

2 Структурно-устойчивые сигнальные пучки

Пространственные сигнально-кодовые конструкции для открытых оптических каналов передачи данных можно создавать на основе набора ортогональных пространственных распределений поля, используя собственные функции открытых оптических резонаторов различного типа симметрии. Основной вопрос при выборе набора пространственных кодов - диапазон искажений при распространении в сложно-возмущенной среде и правила распознавания регистрируемого профиля пучка.

Подобная постановка задачи неявно предполагает использование "самовоспроизводящихся" пространственных структур в режиме свободного распространения сигнального пучка.

2.1 Структурная устойчивость

Профиль диаграммы направленности и состояние поляризации сигнального оптического пучка служат элементами передаваемого кода и выбираются по критерию устойчивости к действующим на трассе возмущениям интегральной оптической плотности. Но и в отсутствии пространственных вариаций оптических характеристик трассы пучок претерпевает дифракционные искажения, затрудняющие восстановление исходного профиля без дополнительной информации или опорного сигнала.

Рассмотрим задачу сохранения профиля распределения интенсивности при распространении пучка, сводящуюся к задаче о существовании решений $F(x, y, z)$ параболического уравнения (1.6), интенсивность которых при изменении z сохраняет свою структуру

с точностью до масштаба. Определим требование сохранения профиля следующим образом:

$$I(x, y, z) = D(z)I_0 \left(\frac{x}{d(z)}, \frac{y}{d(z)} \right), \quad (2.1)$$

где $d(z) > 0$ – масштабный множитель, $D(z) = 1/d^2(z)$ – для оптически прозрачной среды.

Вид масштабируемых решений $F(x, y, z)$ определяется в значительной степени зависимостью масштабного множителя $d(z)$ от длины трассы. Представим комплексную амплитуду через интенсивность и фазу $F(x, y, z) = \sqrt{I(x, y, z)} \exp(i\phi(x, y, z))$, и запишем уравнение Леонтовича-Фока как систему уравнений для его действительной и комплексной компонент:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(I \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(I \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + k \frac{\partial I}{\partial z} = 0, \\ 2I \left(\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial I}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial I}{\partial y} \right)^2 - 4I^2 \left[\left(\frac{\partial \phi^2}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \phi^2}{\partial y} \right) + 2k \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Анализ системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных для пространственного распределения амплитуды и фазы в общем случае затруднен, но при формулировке дополнительных условий могут быть выполнены с привлечением дополнительных аналогий из теоретических моделей структуры поля в открытых оптических резонаторах. Сформулируем два физических ограничения на пространственное распределение интенсивности:

– $\iint_{\mathbb{R}^2} I(x, y, z) dx dy = Const$ - условие сохранение потока энергии через произвольную плоскость, пересекающую пучок;

– $I(x, y, z) \leq C \exp(-A(|x|^2 + |y|^2)) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ - условие ограничения спада интенсивности при отклонении от оси пучка, необходимое для масштабирования распределения интенсивности и фазы.

Масштабный множитель распределения интенсивности, аддитивная фаза и ширина ограничивающего гауссовского профиля за-

висят от продольной координаты пучка в используемой аппроксимации следующим образом:

$$\begin{aligned} d(z) &= d_0 \sqrt{1 + 4 \frac{(z - z_0)^2}{k^2 \rho^4}}, \\ \gamma(z) &= -\gamma_0 \operatorname{arctg} \left(2 \frac{z - z_0}{k \rho^2} \right) + \gamma_1, \\ \sigma(z) &= 1 + i \frac{2z}{k \rho^2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

С использованием сформулированных ограничений комплексная амплитуда пучка может быть переопределена с выделением гауссовской компоненты и дополнительной пространственно - модулирующей функции:

$$F(x, y, z) = \frac{1}{|\sigma|} F_0 \left(\frac{x}{\rho|\sigma|}, \frac{y}{\rho|\sigma|} \right) \exp \left(-i \frac{2z(x^2 + y^2)}{k \rho^4 |\sigma|^2} - i \gamma_0 \operatorname{arg} \sigma \right) \quad (2.4)$$

где ρ, γ_0, d_0 - константы, $F_0(x, y)$ - двумерный модулирующий профиль.

2.2 Профили Эрмита-Гаусса

Подставив (2.4) в уравнение Леонтовича-Фока получим уравнение, аналогичное уравнению Шредингера для двумерного квантового гармонического осциллятора:

$$\frac{\partial^2 F_0(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_0(x, y)}{\partial y^2} - 4F_0(x, y)(x^2 + y^2 - \gamma_0) = 0. \quad (2.5)$$

Тип решения записанного уравнения зависит от установленного из дополнительных условий типа симметрии. Предположим, что модулирующий профиль $F_0(x, y)$ может быть представлен как произведение двух независимых профилей $F X_0(x)$ и $F Y_0(y)$, т.е.

$$F_0(x, y) = F X_0(x) F Y_0(y).$$

для каждого из которых справедливо аналогичное (2.5) уравнение для пространственного распределения:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 FX_0(x)}{dx^2} - FX_0(x)(4x^2 + c_x) &= 0, \\ \frac{d^2 FY_0(y)}{dy^2} - FY_0(y)(4y^2 + c_y) &= 0, \\ c_x + c_y &= -4\gamma_0\end{aligned}$$

Каждое из упрощенных до одномерного представления уравнений соответствует аналогу для одномерного квантового осциллятора с наложением граничных условий

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} FX_0(x) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \pm\infty} FY_0(y) = 0.$$

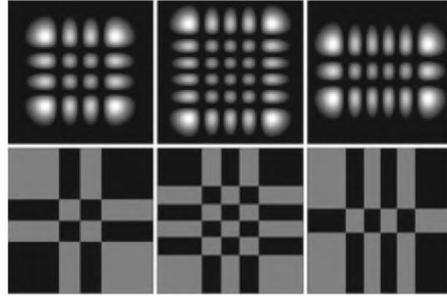


Рис. 2.1: Профили интенсивности (верхний ряд) и профили вариации фазы (нижний ряд) для модовых структур Эрмита-Гаусса при сочетаниях квантовых значений (3,3), (4,5) и (5,2) соответственно.

Допустимый набор дискретных значений $c_x = -4n - 2$, $c_y = -4m - 2$, соответственно $\gamma_0 = n + m + 1$ и разрешенный набор масштабируемых модулирующих профилей соответствует полному набору взаимно ортогональных мод Эрмита-Гаусса:

$$F_0^{n,m}(x, y) = \exp(-x^2 - y^2) H_n(\sqrt{2}x) H_m(\sqrt{2}y), \quad n, m = 0, 1, \dots$$

Примеры некоторых пространственно модулированных распределений интенсивности и распределения фазы в сечении пучка представлены на Рис.2.1. Отметим, что значение квантового числа вдоль конкретного направления соответствует числу узлов (нулей) в распределении интенсивности или числу перескока фазы на π радиан в заданном направлении.

Дополнить абзац об астигматических и пр. преобразованиях, описываемых интегралом Френеля, если потребуется для следующего раздела

2.3 Профили Лагерра-Гаусса

Рассмотренные распределения интенсивности - не единственное решение уравнения для пространственной модулирующей функции. Пусть по условию физической задачи пространственная модуляция интенсивности должна быть осесимметрична, следовательно модулирующая функция $F_0(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi)$ удовлетворяет уравнению в полярных координатах:

$$\frac{\partial^2 F_0(r, \phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_0(r, \phi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F_0(r, \phi)}{\partial \phi^2} - 4F_0(r, \phi)(r^2 - \gamma_0) = 0. \quad (2.6)$$

После подстановки парциальных радиальных и азимутальных профилирующих функций уравнение (2.6) фактически разделяется на два согласованных уравнения:

$$\left[\frac{r^2}{R(r)} \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{r}{R(r)} \frac{dR(r)}{dr} - 4r^2(r^2 - \gamma_0) \right] + \frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} = 0 \Rightarrow \quad (2.7)$$

$$r^2 \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + r \frac{dR(r)}{dr} - 4R(r)r^2(r^2 - \gamma_0) = c, \quad \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} = -c\Phi(\phi)$$

где c - константа.

Решение уравнение для азимутальной компоненты $\Phi(\phi)$ должно удовлетворять условию 2π периодичности $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$ и соответствующие линейно независимые решения дифференциального

уравнения второго порядка выберем в виде:

$$\Phi^{\pm}(\phi) = e^{\pm i\phi}, \quad m = 0, 1, \dots$$

значение m можно считать аналогом азимутального квантового числа.

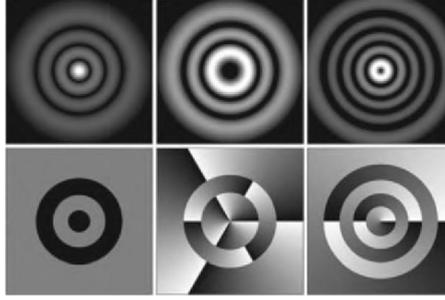


Рис. 2.2: Профили интенсивности (верхний ряд) и профили вариации фазы (нижний ряд) для модовых структур Лагерр-Гаусса при сочетаниях радиального и азимутального квантовых чисел (3,0), (2,3) и (4,-1) соответственно. Яркость фазового профиля соответствует изменению фазы азимутальной компоненты от 0 до 2π

Уравнение для радиальной профилирующей функции после подстановки $s = m^2$ и граничных условиях вблизи оси и при удалении от оси пучка:

$$R(r)_{r \rightarrow 0} \sim r^{|m|}, \quad R(r)_{r \rightarrow \infty} = 0,$$

аналогично уравнению Шредингера для частицы в поле с центральной симметрией в двумерном приближении. Решение подобного уравнения известно и может быть записано через функции Лагерра $L_n^{|m|}$ при выполнении условия квантования $\gamma_0 = 2n + |m| + 1$:

$$R(r) = e^{-r^2} r^{|m|} L_n^{|m|}(2r^2),$$

или, возвращаясь к декартовым координатам

$$F_0(x, y) = e^{-x^2 - y^2} (x + iy \cdot \text{sign}(m))^{|m|} L_n^{|m|}(2(x^2 + y^2)),$$

Дополнить обоснованием диапазона изменения m при выбранном n ...

Распределение интенсивности Лагерр-Гауссовых пучков промодулировано по радиальной компоненте, число переходов функции $R(r)$ через нулевое значение (исключая центральный минимум при четных значениях радиального квантового числа) соответствует значению n . Знак азимутального квантового числа не проявляется в профиле интенсивности, но может быть обнаружен интерферометрическими методами.