением "спиральности"

Не обсуждая физические методы синтеза пучка с конкретным значением "спиральности" , характеризуемым параметром θ_0, рассмотрим два "зеркальных"варианта $\theta_0 = \pm 1$. Если $\theta_0 = -1$:

$$2n + |m| - m = 2N, \quad \gamma_0 = 2N + 1,$$

соответственно допустимый спектр собственных значений представляет собой объединение двух множеств:

$$\{(N,m); m \geq 0\} \cup \{(N+m,m); m = -1, -2, \ldots, -N\}.$$

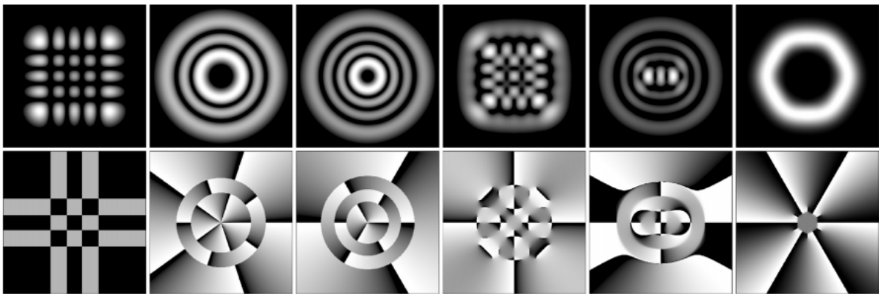

Рис. 5.1: Интенсивности (сверху) и фазы (снизу) структурно устойчивых пучков без вращения: (а)– $HG_{4,4}(x, y)$, (б) – $LG_{2,5}(x, y)$, (в) – $LG_{3,-3}(x, y)$, (г) – $HLG_{4,4}(x, y|\pi/10)$, (д) – $HLG_{5,3}(x, y|\pi/5)$, (е) – поле пучка при $N = 8$

Комплексная амплитуда при данных условиях на спектр собственных значений может быть представлена в виде:

$$F(x, y, z) = \frac{1}{|\sigma(z)|} exp \left(\frac{2iz(x^2 + y^2)}{k\rho^4 |\sigma|^2} - i(2N + 1) arg\sigma \right) *$$

$$* \left(\sum_{m=0}^{\infty} c_n LG_{N,m} + \sum_{m=1}^{N} c_{-m} LG_{N-m,-m} \right).$$

В частном случае $N = 0$ комплексную амплитуду преобразуем к формально более простому, а фактически – к более общему виду:

$$F(x, y, z) = \frac{1}{\sigma(z)} exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{\rho^2 \sigma(z)} \right) f \left(\frac{x + iy}{\rho\sigma(z)} \right).$$

Фукция $f(x, y, z)$ должна быть целой аналитической функцией, не нарушающей условия Зоммерфельда, сформулированные для комплексной амплитуды. Поскольку вращение пучка в процессе распространения описывается как:

$$\theta(z) = -\operatorname{arctg} \frac{2z}{k\rho^2}$$

измерение профиля интенсивности пучка при распространении выглядит как замедляющееся вращение. Подобное вращение наиболее выражено вблизи перетяжки пучка и практически угасает в дальней зоне наблюдения. Полный угол поворота профиля интенсивности относительно ориентации в перетяжке составит:

$$\theta(\infty) - \theta(0) = -\frac{\pi}{2}$$

Для случая $\theta_0 = 1$ проводим аналогичные рассуждения, определяя спектр собственных значений:

$$2n + |m| + m = 2N, \quad \gamma_0 = 2N + 1,$$

как объединение двух множеств:

$$\{(N, m); m \leq 0\} \cup \{(N - m, m); m = 1, 2, \ldots, N\}.$$

Снова ограничивая анализ значением $N = 0$, запишем для комплексной амплитуды:

$$F(x, y, z) = \frac{1}{\sigma(z)} exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\rho^2 \sigma(z)}\right) f\left(\frac{x - iy}{\rho \sigma(z)}\right).$$

В обоих случаях "единичной" спиральности полученные решения не требуют новых условий для функции $f(x, y, z)$, обязательно лишь сохранение квадратичной интегрируемости, эквивалентной сохранению переносимой пучком энергии.

5.4 Пучки с рациональным значением "спиральности"

Рациональное значение "спиральности" можно было бы считать самым общим случаем, включающим три обсуждавшихся ранее. Если для заданного значения θ_0 существуют по крайней мере две пары собственных значений (n_1, m_1) и (n_2, m_2), они должны быть связаны уравнением:

$$2n_1 + |m_1| + \theta_0 m_1 = 2n_2 + |m_2| + \theta_0 m_2.$$

Структурно устойчивое решение (собственная функция) в данном случае принимает вид:

$$F(x,y,z) = \frac{1}{|\sigma(z)|} exp\left(\frac{2iz(x^2+y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2} - i(2n_1 + |m_1| + \theta_0 m_1 + 1)arg\sigma\right) *$$

$$* \sum_{n,m} c_{n,m} LG_{n,m}.$$

В качестве примера рассмотрим доступный спектр собственных значений пучка со "спиральностью" $\theta_0 = -\frac{2}{5}$. Алгебраический анализ показывает, что существует два набора собственных значений – (0,9) и (2,-1). Спиральный пучок с выбранным параметром вращения представлен на Рис.5.2.

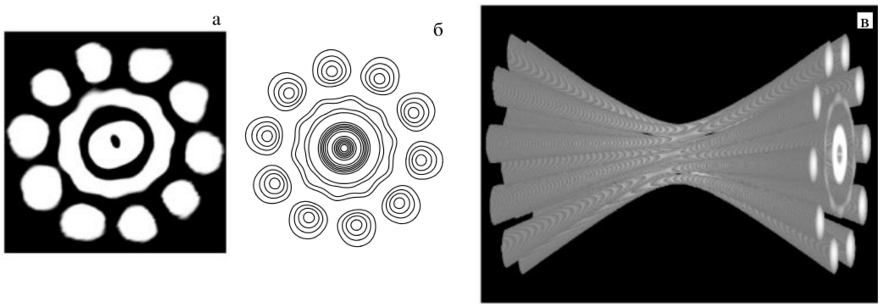

Рис. 5.2: Спиральный пучок с $\theta_0 = -\frac{2}{5}$. Слева – экспериментальная реализация, в центре – линии уровня $|LG_{0,9}(x,y) - 49iLG_{2,-1}(x,y)|^2$ и справа – фрагмент пространственного распространения спирального пучка в области перетяжки

При распространении пучка от области перетяжки до дальней зоны происходит поворот на угол:

$$\theta(\infty) - \theta(0) = \theta_0 \frac{\pi}{2} = -\frac{2\pi}{10}.$$

Спектр собственных значений не обязан быть конечным для рационального значения закрученности пучка. Например при $\theta_0 = -3$

спектр имеет неограниченное число значений:

$$\{(k.k); k \geq 0\}.$$

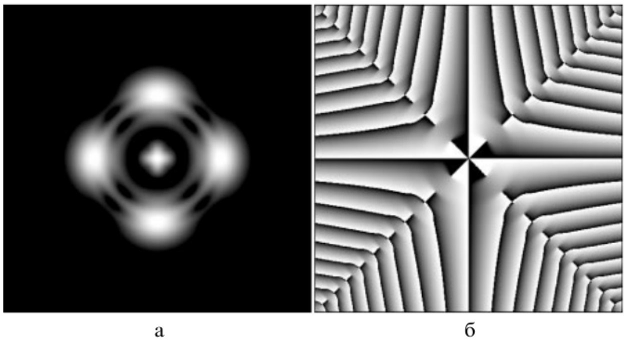

Рис. 5.3: Интенсивность (слева) и фаза (справа) спирального пучка со степенью "спиральности"$\theta_0 = -3$

Частный случай синтеза спирального пучка с требуемым значением $\theta_0 = -3$ из группы Бессель-Гауссовых пучков изображен на Рис.5.3.

Пусть в плоскости перетяжки $z = 0$ зафиксирована точка с координатами x_0, y_0. Её траектория при распространении пучка задается уравнением (Рис.5.4):

$$x + iy = (x_0 + iy_0)|\sigma(z)|exp(-i\theta_0 arg\sigma(z)).$$

В дальней зоне траектория движения точки асимптотически переходит в прямую:

$$x + iy = (x_0 + iy_0)\left(1 + \frac{2iz}{k\rho^2}\right) exp\left(-i\frac{\pi(\theta_0 + 1)}{2}\right).$$

Структурно устойчивые к деформациям растяжения-сжатия и правого-левого кручения пучка, удовлетворяющие уравнению Леонтовича - Фока и условию Зоммерфельда решения существуют. Угол закручивания пучка от перетяжки до дальней зоны задается параметром спиральности θ_0 и составляет $(\theta_0\pi/2)$. Законы изменения

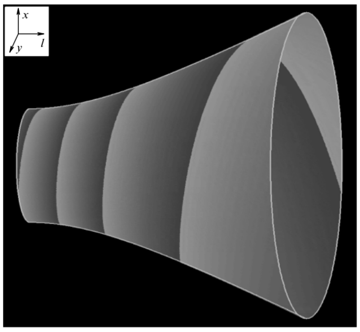

Рис. 5.4: Траектория движения точки при распространении пучка с $\theta_0 = -15$

угла поворота и масштаба профиля интенсивности пучка определяются следующим образом:

$$\theta(z) = \theta_0 \arctan\left(\frac{2z}{k\rho^2}\right),$$

$$d(z) = \sqrt{1 + \frac{4z^2}{k^2\rho^4}}.$$

Кривые постоянной фазы спирального пучка вне перетяжки также закручиваются по спирали, определяемой законом $\theta(z)$.