3 Регулярные преобразования сигнальных пучков

3.1 Дефокусирующие преобразования

Ранее (1.23) был сформулирован обобщенный принцип Гюйгенса-Френеля, связывающий профиль распределения комплексных амплитуд на двух перпендикулярных оси пучка и отстоящих друг от друга плоскостях. Для частных случаев профилей Эрмит-Гаусса и Лагерр-Гаусса справедливы соотношения:

$$\begin{gathered}G_H(x,y,z)H_{n,m}\left(\frac{x}{\rho|\sigma|},\frac{y}{\rho|\sigma|}\right)=\\=\left(\frac{k}{i2\pi z}\right)\iint\limits_{\mathbb{R}^2}H_{n,m}\left(\frac{x_1}{\rho},\frac{y_1}{\rho}\right)e^{\frac{ik}{2z}[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2]}dx_1dy_1,\end{gathered}\tag{3.1}$$

$$\begin{gathered}G_L(x,y,z)L_{n,\pm m}\left(\frac{x}{\rho|\sigma|},\frac{y}{\rho|\sigma|}\right)=\\=\left(\frac{k}{i2\pi z}\right)\iint\limits_{\mathbb{R}^2}L_{n,\pm m}\left(\frac{x_1}{\rho},\frac{y_1}{\rho}\right)e^{\frac{ik}{2z}[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2]}dx_1dy_1,\end{gathered}\tag{3.2}$$

где ρ - константа, $\sigma = 1 + (2iz)/(k\rho^2)$, гауссовские множители профилей пучков -

$$G_H(x,y,z)=\frac{1}{|\sigma|}exp\left(\frac{2iz(x^2+y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2-i(n+m+1)arg(\sigma)}\right),$$

$$G_L(x,y,z) = \frac{1}{|\sigma|} exp\left(\frac{2iz(x^2+y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2 - i(2n+m+1)arg(\sigma)}\right).$$

Классы функций $H_{n,m}(x,y),\ n,m = 0,1,\dots$ и $L_{n,m}(x,y),\ n,\pm m = 0,1,\dots$ формируют на плоскости полный ортонормированный базис, следовательно любой профиль комплексной амплитуды можно разложить в одном из рассматриваемых базисов (в зависимости от типа симметрии физической системы). Если при $z = 0$ справедливо:

$$F(x,y,0) = \sum_{n,m=0}^{\infty} c_{n,m} H_{n,m}(x,y),$$

справедливым на всей трассе пучка должно быть соотношение:

$$F(x,y,z) = \frac{1}{|\sigma|} exp\left(\frac{2iz(x^2+y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2}\right) \sum_{n,m=0}^{\infty} c_{n,m} e^{-i(n+m)arg(\sigma)} H_{n,m}\left(\frac{x}{\rho|\sigma|}, \frac{y}{\rho|\sigma|}\right).$$

В частном случае $F(x,y,0) = L_{n,m}(x,y)$ должно существовать линейное взаимное представление компонент одного базиса через компоненты другого. Для определения типа такого преобразования и его экспериментальной реализации рассмотрим подынтегральное выражение (3.1) как Фурье-отображение исходного Эрмит-Гауссового профиля с дополнительными фазовыми весовыми функциями:

$$e^{\frac{ik}{2z}[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2]} = e^{\frac{ik}{2z}[x^2+y^2]} e^{-\frac{ik}{2z}[xx_1+yy_)]} e^{\frac{ik}{2z}[x_1^2+y_1^2]}$$

здесь вторая экспонента в правой части определяет разложение в базисе плоских волн (Фурье-отображение комплексной амплитуды), третья экспонента эквивалентна дополнительному фазовому набегу при дефокусирующем воздействии на пучок.

Дефокусирующее воздействие фактически определяет пространственное масштабирование профиля пучка при распространении и может быть определено парой действительных значений a, c, характеризующих дефокусирующие искажения фазовой поверхности вдоль различных направлений. Для большей компактности записи перейдем к собственному масштабу длин и определим силу дефокусирующего искажения вдоль осей x_1, y_1 как пару действительных чисел a, c:

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-i[xx_1+yy_)]} e^{i[ax_1^2+cy_1^2]} H_{n,m}\left(x_1, y_1\right) dx_1 dy_1 = \tag{3.3}$$

$$= \frac{\pi(-i)^{n+m}}{\sqrt{(1+a^2)(1+c^2)}} e^{\left(-\frac{iax^2}{4(1+a^2)} - \frac{icy^2}{4(1+c^2)} + i\left(n+\frac{1}{2}\right)\operatorname{arctg} a + i\left(m+\frac{1}{2}\right)\operatorname{arctg} c\right)}$$
$$H_{n,m}\left(\frac{x}{2\sqrt{1+a^2}}, \frac{y}{2\sqrt{1+c^2}}\right)$$

Как следует из (3.3), при дефокусирующем воздействии происходит изменение масштабов модуляции комплексной амплитуды пучка с сохранением модовых значений n, m. Если экспериментальные выборки основаны только на регистрации интенсивности, число узловых сечений профиля пучка, испытавшего дефокусирующие воздействия различных типов, независимо от расположения плоскости регистрации может быть использовано для распознавания исходной Эрмит-Гауссовой моды.

3.2 Астигматические преобразования

Определим новый тип квадратичных по координате фазовых искажений пучка, не сводимый к набору дефокусирующих воздействий - астигматические искажения. Фазовый профиль зададим функцией двух координат и параметра ориентации α:

$$\psi(x_1, y_1; \alpha) = (x_1^2 - y_1^2)\cos 2\alpha - 2x_1 y_1 \sin 2\alpha.$$

Общее астигматическое преобразование Эрмит-Гауссового профиля запишем в виде:

$$F_{n,m}(x, y; a; \alpha) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-i(xx_1+yy_)} e^{ia\psi(x_1,y_1;\alpha)} H_{n,m}\left(x_1, y_1\right) dx_1 dy_1.$$

Как следует из предыдущего раздела, при "углах поворота"$\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$, $F_{n,m}(x, y; a; \alpha)$ могут быть выражены через $H_{n,m}(x, y)$ с изменением масштаба развертки по направлениям x, y.

Иная ситуация при $\alpha \in (0, \pi)$. В случае $\alpha = \pi/4$ фазомодулирующая функция "теряет" первое слагаемое, а Эрмит-Гауссов профиль преобразуется в Лагерр-Гауссов:

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-i(xx_1+yy_)} e^{(2iax_1y_1)} H_{n,m}(x_1, y_1)\, dx_1dy_1 \Rightarrow \tag{3.4}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}(-1)^{n+m} exp\left(-\frac{ixy}{4}\right) L_{m,n-m}\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}, \frac{y}{2\sqrt{2}}\right), \quad n \geq m,$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}(-1)^{n+m} exp\left(-\frac{ixy}{4}\right) L_{n,m-n}\left(\frac{y}{2\sqrt{2}}, \frac{x}{2\sqrt{2}}\right), \quad n \geq m.$$

Профили Лагерр-Гауссовых пучков радиально симметричны для любых собственных значений (n, m). Соответственно (3.4) можно трактовать как преобразование любого исходного профиля пучка в осесимметричный с сохранением комбинации собственных значений.

Экспериментально реализовать конвертацию пространственных мод можно с использованием сферических и цилиндрических оптических элементов. Сферическая линза с фокусным расстоянием f_0 описывается фазовым профилем -

$$\psi_S(x_1, y_1; f_0) = -\frac{1}{f_S}(x_1^2 + y_1^2),$$

соответственно в фокальной плоскости линзы $(z = f_0)$ формируется Фурье-отображение исходного профиля пучка:

$$F(x, y, z) = \frac{k}{2\pi iz} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{ik}{2z}[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2]} e^{-\frac{ik}{2f_S}(x_1^2+y_1^2)} F(x_1, y_1, 0) dx_1dy_1. \tag{3.5}$$

Цилиндрическая линза изменяет фазу проходящего пучка только по одному направлению, например так -

$$\psi_C(x_1, y_1; f_C) = \frac{x_1^2}{f_C}. \tag{3.6}$$

Комбинируя сочетание сферической и цилиндрический линз с совпадающими фокусными расстояниями и ориентацией направляющей цилиндрической линзы под углом α получим фазомодулирующий профиль вида

$$\psi_{S+C}(x_1, y_1; f) = \frac{-(x_1^2 + y_1^2) + 2(x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha)^2}{f},$$

или

$$\psi_{S+C}(x_1, y_1; f) = \frac{(x_1^2 - y_1^2)\cos 2\alpha + 2x_1 y_1 \sin 2\alpha}{f},$$

позволяющий реализовать астигматические преобразования, описанные выше.

3.3 Профили Эрмит-Лагерр-Гаусса

Фазовый внерезонаторный астигматический модовый конвертер возникает при распространении сигнального пучка на протяженных трассах за счет модуляции оптической плотности аэродинамических потоков. Описание динамики процесса конвертации мод и регистрируемых пространственных распределений удобно анализировать при едином представлении базисных состояний. Для этого построим объединенную функцию Эрмит-Лагерр-Гаусса следующим образом:

$$\Upsilon_{n,m}(x, y; \alpha) = \sum_{k=0}^{n+m} i^k \cos^{n-k}\alpha \sin^{m-k}\alpha P_k^{(n-k,m-k)}(-\cos 2\alpha) H_{n+m-k,k}(x, y) \tag{3.7}$$

где $P_k^{(n-k,m-k)}$ - полиномы Якоби.

Используя представление (3.7) и определение астигматического преобразования (3.4) получим:

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-i(xx_1+yy_)} e^{i\psi(x_1,y_1;\alpha))} H_{n,m}(x_1,y_1)\, dx_1 dy_1 = \tag{3.8}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} exp\left(-\frac{i}{8}\psi(x,y;\alpha) - \frac{\pi}{i}4(n+m)\right) *$$

$$* \Upsilon_{m,n}\left(\frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{2\sqrt{2}}, \frac{y\cos\alpha - x\sin\alpha}{2\sqrt{2}}; \alpha\right).$$

В частных случаях -

$$\Upsilon_{m,n}(x,y;0) = (-1)^m H_{n,m}(x,y),$$

$$\Upsilon_{m,n}(x,y;\pi/4) = (-1)^m 2^n m! L_{m,n-m}(x,y), \quad n \geq m,$$

$$\Upsilon_{m,n}(x,y;\pi/4) = (-1)^n 2^m n! L_{n,m-n}(x,-y), \quad n \leq m.$$

Пример трансформации Эрмит-Гауссового профиля $H_{6,0}(x,y)$ в Лагерр-Гауссов $L_{0,6}(x,y)$ при астигматическом преобразовании с различными углами проецирования α представлен на Рис.3.1.

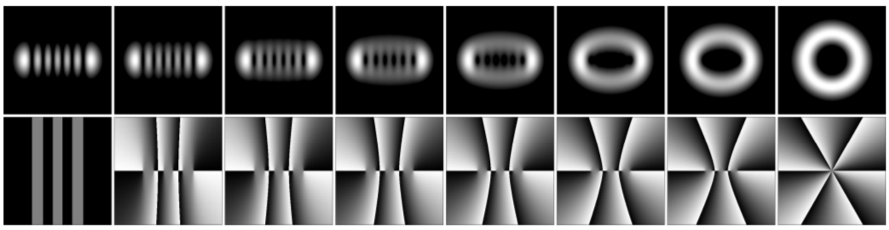

Рис. 3.1: Профили интенсивности (верхний ряд) и вариации фазы (нижний ряд) для функции Эрмит-Лагерр-Гаусса при $n = 6, m = 0$

Представленная на рисунке трансформация мод проведена для углов поворота в интервале $\alpha \in [0, \pi/4]$. Исходная модуляция амплитуды вдоль горизонтальной оси, свойственная Эрмит-Гауссовому профилю $H_{6,0}(x,y)$ перешла в фазовую модуляцию при обходе оси симметрии пучка для Лагерр-Гауссового профиля $L_{0,6}(x, y)$. Исходное число нулей для горизонтальной модуляции интенсивности совпадает с числом перехода фазы из значения 2π в значение 0 функции $L_{0,6}(x, y)$.

Еще один пример трансформации представлен на Рис.3.2.

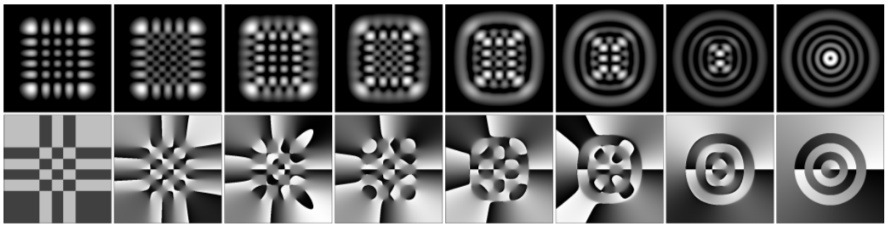

Рис. 3.2: Профили интенсивности (верхний ряд) и вариации фазы (нижний ряд) для функции Эрмит-Лагерр-Гаусса при $n = 4, m = 5$

Близкие по величине собственные значения формируют сложный профиль амплитудной модуляции как для $H_{4,5}(x, y)$, так и для $L_{4,1}(x, y)$. Однако фазовая модуляция при осесимметричном проецировании относительно проста, полностью исключить фазовую модуляцию в Лагерр-Гауссовом представлении можно подбором равных собственных значений $n = m$.

Экспериментальная распределений интенсивности при модовой конвертации, построенной по описанному в предыдущем разделе принципу сочетания сферических и цилиндрических оптических элементов иллюстрируется на Рис.3.3.

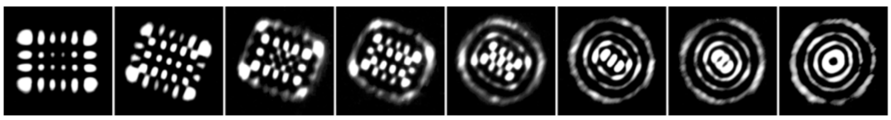

Рис. 3.3: Профили интенсивности для функции Эрмит-Лагерр-Гаусса при $n = 5, m = 3$

Функции Эрмита-Лагерра-Гаусса $\Upsilon_{m,n}(x, y; \alpha)$ при любом значении угла проецирования α формируют ортонормированный базис в

$\mathbb{R}^2$ и инвариантны по отношению к астигматическим преобразованиям произвольного вида.

3.4 Угловой момент и вектор Умова-Пойтинга пучка

Распространение пучка произвольного профиля сопровождается переносом энергии, импульса и момента импульса. Пусть монохроматический пучок частотой ω с комплексной амплитудой $\vec{F}(x,y,z)$ распространяется в однородной и изотропной среде с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ. Рассмотрим исходно эллиптически поляризованный пучок, характеризуемый электрической составляющей электромагнитного поля –

$$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)e^{i(kz-\omega t)}, k = k_0\sqrt{\epsilon\mu},$$

с компонентами комплексной амплитуды –

$$E_x = F(x,y,z)\cos\alpha, \quad E_y = iF(x,y,z)\sin\alpha, \quad E_z.$$

Соотношение между поперечными и продольной компонентами поля пучка получим из уравнения Максвелла $div\vec{E} = 0$:

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}\cos\alpha + i\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}\sin\alpha + ikE_z + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$E_z = -e^{ikz}\int e^{ikz}\left(\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}\cos\alpha + i\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}\sin\alpha\right)dz =$$

$$= \frac{i}{k}\left(\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}\cos\alpha + i\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}\sin\alpha\right) + O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Подставив найденные компоненты в уравнение Максвелла $\vec{B} = rot\vec{E}/ik_0$ определим поперечные и продольные компоненты вектора магнитной индукции:

$$B_x = -i\tfrac{k}{k_0}F\sin\alpha, \quad B_y = \tfrac{k}{k_0}F\cos\alpha,$$

$$B_z = \tfrac{1}{k_0}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\sin\alpha + i\frac{\partial F}{\partial y}\cos\alpha\right) + O\left(\tfrac{1}{k^2}\right)\right].$$

Пусть у среды распространения пучка отсутствует намагниченность и, соответственно совпадают направления векторов напряженности магнитного поля и вектора индукции магнитного поля. Оценим направление вектора Умова-Пойнтинга, принимая во внимание комплексный характер записи фазового рассогласования компонент:

$$\vec{P} \backsim [\vec{E} \times \vec{H}],$$

или по компонентам:

$$P_x \backsim \frac{1}{2k_0} F \frac{\partial F}{\partial x} \cos 2\alpha, \quad P_y \backsim \frac{i}{2k_0} F \frac{\partial F}{\partial y} \sin 2\alpha, \quad P_z \backsim \mid F \mid^2$$

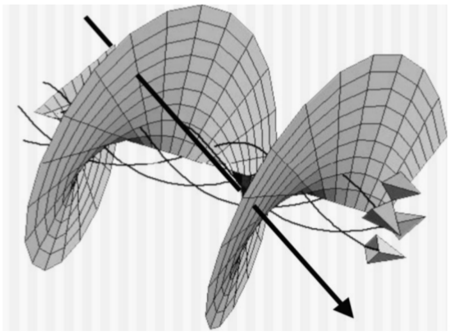

Рис. 3.4: "Замороженный"фрагмент сигнального пучка []

На Рис.3.4 представлена схема "спиралевидного вращения" вектора Умова-Пойнтинга на расстоянии одной длины волны в предположении простейшего профиля поверхности постоянной фазы. В каждой точке поверхности локальной направление волны немного отличается от соседнего и перенос энергии проходит по скользящей спирали, навитой на "виртуальный цилиндр".

Подобное "спиралевидное обтекание" порождает вращение, характеризуемое моментом импульса относительно оси пучка. Подобное вращение следует рассматривать как результат интерференции вторичных волн, а не только как вращение волны в целом в результате поляризации. Переносимый волной момент импульса может быть передан атомам или иным структурам, способным поглотить или переизлучить волну.

Момент импульса пучка со "спиралевидным переносом" энергии вычислим на основе общего определения:

$$\vec{M} = \frac{1}{8\pi c}\Re[\vec{r} \times [\varepsilon\vec{E} \times \vec{B}^*]].$$

Ограничим анализ проекцией вдоль оси пучка, т.е.

$$M_z = \frac{\varepsilon}{8\pi c}\Re(x[\vec{E} \times \vec{B}^*]_y - y[\vec{E} \times \vec{B}^*]_x) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{8\pi c}\Re(x(E_x B_z^* - E_z B_x^*) - y(E_y B_z^* - E_z B_y^*)) = M_z^O + M_z^P,$$

здесь M_z^O - орбитальный момент импульса, M_z^P - поляризационный момент импульса. Для орбитального и поляризационного моментов импульса должны быть справедливы выражения:

$$M_z^O = \frac{\varepsilon}{8\pi c k_0}\Im\left[F^*\left(x\frac{\partial F}{\partial y} - y\frac{\partial F}{\partial x}\right)\right], \quad M_z^P = \frac{\varepsilon \sin 2\alpha}{16\pi c k_0}\left[x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right](FF^*).$$

Сформулируем ряд утверждений, касающихся момента импульса пучка:

- Полный угловой момент сохраняется для пучка любого профиля при астигматических преобразованиях.
- Если исходная комплексная амплитуда строго вещественна, полный момент импульса равен нулю.
- Если исходная комплексная амплитуда четна или нечетна по каждой из координат x, y, полный угловой момент равен нулю.
- Если комплексная амплитуда поля имеет вид $e^{im\alpha}F_0(r)$, орбитальный угловой момент составляет $M = m$.