

# СОЛИТОНЫ В ОПТИКЕ И БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКОМ КОНДЕНСАТЕ

**А. П. СУХОРУКОВ**

*Физический факультет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*

[aps@nls.phys.msu.su](mailto:aps@nls.phys.msu.su)

## **1. ВВЕДЕНИЕ**

В линейных средах волны расплываются во времени из-за дисперсии и в пространстве из-за дифракции. Однако если волна имеет достаточно большую амплитуду, то проявляется нелинейность среды и поведение волны может кардинально измениться. При балансе между дисперсией (дифракцией) и нелинейностью в среде могут распространяться уединенные волны, сохраняющие свою форму сколь угодно долго. Впервые уединенную волну наблюдал и исследовал шотландский ученый Скотт Рассел 170 лет назад. Уединенная волна, имевшая колоколообразный профиль, бежала по поверхности вода в водоотводном канале десятки километров. Спустя 50 лет это явление объяснили голландцы Д.Д. Кортевег и Г. де Вриз на основе полученного ими уравнения. Универсальность свойств уединенной волны установили два американских ученых М. Крускал и Н. Забуски в 1964 г., проводя вычислительные эксперименты по моделированию распространения сигнала в нелинейной дискретной цепочке. Они отметили, что при столкновении уединенные волны сохраняют свою форму, т.е. ведут себя как квазичастицы. Поэтому они предложили назвать такие устойчивые стационарные волны солитонами. Они показали, что в длинноволновом приближении нелинейные волны в цепочке описываются тем же уравнением Кортевега и де Вриза, что и волны на воде. Поэтому солитоны в атомной цепочке обладает теми же свойствами, что и уединенная волна Рассела. С этого времени стала бурно развиваться физика солитонов. Особую роль в развитии этого направления в волновой физике играет нелинейная оптика.

## **2. ОПТИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ**

В оптике речь идет о солитонах огибающих. Волновые пакеты (оптические импульсы) формируются во временные солитоны, а волновые пучки – в пространственные солитоны. Теория оптических солитонов и самофокусировки начала бурно развиваться в 1964-68 г.г. на основе метода медленно меняющихся амплитуд. Пространственная динамика амплитуды квазиплоской волны  $A$  в кубично-нелинейной среде описывается нелинейным уравнением Шредингера (НУШ)

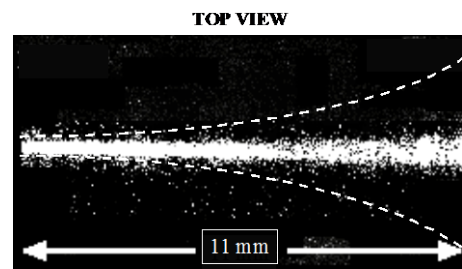
$$i \frac{\partial A}{\partial z} = D \Delta_{\perp} A - \gamma |A|^2 A, \quad (1)$$

где  $z$  - продольная координата,  $D = 1/(2k)$  - коэффициент дифракции,  $k$  - волновое число,  $\Delta_{\perp}$  - оператор Лапласа по одной или двум поперечным координатам,  $\gamma = k_0 n_2$ ,  $n_2$  - коэффициент нелинейности показателя преломления. В одномерном случае уравнение (1) имеет следующее колоколообразное решение для огибающей солитона:

$$A = E \operatorname{sech}(x/w), \quad \gamma E^2 w^2 = D, \quad (2)$$

Временной солитон описывается этой же формулой, только поперечную пространственную координату  $x$  надо заменить на бегущее время  $\tau = t - z/u$ , ширину пучка  $w$  на длительность импульса, а коэффициент дифракции  $D_{\perp}$  на коэффициент дисперсии групповой скорости  $D_{\tau} = \frac{\partial u^{-1}}{\partial \omega}$ . Временные солитоны в оптических волокнах наблюдались Муллинауrom и др. в 1980 г. Эти эксперименты подтвердили теорию Хасегавы (1973). Теперь солитонные линии связи соединяют пункты, разнесенные на многие десятки тысяч километров.

Пространственные солитоны были впервые уверенно зарегистрированы в 1974 г. в парах натрия [1]. В 1995 г. пространственный солитон наблюдался в кристалле с квадратичной нелинейностью [2].



5 Diffraction Lengths

Рис. 1. Фотографии лазерного пучка, проходящего через кювету с парами натрия (слева) и через кристалл  $\text{KNbO}_3$  (справа). Видно, что при малой мощности пучок быстро расплывается из-за дифракции, а при большой мощности самофокусировка уравнивает дифракцию и формируется пространственный солитон

В 1987-89 г.г. были предсказаны щелевые солитоны в периодически неоднородных средах, или фотонных кристаллах [3]. Затем были открыты солитоны в фоторефрактивных и жидких кристаллах. Новый класс солитонов возникает в нелинейных резонаторах, квадратично-нелинейных средах и дискретных периодических структурах.

Таким образом, в 90-х годах сложилась чрезвычайно интересная область физики, посвященная исследованиям оптических солитонов. Солитоны изучаются и во многих других разделах волновой физики. При этом прослеживается ясная аналогия между солитонами разной природы, что позволяет обобщать получаемые результаты и переносить их в малоизученные области науки. Такая ситуация сложилась после открытия в 1995 г. бозе-эйнштейновского конденсата – нового состояния вещества.

### 3. БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКИЙ КОНДЕНСАТ

Бозе-эйнштейновский конденсат представляет собой желеобразный сгусток из одинаковых атомов, охлажденное до крайне низкой температуры порядка  $10^{-5}$  К. В конденсате находится, как правило, от 300 до 6000 атомов. Бозе-эйнштейновский конденсат (БЭК) не похож на твердые тела, жидкости или газы. Он не твердый, не текучий и не испаряется. Конденсат – это квантовое состояние большого числа одинаковых квантовых частиц – бозонов, в рассматриваемом случае атомов. «Картина БЭК может рассматриваться как фотография волновой функции, являющейся решением уравнения Шредингера» - говорит один из первооткрывателей В. Каттерле. Уже первые опыты показали, что конденсат обладает когерентными и нелинейными свойствами. Поэтому в конденсате можно наблюдать волны материи, интерференцию и солитоны.

Существование конденсата из бозонов (атомов) было предсказано Бозе и Эйнштейном в 1924-25 г.г. [4, 5] Но долгое время не удавалось охладить атомы до миллиардных долей градуса. Этого добились в 1995 г. сразу три научные лаборатории [6]. Они использовали ступенчатое охлаждение атомов щелочных металлов. Конденсация наступала, когда длина волны де-Бройля [7], обратно пропорциональная температуре, становилась много больше межатомного расстояния. Атомы помещали в магнитную ловушку, которая могла придавать конденсату квазиодномерную, квазидвумерную или

трехмерную форму. После экспериментального открытия конденсата число публикаций в этой области стало стремительно расти. Уже в 2000 г. было опубликовано около 700 статей.

#### 4. ВОЛНОВЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ СВОЙСТВА БЭК

Одним из первых экспериментов было наблюдение интерференции двух конденсатов (см. рис. 2) [8].

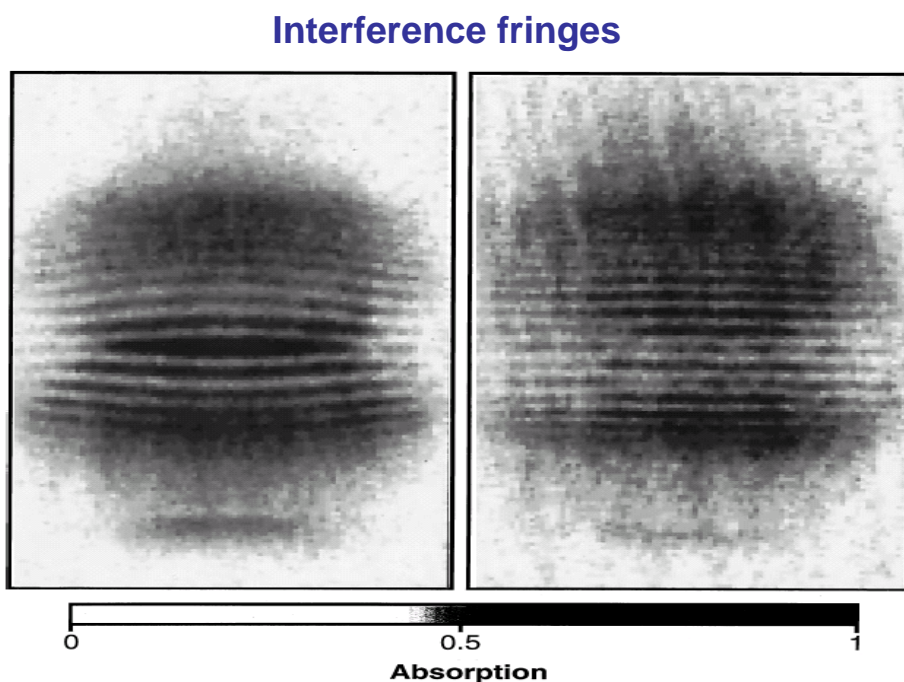


Рис. 1. На представленной фотографии отчетливо видны характерные интерференционные полосы. Регистрация плотности атомов проводилась с помощью просвечивания конденсата дополнительным лазерным излучением.

Эволюция БЭК из  $N$  атомов массой  $M$  описывается уравнением Гросса-Питаевского для волновой функции  $\psi$  [9].

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} D \Delta \psi - g |\psi|^2 \psi + V(x, y, z) \psi, \quad (3)$$

где плотность частиц равна  $|\psi|^2$ . Уравнение (3) полностью эквивалентно НУШ (1) с добавлением потенциальной функции магнитной ловушки, например, в виде параболоида  $V = V_r \left[ \left( \frac{x}{l_x} \right)^2 + \left( \frac{y}{l_y} \right)^2 + \left( \frac{z}{l_z} \right)^2 \right]$ . Константа связи (коэффициент нелинейности)  $g = 4\pi \hbar^2 a N / M$  пропорциональна длине рассеяния атомов  $a$ , обусловленного двойными соударениями. Эта длина и,

следовательно, коэффициент нелинейности могут быть как положительными, так и отрицательными величинами. Знак нелинейности можно менять с помощью магнитного поля, используя эффект Фешбаха (рис. 3)

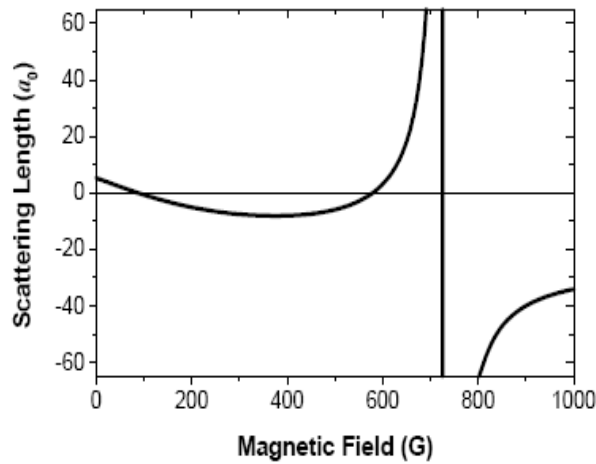


Рис. 3. Резонанс Фешбаха: зависимость длины рассеяния  $a_0$  от магнитного поля для атомов  ${}^7\text{Li}$  в состоянии (1, 1). Длина рассеяния дана в единицах радиуса Бора. В эксперименте резонанс наступал при напряженности магнитного поля 725 Гс [10].

Величина  $a > 0$  соответствует отталкиванию, а  $a < 0$  - притяжению атомов.

## 5. БЭК СОЛИТОНЫ

Эффект самофокусировки и формирование светлых солитонов имеют место в конденсате с  $a < 0$ . Форма одномерного солитона, состоящего их нового вида материи, описывается той же формулой (2), что и солитон в оптическом волокне. Динамика формирования БЭК солитона показана на рис. 4.

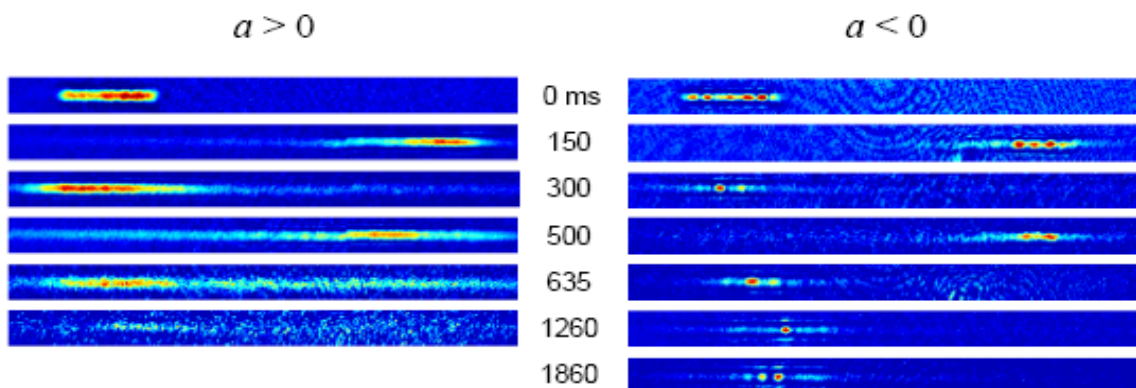


Рис. 4. Сравнение динамики распространения конденсата при действии расталкивающих сил (слева) с атомными солитонами (справа). Начальное число атомов в конденсате равно  $\sim 3 \times 10^5$ . Солитоны содержат  $\sim 5000$  атомов. Поперечный размер солитона  $l_r \approx 1.5$  мкм [10].

## 6. КОЛЛАПС БЭК

В двумерном и трехмерном конденсате с  $a < 0$  силы взаимного притяжения атомов могут привести к коллапсу – неудержимому лавинообразному концентрированию в одной точке [11]. Коллапс развивается во времени: атомы с периферии собираются к центру, и тем быстрее, чем больше их концентрация. В оптике явление коллапса изучалось теоретически и экспериментально в 60-х годах.

Как и в случае самофокусировки лазерного пучка существует порог коллапса БЭК. Он наступает, если общее число атомов превышает критическую величину

$$N_{cr} = f a_0 / |a|, \quad (4)$$

где  $f \approx 0.46$  - коэффициент стабилизации. БЭК может избежать коллапса, только если число атомов меньше критической величины. При нарушении этого условия наблюдается схлопывание БЭК, причем коллапс развивается за конечную время (в оптике лазерный пучок самофокусируется на конечном расстоянии) (рис. 5).

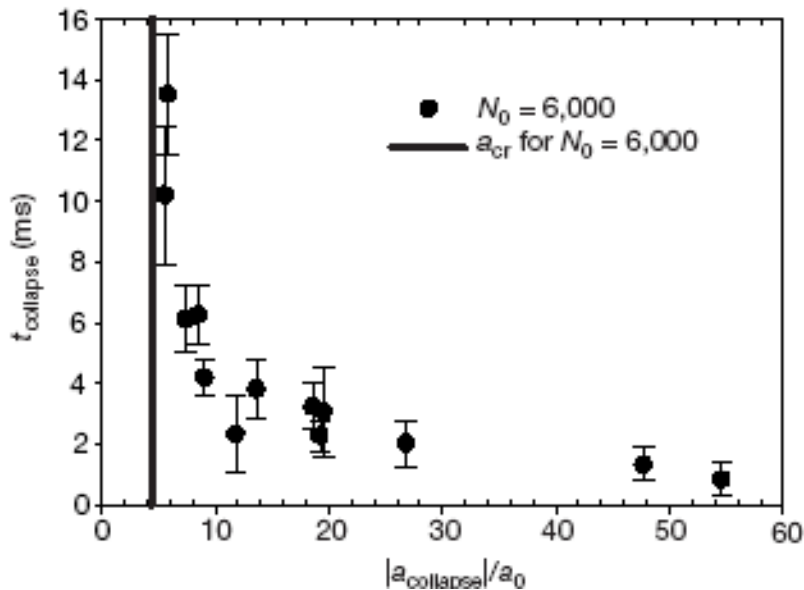


Рис. 5. Зависимость времени коллапсирования БЭК  $t$  в мс от нормированной длины рассеяния  $|a_{collapse}|/a_0$  для 6000 атомов  $^{85}\text{Rb}$ .

## 7. ЩЕЛЕВЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ И БЭК СОЛИТОНЫ

В нелинейной оптике большое внимание привлекают фотонные кристаллы, имеющие периодическую модуляцию показателя преломления. Обычно фотонный кристалл состоит из чередующихся слоев с разными показателями преломления. Периодическую структуру можно создавать в нелинейных средах с помощью двух встречных оптических волн. Распространение волн в периодических структурах исследуют в двух конфигурациях (рис. 5)

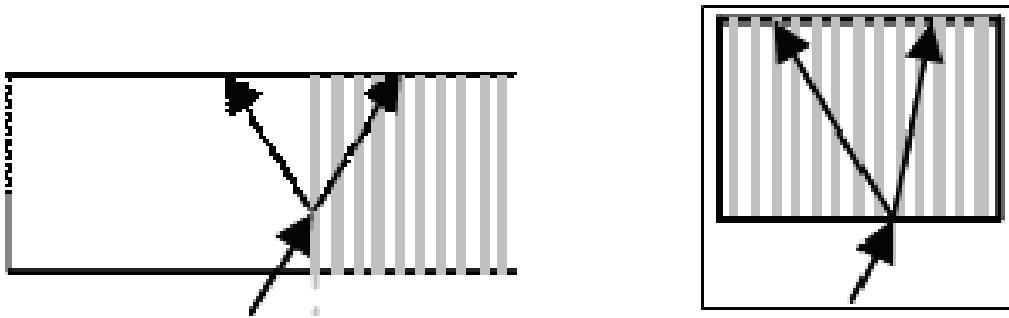


Рис. 6. Ход лучей в периодической решетке при брэгговском резонансе в схеме отражения (слева) и схеме прохождения(справа).

В схеме отражения возникают волны Флоке-Блоха (рис. 7). Их поведение сильно зависит от положения несущей частоты волны относительно щели не пропускающая фотонного кристалла.

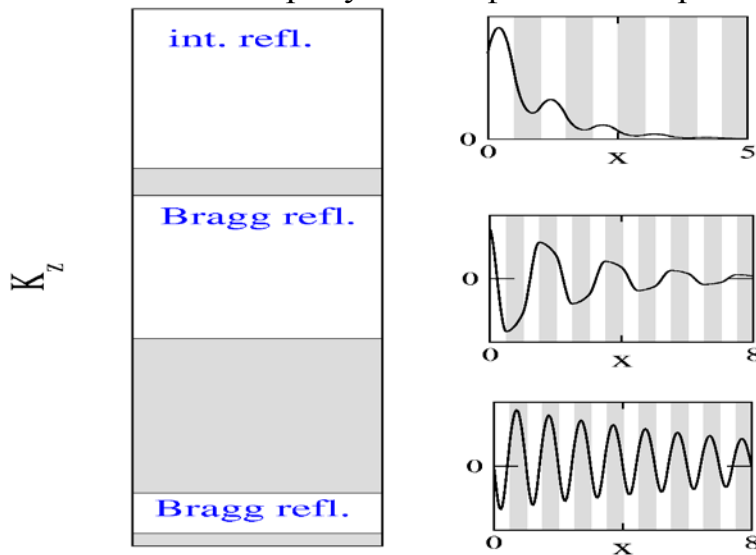


Рис.7. Зависимость амплитуды волны от глубины проникновения в решетку при сильном брэгговском резонансе внутри области не пропускающая – частотной щели (вверху), на краю щели (в середине) и вне щели (внизу).

В сильных оптических полях дисперсия кристалла из-за нелинейности среды меняется, и волна просачивается через кристалл (туннелируется) в виде одного или цуга щелевых солитонов. Щелевые солитоны могут распространяться почти с нулевой скоростью. Если их возбудить внутри решетки, то они могут оставаться неподвижными долгое время, сохраняя свою форму.

Аналогичное явление недавно наблюдалось в БЭК. В поле оптической стоячей волны создавался периодический потенциал  $V(x) = V_m \sin^2(Kx)$ , вследствие чего в частотной дисперсии образовывалась щель непротекания, как в фотонном кристалле или брэгговской решетке. Так как БЭК обладает волновыми свойствами, то он повел себя также, как оптическое излучение в нелинейной периодической решетке. А именно, часть конденсата образовала неподвижный щелевой солитон (рис. 5).

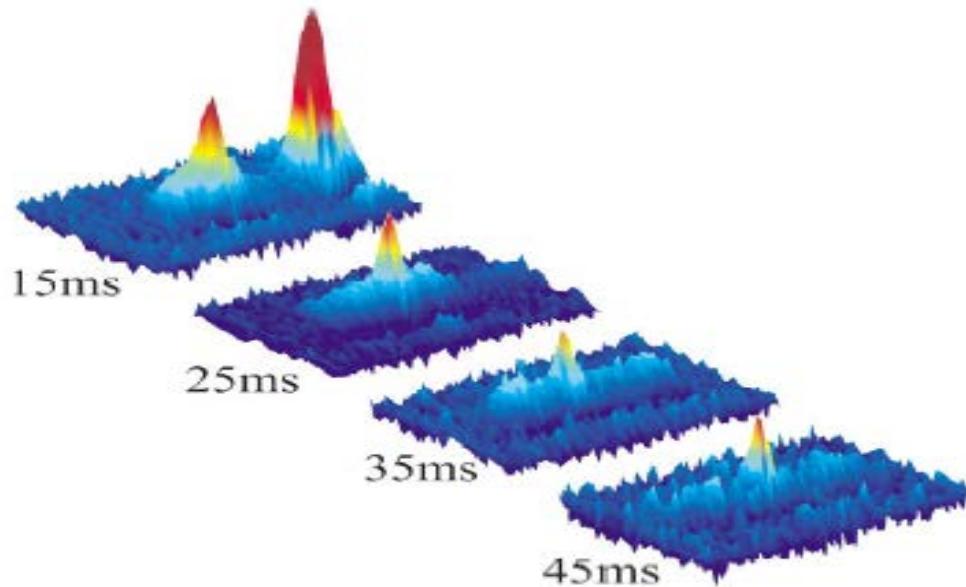


Рис. 6. Динамика БЭК в периодической решетке, созданной двумя встречными лазерными пучками (в потенциале оптической стоячей волны). Показано распределение атомов в различные моменты времени. После 25 мс формируется маленький пик, форма и амплитуда которого не меняется. Избыточные атомы излучаются или рассеиваются со временем. После 45 мс отчетливо наблюдается только один солитон, содержащий 250 атомов. Периодический потенциал  $V$  создается стоячей световой волной на нерезонансной длине волны 783 нм [12].

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ



В БЭК исследуются также многие другие эффекты: взаимодействие солитонов, темные солитоны, модуляционная нестабильность, квантовых вихри, сверхтекучесть, квантовые ударные волны в сверхтекучем БЭК. При определенном внешнем магнитном поле атомы начинают образовывать связанные состояния - своего рода молекулы. В результате вместо одного БЭК сосуществуют две фазы газа атомов. В последнее время ученые получили конденсацию фермионного газа  $^{40}\text{K}$  [13]. В научных статьях обсуждаются различные применения БЭК. В этом году вышел обстоятельный обзор по БЭК [14].

Работа выполнена при частичной поддержке грантами РФФИ № 02-02-17127, «Ведущие научные школы» НШ-1949.2003.2, БелРФФИ 04-02-81054, «Университеты России» УР.01.03.079.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bjorkholm & Ashkin, Phys. Rev. Lett. **32**, 129 (1974)
2. Karamzin, Ju.N. and Sukhorukov, A.P. JETP Lett. **20**, 339 (1974); Schiek, R., Baek, Y., and Stegeman, G.I. Phys. Rev. E **53**, 1138 (1996)
3. Bose S. N. Z. Phys. **26** 178 (1924).
4. Einstein A., Zweite Abhandlung Sitzungber. Preuss. Akad. Wiss. **1925** 3 (1925).
5. W. Chen and D. L. Mills, Phys. Rev. Lett. **58**, 160 (1987); A. B. Aceves and S. Wabnitz, Phys. Lett. A **141**, 37 (1989); D. N. Christodoulides and R. I. Joseph, Phys. Rev. Lett. **62**, 1746 (1989).
6. M.H. Anderson et al., Science **269**, 189 (1995); K.B. Davis et al., Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995); C.C. Bradley et al., Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995).
7. de Broglie L. Ann. Phys. **3** 22 (1925).
8. Andrews M R, Townsend C G, Miesner H-J, Durfee D S, Kurn D M and Ketterle W., *Science* **275** 637 (1997).
9. E.P. Gross, Nuovo Cimento **20**, 454 (1961); L.P. Pitaevskii, ЖЭТФ **40**, 646 (1961) [English Transl. Sov. Phys. JETP **13**, 451 (1961)].
10. K.E. Strecker et al., Nature **417**, 150 (2002).
11. L. Berge, Phys. Rep. **303**, 259 (1998); Dalfovo F., Giorgini St., Pitaevskii L.P., and Stringari S., Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999).
12. B. Eiermann, Th. Anker, M. Albiez, M. Taglieber, P. Treutlein, K.-P. Marzlin, and M. K. Oberthaler, Phys. Rev. Lett. **92** 230401 (2001)
13. C. A. Regal, M. Greiner, and D. S. Jin, arXiv: cond-mat/0401554 v1 27 Jan 2004.
14. Kai Bongs and Klaus Sengstock<sup>1</sup>, Rep. Prog. Phys. **67** 907–963 PII: S0034-4885(04)04109-0 (2004).