

ОПТИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ: ОТ НАНО- ДО ФЕМТОСЕКУНДНЫХ ДЛИТЕЛЬНОСТЕЙ

С.В. Сазонов

Российский научный центр «Курчатовский институт»

пл. академика Курчатова, 1, 123182, Москва, Россия

e-mail: sazonov.sergey@gmail.com

1. ВВЕДЕНИЕ

Оптический солитон (от английского «solitary») представляет собой уединенный лазерный импульс определенной длительности (от нано- до фемтосекунд), обладающий несущей частотой видимого диапазона и способный распространяться в нелинейной диспергирующей среде без изменения своей формы на большие расстояния. Важным представляется также и то обстоятельство, что солитоны обладают свойством упругого взаимодействия друг с другом. Т.е. после столкновения солитоны восстанавливают свою первоначальную форму. Здесь следует подчеркнуть, что все это происходит в нелинейной среде, поэтому принцип суперпозиции, как он понимается в линейных средах, несправедлив. Солитоны именно взаимодействуют между собой, вначале деформируясь, а затем восстанавливая свои исходные параметры. В связи с этим на солитоны возлагаются большие надежды в целях их широкого использования в системах оптической связи. С укорочением длительности солитона может увеличиваться пропускная способность соответствующих информационных систем. Поэтому вопрос, отраженный в названии настоящей работы, представляется важным как с фундаментальной, так и с прикладной точки зрения.

2. СОЛИТОНЫ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА – де ВРИЗА

Вообще говоря, солитоны могут иметь различную физическую природу. Они встречаются не только в оптике, но и в гидродинамике, физике плазмы, нелинейной акустике, сейсмике (некоторые модели землетрясений), физике элементарных частиц и т.д. Пожалуй, впервые слово солитон появилось после 1895 года, когда Кортевег и де Вриза описали распространение нелинейной поверхностной волны на мелкой воде в виде возвышения U ее поверхности [1]. Термин «мелкая вода» здесь обозначает то обстоятельство, что характерная

длина волны возмущения поверхности водной глади значительно превышает глубину водоема.

Уравнение Кортевега – де Вриза (КдВ) можно представить следующим образом

$$\frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} + \beta U \frac{\partial U}{\partial x} + \sigma \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = 0, \quad (1)$$

где a - скорость линейной волны, x - пространственная координата, вдоль которой происходит волновое распространение, t - время.

Первые два слагаемых в (1) описывают бездисперсионное распространение линейной волны, третье слагаемое содержит нелинейность относительно искомой переменной U , а последнее соответствует дисперсии.

Предположим вначале, что дисперсия отсутствует. Тогда, как видно из (1), можно ввести эффективную нелинейную скорость распространения волны с помощью выражения: $a_{ef} = a + \beta U$. Отсюда следует, что гребни волны распространяются быстрее, чем малые возмущения у самой поверхности воды. Это в результате приводит к опрокидыванию волны, которое все мы часто наблюдаем, когда волна набегаёт с моря на берег. Дисперсия способна воспрепятствовать опрокидыванию, так как она, напротив, стремится растянуть волну. Таким образом, солитон есть результат взаимной компенсации или, говоря образно, «мирного сосуществования» нелинейности и дисперсии. Поэтому мы можем написать общую формулу вида

$$\text{СОЛИТОН} = \text{НЕЛИНЕЙНОСТЬ} + \text{ДИСПЕРСИЯ} \quad (2)$$

Этим самым мы хотим отметить, что солитон не обязательно должен описываться уравнением (1). Это могут быть и другие уравнения или системы, но которые обязательно должны содержать нелинейность и дисперсию. Начиная наш рассказ с уравнения КдВ, мы отдаем дань истории. Подчеркнем, что наличие нелинейности и дисперсии является необходимым, но недостаточным условием существования солитонов.

Вернемся снова к уравнению (1). Его решение в виде уединенной бегущей волны может быть записано так:

$$U = U_m \operatorname{sech}^2\left(\frac{x-vt}{2l}\right), \quad (3)$$

где U_m и v - соответственно амплитуда и скорость солитона, связанные с его пространственной длительностью l соотношениями

$$U_m = \frac{3\sigma}{\beta l^2}, \quad v = a + \frac{\sigma}{l^2}. \quad (4)$$

Как видно из (4), чем уже солитон, т.е. чем меньше его длительность, тем больше его амплитуда и скорость. Данное правило можно выразить легко запоминающимся высказыванием:

"ВЫСОКИЙ И ХУДОЙ БЕЖИТ БЫСТРЕЕ, ЧЕМ НИЗЕНЬКИЙ И ТОЛСТЫЙ". (5)

Высказывание (5) является в значительной степени общим для солитонов широкого класса уравнений и систем. Одними из редких исключений здесь являются солитоны нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) (об этом см. ниже).

Отметим здесь неаналитическую зависимость амплитуды солитона от параметра нелинейности β : при $\beta \rightarrow 0$ амплитуда стремится к бесконечности. Это говорит о том, что солитонное решение нельзя получить, основываясь на теории возмущений по параметру нелинейности. Говорят также, что солитоны есть существенно нелинейные решения.

Численные исследования, проведенные в 60-х годах двадцатого столетия с уравнением (1), выявили упомянутое выше упругое взаимодействие солитонов вида (3), (4) друг с другом [2]. Столь интригующие и нетривиальные результаты наводили исследователей на мысль о возможности аналитического описания упругих солитон-солитонных взаимодействий. В 1967 году вышла знаменитая работа Гарднера, Грина, Крускала и Миуры [3], в которой представлен систематический метод решения задачи Коши для уравнения (1). Именно с этой работы берет начало так называемый «метод обратной задачи рассеяния» (МОЗР) интегрирования нелинейных волновых уравнений. Здесь мы не ставим себе целью изложение этого метода, а укажем лишь на весьма нетривиальный факт, от которого данный метод берет

начало. Пусть имеется линейная задача Штурма – Лиувилля на собственные значения, выраженная уравнением

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{6}{\beta\sigma} U(x,t) \right) \psi = \lambda \psi, \quad (6)$$

где λ - собственное значение (спектральный параметр), которому принадлежит некоторая собственная функция ψ . Авторы работы [3] подметили весьма нетривиальный факт: если эволюция «потенциала» $U(x,t)$ подчиняется уравнению (1), то спектральный параметр λ в (6) является независимой от времени константой! А коли так, то она будет неизменна, когда (1) описывает, например, столкновение солитонов между собой или распад начального профиля волны на несколько солитонов. Именно это обстоятельство способствовало разработке систематического метода решения задачи Коши для уравнения (1). Уравнение (6), в отличие от (1), линейно и по своему виду схоже со стационарным уравнением Шредингера, известным из квантовой механики и описывающим рассеяние некоторой воображаемой частицы на потенциале $6U(x,t)/\beta\sigma$. По данным рассеяния, а также по их эволюции, можно восстановить вид и пространственно-временную динамику рассеивающего потенциала $6U(x,t)/\beta\sigma$. Таким образом, решение линейной обратной задачи рассеяния позволяет одновременно решить задачу Коши для уравнения (1). Отсюда становится понятным происхождение названия «метод обратной задачи рассеяния».

В заключение настоящего раздела заметим, что упругое взаимодействие солитонов между собой является следствием так называемой полной интегрируемости соответствующих нелинейных волновых уравнений. Поясним, что это значит, на примере уравнения (1). Заметим, что это уравнение можно переписать в «дивергентной» форме или в виде закона сохранения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0, \quad (7)$$

где «плотность» $\rho = U$, а «ток» $J = aU + \beta U^2 / 2 + \sigma \partial^2 U / \partial x^2$.

Домножим теперь уравнение (1) на $2U(x,t)$. Тогда после простых преобразований снова придем к закону сохранения вида (7), где теперь $\rho = U^2$, а

$$J = aU^2 + \frac{2\beta}{3}U^3 + 2\sigma U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \sigma \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2.$$

Оказывается, для уравнения (1), как и для всех других полностью интегрируемых уравнений и систем, такую процедуру можно продолжать бесконечно [4]. Т.е. уравнения, порождающие солитоны, упруго взаимодействующие между собой, обладают бесконечными наборами законов сохранения.

3. СОЛИТОНЫ САМОИНДУЦИРОВАННОЙ ПРОЗРАЧНОСТИ

Первый оптический солитон наблюдался в экспериментах Мак-Колла и Хана, открывших эффект самоиндуцированной прозрачности (СИП) [5]. Данное явление состоит в следующем: если на резонансную поглощающую среду подать импульс, интенсивность которого превышает некоторое пороговое значение, то импульс сам для себя просветляет среду таким образом, что распространяется в ней без затухания и без изменения своей формы. Качественно такой режим распространения поясняется на рисунке 1.

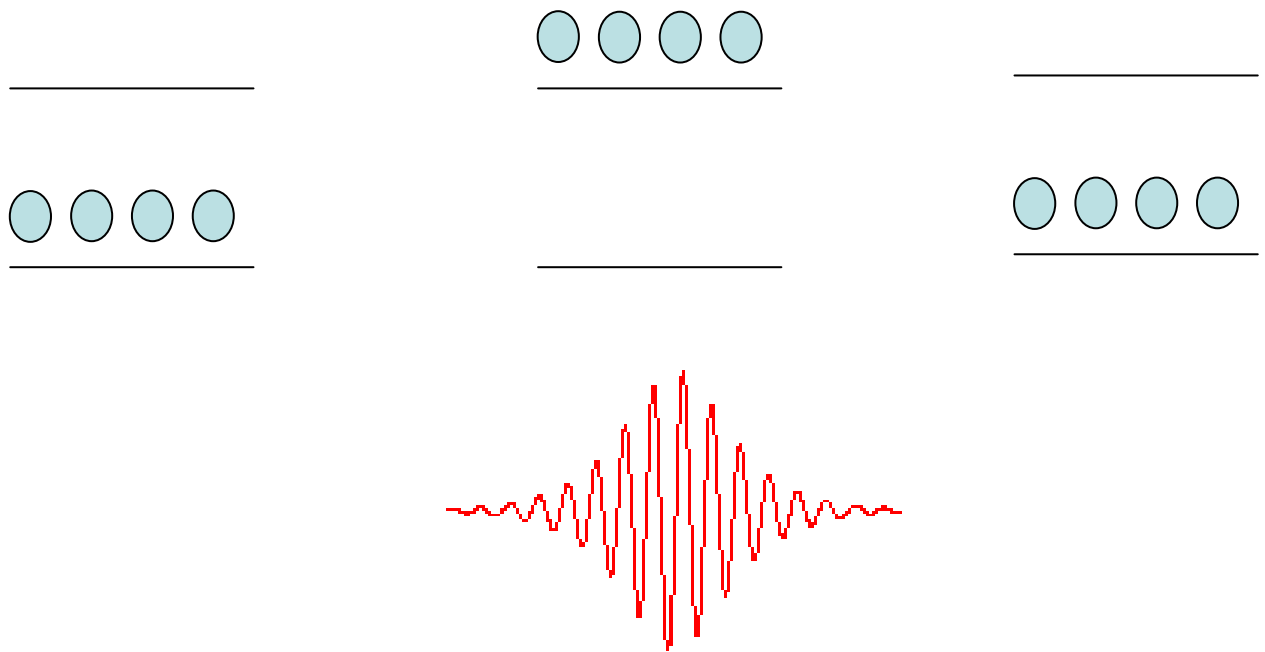


Рис. 1. Распространение импульса (внизу) в режиме СИП: впереди и позади импульса среда находится в основном состоянии, а в месте нахождения импульса – возбужденном.

Передним фронтом мощный импульс переводит атомы среды из основного состояния в возбужденное, а задним - индуцированным образом возвращает их в основное состояние. Таким образом, по мере распространения импульс отдает энергию резонансной среде, а затем возвращает ее обратно. Такой обмен энергией требует времени, а потому приводит к резкому замедлению распространения импульса: скорость распространения может быть на два – четыре порядка меньше скорости света c в вакууме. Среда здесь является резонансной, т.е. частота ω_0 квантового перехода между какими-либо двумя выделенными энергетическими уровнями равна несущей частоте ω импульса. В этом случае атомы можно рассматривать как двухуровневые, отбросив все квантовые уровни кроме обозначенных двух. Динамику двухуровневого атома в поле резонансного оптического импульса можно уподобить маятнику. Основное состояние атома при этом соответствует положению маятника «вертикально вниз», а возбужденное – положению «вертикально вверх». Процессу полного обмена энергией между импульсом и атомом соответствует полный оборот маятника вокруг точки подвеса на угол 2π . Поэтому солитон СИП называют еще 2π -импульсом. Длительность импульса τ_p должна быть короче времен необратимой релаксации, характерных для рассматриваемого квантового перехода. В противном случае явление СИП наблюдать невозможно. В экспериментах Мак-Колла и Хана длительности импульсов лежали в наносекундном диапазоне. Явление СИП наблюдалось также и для пикосекундных лазерных импульсов, но замедление в скорости распространения здесь уже было не столь явным, как в случае наносекундных длительностей.

Математически явление СИП описывается системой волновых и материальных уравнений Максвелла – Блоха:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Omega}{\partial t} = -i\beta R,$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = i\Delta R + i\Omega W, \quad (8)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{i}{2} (\Omega^* R - \Omega R^*).$$

Здесь $\Omega = 2d\varepsilon/\hbar$ - комплексная частота Раби импульса, d - дипольный момент рассматриваемого квантового перехода, \hbar - постоянная Планка, ε - комплексная огибающая электрического поля E импульса, связанная с последним соотношением

$$E = \varepsilon \exp[i(\omega t - kx)] + \text{к.с.}, \quad (9)$$

аббревиатура «к.с.» обозначает комплексное сопряжение, k - волновое число, R - комплексная огибающая нестационарного атомного дипольного момента, индуцируемого полем импульса, W - разность населенностей между возбужденным и основным уровнями атома (инверсия), $\Delta = \omega_0 - \omega$ - отстройка поля импульса от резонанса с квантовым переходом, β - коэффициент, пропорциональный концентрации резонансных атомов.

При выводе системы (8) из исходных уравнений Максвелла и квантовомеханических уравнений для матрицы плотности использовалось приближение медленно меняющихся огибающих (ММО):

$$\left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right| \ll \omega |\varepsilon|, \quad \left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right| \ll k |\varepsilon|. \quad (10)$$

Согласно условиям (10) огибающая поля слабо меняется на периоде несущих оптических колебаний, т.е. является достаточно четко выраженной. Действительно, частота оптических колебаний $\omega \sim 10^{15} \text{ c}^{-1}$. Для наносекундных длительностей число колебаний, содержащихся в импульсе $\sim \omega \tau_p \sim 10^6$, а для пикосекундных $\sim 10^3$. Эти оценки подтверждают выполнение условий (10).

Использование (10) позволило в волновом уравнении Максвелла

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \quad (11)$$

где P - поляризация среды, индуцированная полем импульса, пренебречь вторыми производными от огибающей импульса и редуцировать таким образом данное уравнение к первому порядку относительно пространственной и временной производных.

Система Максвелла – Блоха (8) принадлежит к классу полностью интегрируемых систем, а потому обладает решениями в виде солитонов, упруго взаимодействующими между собой.

В случае точного резонанса ($\Delta = 0$), как легко видеть из (8), частота Раби становится вещественной, а нестационарный дипольный момент – мнимым. Тогда из системы (8) в предположении, что до импульсного воздействия (при $t = -\infty$) все атомы находились в основном состоянии ($W(t = -\infty) = -1$) следует уравнение синус – Гордона (предоставляем возможность убедиться в этом читателю):

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial \tau} = -\beta \sin \theta, \quad (12)$$

где $\theta = \int_{-\infty}^{\tau} \Omega d\tau'$, $\tau = t - x/c$.

Солитонное решение данного уравнения в лабораторной системе координат имеет вид

$$\Omega = \frac{2}{\tau_p} \operatorname{sech} \left(\frac{t - x/v}{\tau_p} \right), \quad (13)$$

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{c} + \beta \tau_p^2. \quad (14)$$

Легко видеть, что полная «площадь» солитона $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega dt' = 2\pi$. Это еще одна причина, по которой солитон СИП называется 2π -импульсом.

Из (13), (14) видно, что и для солитона СИП имеет место правило (5). Кроме того, из (14) следует, что с укорочением импульса замедление в скорости его распространения становится менее явным, что и было зафиксировано экспериментально, как отмечалось выше, для пикосекундных импульсов.

3. НЕРЕЗОНАНСНЫЕ СОЛИТОНЫ ОГИБАЮЩЕЙ

Пусть в изотропной среде распространяется мощный оптический импульс, несущая частота ω которого далека от спектральных линий резонансного поглощения данной среды. В таких условиях нелинейность обусловлена тем, что мощный импульс в месте своего нахождения изменяет показатель преломления среды. Таким образом, общий показатель преломления n_{gen} среды начинает зависеть от интенсивности $I \sim |\varepsilon|^2$ [6]:

$$n_{gen} = n_{\omega} + n_2 |\varepsilon|^2, \quad (15)$$

где n_{ω} - линейный показатель преломления на частоте ω , n_2 - нелинейный показатель преломления.

В таком случае импульсы, абсолютная длительность τ_p которых лежит в достаточно широком интервале от единиц наносекунд до сотен фемтосекунд, хорошо описывается нелинейным уравнением Шредингера (НУШ) [6]

$$i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -\frac{k_2}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \tau^2} + \beta |\varepsilon|^2 \varepsilon. \quad (16)$$

Здесь $\tau = t - z/v_g$, v_g - линейная групповая скорость световой волны на частоте ω , $k_2 = \partial(1/v_g)/\partial\omega$ - параметр дисперсии групповой скорости (ДГС), $\beta = 3\omega n_2/c$ - коэффициент кубической (керровской) нелинейности.

Положительные значения n_2 соответствуют фокусирующей нелинейности среды. Действительно, при $n_2 > 0$ значение n_{gen} возрастает с увеличением интенсивности $I \sim |\varepsilon|^2$ импульса. В центре поперечного сечения данного импульса интенсивность максимальна. Из (15) следует, что здесь также максимально значение n_{gen} . Согласно принципу Ферма, волновые нормали должны загибаться в сторону увеличения n_{gen} , т.е. к центру оптического импульса, что соответствует явлению самофокусировки.

Аналогичные рассуждения приводят к выводу о дефокусирующем характере нелинейности при $n_2 < 0$.

Уравнение НУШ принадлежит к классу полностью интегрируемых и обладает солитонным решением в виде уединенного бегущего вдоль оси x со скоростью v_g импульса:

$$\varepsilon = \frac{1}{\tau_p} \sqrt{-\frac{k_2}{\beta}} \exp\left(i \frac{k_2}{2\tau_p^2} x\right) \operatorname{sech}\left(\frac{t - z/v_g}{\tau_p}\right). \quad (17)$$

Отсюда видно, что при фокусирующей нелинейности ($\beta > 0$) солитонное решение существует в спектральной области аномальной ДГС ($k_2 < 0$). В случае же фокусирующей нелинейности спектр солитона принадлежит области нормальной ДГС, где $k_2 > 0$. Данный вывод является общим и соответствует общим положениям теории солитонов.

Здесь следует отметить еще одно важное обстоятельство. Из (16) видно, что амплитуда солитона НУШ растет с укорочением его длительности, а вот скорость распространения никак не связана ни с амплитудой, ни со скоростью. Т.е. для солитона НУШ не имеет место правило (5). Это одна из причин, по которой нерезонансные оптические солитоны могут найти применения в длинных оптоволоконных линиях передачи информации [6]. Действительно, коль скоро скорость всех солитонов на одной и той же несущей частоте одинакова, то в какой последовательности они будут запущены в оптоволоконную линию, в такой же и подойдут к ее концу. Т.е. в линии не произойдет искажения передаваемой по ней информации.

5. ФЕМТОСЕКУНДНЫЕ СОЛИТОНЫ ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ В НЕСКОЛЬКО ПЕРИОДАХ ОПТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Одной из тенденций развития лазерной физики является создание световых импульсов все более коротких длительностей. Выше речь шла о нано- и пикосекундных солитонах, для которых можно было ввести понятие огибающей и использовать свойство ее медленного изменения на оптическом периоде. В настоящее время можно говорить уже об импульсах длительностью в единицы фемтосекунд, содержащие внутри себя порядка одного или всего нескольких оптических периодов. В отечественной литературе оптические сигналы, содержащие порядка одного периода колебаний получили название предельно коротких импульсов (ПКИ) [7], а в англоязычной литературе – few-cycle pulses (FSP) [8]. В этих

условиях $\omega\tau_p \sim 1$, поэтому уже невозможно ввести понятие огибающей, а следовательно, не имеет никакого смысла говорить об условиях (10). Можно еще сказать так, что в силу малой длительности импульса ширина его спектра сопоставима с его же центральной частотой, которая таким образом перестает иметь смысл несущей. Таким образом, для фемтосекундных импульсов перестает выполняться приближение ММО. Количество перешло в качество. Здесь для аналитического описания импульсной динамики требуется использование каких-либо других приближений или предположений.

Вновь отдавая дань истории, отметим работу [9], где был предложен альтернативный подход описания явления СИП, не использующий приближение ММО. Вместо условий (10) было использовано приближение среды малой концентрации N резонансных атомов, которая входит в правую часть уравнения (11). Количественно условие малой концентрации записывается в виде

$$\frac{4\pi d^2 N}{\hbar\omega_0} \ll 1 . \quad (18)$$

Если правая часть в (11) мала, то свойства среды незначительно изменяются полем оптического импульса. Т.е. нелинейные неоднородности среды, которые создает импульс, относительно малы. А коль скоро так, то можно пренебречь эффектом отражения поля от им же создаваемых неоднородностей. Это позволяет приближенно, в соответствии с (18), исключить из (11) отраженную волну, что соответствует редукции данного уравнения от второго порядка относительно производных к первому. Что и было проделано в []. Данная процедура соответствует приближению однонаправленного распространения (ОНР). Важно заметить, что при ОНР импульс может содержать практически любое количество оптических колебаний: от одного до миллиона. Система, найденная в [9] и получившая название редуцированной системы Максвелла – Блоха (РМБ), имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Omega}{\partial t} &= -b \operatorname{Im} S , \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= i\omega_0 S + i\Omega W , \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= -\Omega \operatorname{Im} S . \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь $\Omega = 2dE/\hbar$, динамический параметр S имеет смысл комплексного нестационарного дипольного момента, коэффициент b пропорционален концентрации рассматриваемых двухуровневых атомов.

Формально система (19) схожа с (8). Принципиальное же различие здесь заключается в том, что в (19) фигурируют не огибающие поля импульса ε и атомного дипольного момента R , а сами поле E и дипольный момент S .

Система (19), как и (8), принадлежит к классу полностью интегрируемых. В числе прочих она обладает решением типа бризера, схематически показанного на рисунке 2, слева. Это двухпараметрическое решение, где в качестве свободных параметров можно взять центральную частоту ω его спектра и длительность τ_p . «Центр масс» бризера распространяется с постоянной групповой скоростью, но при этом его профиль в сопутствующей системе отсчета испытывает периодические пульсации. Данные пульсации обусловлены тем, что помимо групповой скорости v бризер обладает фазовой v_{ph} скоростью. При этом $v_{ph} \neq v$, как и должно быть в диспергирующей среде. Бризер, в отличие от солитона огибающей, может содержать произвольное число колебаний. Если $\omega\tau_p \gg 1$, бризерное решение системы (19) переходит в рассмотренный выше солитон огибающей СИП.

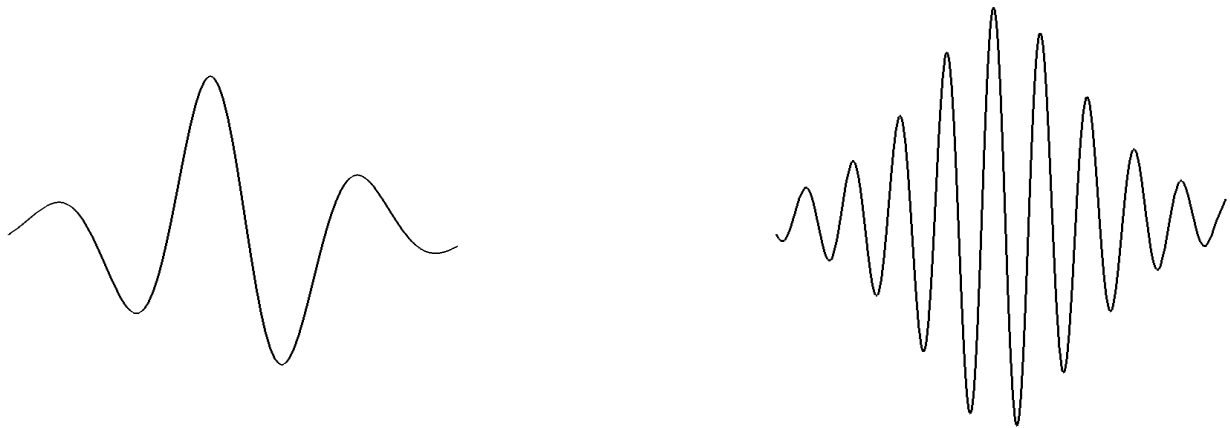


Рис. 2. Характерный профиль электрического поля E , соответствующий бризерному решению системы (19) в сопутствующей системе координат (слева), который при $\omega\tau_p \gg 1$ переходит в солитон огибающей системы (8) (справа).

Таким образом, солитон огибающей СИП в условиях малой концентрации резонансных атомов есть частный случай бризерного решения системы РМБ.

В работах [10, 11] вместо приближения малой концентрации резонансных атомов было предложено использовать приближение спектрального перекрытия (СП):

$$(\omega_0 \tau_p)^2 \ll 1. \quad (20)$$

Смысл данного приближения состоит в том, что спектральная ширина импульса $\delta\omega \sim 1/\tau_p > \omega_0$. Т.е. спектр импульса перекрывает частоту рассматриваемого квантового перехода, а потому возбуждение атомов может быть достаточно сильным.

В [10, 11] показано, что при условии (20) динамика импульса подчиняется уравнению синус – Гордона вида (12). Но теперь усеченная площадь импульса определяется не огибающей его поля, а самим электрическим полем: $\theta = \int_{-\infty}^{\tau} \Omega d\tau' = (2d/\hbar) \int_{-\infty}^{\tau} E d\tau'$. В качестве творческого упражнения можно предложить читателю получить это уравнение из системы (19) при условии (20).

Уравнение синус – Гордона также обладает бризерным решением типа изображенного на рисунке 2, которое в пределе большого числа осцилляций переходит в солитон огибающей самоиндуцированной прозрачности.

Выше в настоящем разделе мы рассмотрели случаи резонансных фемтосекундных солитонов. Под резонансом здесь следует понимать то, что в спектре импульса содержатся фурье-компоненты, резонансные по отношению к возбуждаемым квантовым переходам. Возникает естественный вопрос, а как же описывать фемтосекундные солитоны, которые нерезонансно взаимодействуют со средой? Какое уравнение здесь может стать аналогом НУШ вида (16)? Впервые попытка ответа на данный вопрос была предпринята в [10, 11]. В качестве модели была вновь рассмотрена система двухуровневых атомов. Однако теперь использовалось приближение оптической прозрачности (ОП), противоположное СП:

$$(\omega_0 \tau_p)^2 \gg 1. \quad (21)$$

В этих условиях, как показано в [10, 11], динамика поля импульса описывается модифицированным уравнением Кортевега – де Вриза (МКдВ):

$$\frac{\partial E}{\partial x} - \alpha E^2 \frac{\partial E}{\partial \tau} - \beta \frac{\partial^3 E}{\partial \tau^3} = 0, \quad (22)$$

где, как и прежде $\tau = t - x/c$.

Здесь читателю можно предложить два творческих упражнения. Во-первых, используя условие (21), получить уравнение (22) из системы (19) и найти выражения для коэффициентов α и β . Во-вторых, используя представление (9), показать, что в пределе большого числа импульсных осцилляций, т.е. при $\omega\tau_p \gg 1$ уравнение МКдВ (22) переходит в НУШ вида (16). Таким образом, уравнение (22) обобщает (16) на случай, когда импульс содержит произвольное число осцилляций.

Оказывается, что и уравнение (22) принадлежит к классу полностью интегрируемых [4]! Кроме того, оно также обладает бризерным решением типа изображенного на рисунке 2. Данное решение хорошо описывает few-cycle pulse, а в пределе большого числа осцилляций оно переходит в солитон огибающей НУШ вида (17).

Двухуровневая модель, однако, здесь неудовлетворительна по двум основным причинам. Во-первых, спектр фемтосекундного импульса может быть достаточно широк для того, чтобы во взаимодействие с полем вовлекались другие квантовые переходы, отличные от рассматриваемого. Во-вторых, из данной модели однозначно следует, что $n_2 < 0$ [11]. В то же время для твердых диэлектриков в областях их оптической прозрачности $n_2 > 0$ [12], что соответствует фокусирующему характеру нелинейности.

В работе [7] были предложены полуфеноменологические материальные уравнения, соответствующие фокусирующей нелинейности. При это учитывался как электронный отклик среды, так и ионный. Для электронных переходов $\omega_0 \sim 10^{15} c^{-1}$, а для ионных колебательных мод $\omega_0 \sim 10^{13} c^{-1}$. Тогда при длительности импульса $\tau_p \sim 10\phi c$ для электронно-оптических переходов имеем приближение ОП (21), а для ионных мод – приближение СП вида (21). В этих условиях динамика фемтосекундного импульса в изотропном диэлектрике подчиняется уравнению вида:

$$\frac{\partial E}{\partial x} + \alpha E^2 \frac{\partial E}{\partial \tau} - \beta \frac{\partial^3 E}{\partial \tau^3} + g \int_{-\infty}^{\tau} E d\tau' = 0. \quad (23)$$

Отметим, что все коэффициенты в (23) положительны! При этом условие $\alpha > 0$ соответствует фокусирующей нелинейности (сравните знаки нелинейных членов в (23) и в (22)). Третье слагаемое в левой части (23) соответствует дисперсии электронного отклика, а последнее – дисперсии ионного. При этом электронный отклик дает положительный вклад в дисперсию групповой скорости, а ионный – отрицательный. Если в (23) пренебречь ионной дисперсией, то приходим к уравнению МКдВ, но с разными знаками при нелинейности и дисперсии. В таких условиях данное уравнение не обладает локализованными солитонными и бризерными решениями. С физической точки зрения это означает, что при фокусирующей нелинейности солитоны могут образовываться только в области аномальной ДГС (см. выше). Если в качестве диэлектрика взять кварцевое стекло, то аномальная ДГС соответствует ближнему инфракрасному диапазону [7]. В пределе сильной аномальной ДГС в (23) можно отбросить электронную дисперсию (т.е. положить формально $\beta = 0$). Тогда (23) переходит в уравнение Шеффера, вновь принадлежащее к классу полностью интегрируемых! Понятно, что солитоны и бризеры данного уравнения упруго взаимодействуют между собой.

В [7] было численно получено бризероподобное решение полного уравнения (23) в виде импульса, содержащего порядка полутора оптических колебаний. В работе [13] приближенно найдено соответствующее аналитическое решение. В обеих работах подчеркивается, что для существования такого решения принципиальна роль ионного отклика (интегрального слагаемого в (23)). Здесь приведем лишь выражения для фазовой и групповой скоростей обсуждаемого бризера:

$$\frac{1}{v_{ph}} = \frac{n_0}{c} + \beta(\omega^2 - 3\tau_p^{-2}) - \frac{g}{\omega^2 + \tau_p^{-2}}, \quad \frac{1}{v} = \frac{n_0}{c} + \beta(3\omega^2 - \tau_p^{-2}) + \frac{g}{\omega^2 + \tau_p^{-2}}. \quad (24)$$

Здесь, как и выше, n_0 - безынерционная часть линейного показателя преломления, ω - центральная частота импульсного спектра.

Из выражения для v_g легко видеть, что для фемтосекундных солитонов, вмещающих порядка одного оптического колебания, снова выполняется правило (5). В квазимонохроматическом же пределе ($\omega\tau_p \gg 1$) групповая скорость, как и в случае солитонов НУШ, перестает зависеть от длительности импульса. Нетрудно показать (вновь предоставляем это сделать читателю), что в квазимонохроматическом пределе уравнение (23) переходит в НУШ вида (16).

Далее совершенно естественной представляется попытка обобщения уравнения (23) на оптические кристаллы (анизотропные среды). В [14] предложена теория распространения фемтосекундных оптических импульсов в одноосных кристаллах. Так как в таких кристаллах оптический импульс имеет обыкновенную E_o и необыкновенную E_e компоненты, то его поле следует рассматривать как векторное. Поэтому вместо одного уравнения получаем систему вида [14]:

$$\frac{\partial E_o}{\partial x} + \frac{n_o}{c} \frac{\partial E_o}{\partial t} + a_2 \frac{\partial}{\partial t}(E_e E_o) + a_3 \frac{\partial}{\partial t}(E_e^2 E_o) + \alpha_{3o} E_o^2 \frac{\partial E_o}{\partial t} - \beta_o \frac{\partial^3 E_o}{\partial t^3} + g \int_{-\infty}^t E_o dt' = 0, \quad (25)$$

$$\frac{\partial E_e}{\partial x} + \frac{n_e}{c} \frac{\partial E_e}{\partial t} + a_2 E_o \frac{\partial E_o}{\partial t} + b_2 E_e \frac{\partial E_e}{\partial t} + a_3 \frac{\partial}{\partial t}(E_o^2 E_e) + \alpha_{3e} E_e^2 \frac{\partial E_e}{\partial t} - \beta_e \frac{\partial^3 E_e}{\partial t^3} + g \int_{-\infty}^t E_e dt' = 0. \quad (26)$$

Здесь n_o и n_e - безынерционные части обыкновенного и необыкновенного показателей преломления соответственно; коэффициенты в (25) и (26) зависят от угла φ распространения импульса по отношению к оптической оси кристалла.

В отличие от (23), система (25), (26) содержит, кроме кубической, квадратичную нелинейность, как и должно быть в анизотропных средах. Заметим, что при $\varphi = 0$ система (25), (26) сводится к одному уравнению вида (23). Это понятно, так как распространение вдоль оптической оси равносильно распространению импульса в изотропной среде.

Из (25), (26) видно, что обыкновенная и необыкновенная компоненты импульса входят в данную систему несимметричным образом. Это и понятно, так как в силу одноосной симметрии должна соблюдаться инвариантность относительно операции $E_o \rightarrow -E_o$, а относительно преобразования $E_e \rightarrow -E_e$ инвариантность, вообще говоря, отсутствует. Кроме того из последней системы следует, что обыкновенная компонента импульса играет доминирующую роль, т.е. если на входе $E_o = 0$, то это условие будет выполняться и в самом кристалле. Таким образом, обыкновенная компонента способна за счет нелинейности породить необыкновенную, а необыкновенная – обыкновенную неспособна. Полагая в (25), (26) $E_o = 0$ и ограничиваясь в (26) нелинейностью низшего (второго) порядка, а также учитывая только электронную дисперсию, приходим к уравнению КдВ для необыкновенной

компоненты, с которого мы начали наш рассказ. Таким образом, мы нашли приложение уравнения КдВ в оптике фемтосекундных импульсов.

В заключение настоящего раздела отметим одно явление, связанное с нелинейной оптикой как квазимонохроматических, так и предельно коротких импульсов.

Если в (25), (26) для обыкновенной компоненты воспользоваться представлением квазимонохроматической волны (9) и для нее использовать приближение медленно меняющейся огибающей, а необыкновенную составляющую рассматривать без данного приближения, то приходим к системе вида [15, 16]:

$$i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{k_2}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \tau^2} = -\alpha E_e \varepsilon, \quad (27)$$

$$\frac{\partial E_e}{\partial x} = \beta \frac{\partial}{\partial \tau} (|\varepsilon|^2). \quad (28)$$

Здесь $\tau = t - x/v_g$, v_g - линейная групповая скорость обыкновенной волны, получаемая из (24) в пределе $\omega\tau_p \gg 1$, а коэффициенты α и β выражаются через соответствующие коэффициенты при квадратичных нелинейностях в (25) и (26); параметр k_2 , как и в случае НУШ, имеет смысл коэффициента дисперсии групповой скорости.

При получении (27), (28) использовалось еще очень важное условие, известное в теории нелинейных волн как условие резонанса Захарова – Бенни [17]. В приложении к нашей ситуации данное условие сводится к равенству групповой скорости обыкновенной составляющей фазовой скорости необыкновенной компоненты: $v_g = c/n_e$.

Уравнения (27), (28) известны в теории нелинейных волн как система Ядзимы – Ойкавы [18]. Она также принадлежит к полностью интегрируемым системам!

Анализ солитонного решения (27), (28) показал, что обыкновенная квазимонохроматическая компонента порождает в среде импульс необыкновенной волны без несущей частоты и затем на этом импульсе испытывает рассеяние. Можно говорить как бы о саморассеянии. В результате данного саморассеяния несущая частота импульса обыкновенной волны испытывает сдвиг в красную область, пропорциональный ее же входной интенсивности [16], что иллюстрируется на рисунке 3. Можно сказать, что каждый

фотон обыкновенной волны отдает часть энергии в необыкновенную составляющую, испытывая при этом естественное «покраснение».

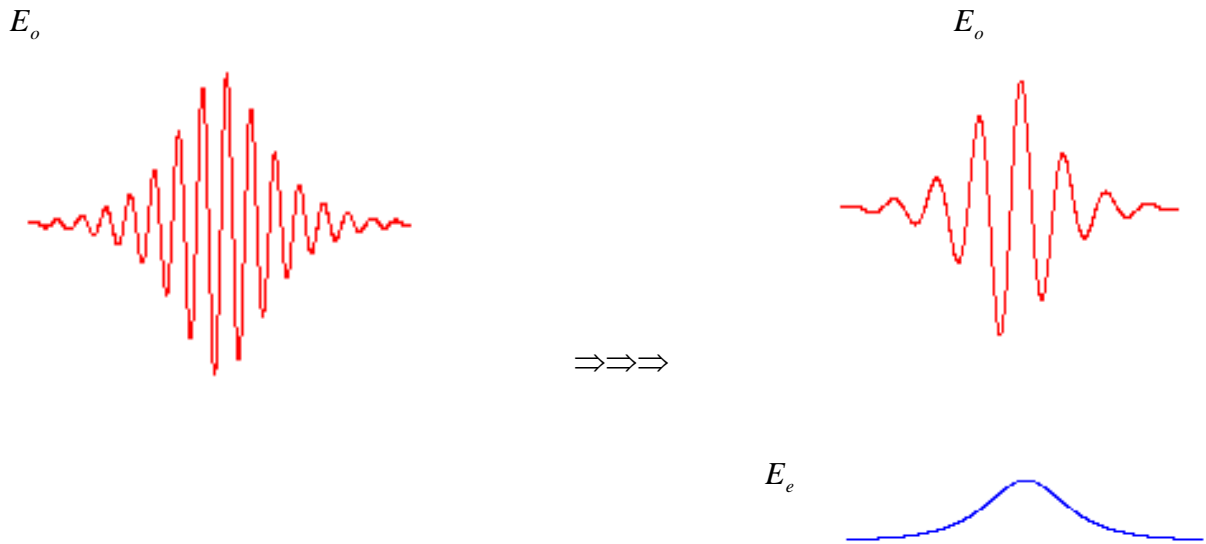


Рис. 3. Схематическое изображение эффекта саморассеяния квазимонохроматического обыкновенного импульса на порождаемом им же необыкновенном импульсе, в результате которого несущая частота обыкновенного импульса смещается в красную область. Широкая стрелка обозначает переход входного импульса (слева) к импульсу в кристалле (справа).

Недавно данный эффект был зарегистрирован экспериментально [19]. При этом порождаемый импульс без несущей частоты трактовался как широкополосный сигнал терагерцового диапазона.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный выше беглый экскурс в оптическую солитонную тематику удивительным образом обнаружил, что очень многие процессы распространения импульсов различных длительностей в различных средах описываются полностью интегрируемыми уравнениями или их системами. На самом деле «в жизни», как это обычно бывает, все значительно сложнее и запутаннее, чем «на бумаге». Мы здесь намеренно рассмотрели лишь одномерные случаи, когда параметры импульса зависят только от одной пространственной

переменной x . В реальных же ситуациях поперечные размеры импульсов конечны и составляют обычно порядка миллиметра. Теоретические модели, в которых учитывается поперечная динамика оптических импульсов, значительно сложнее и не так красивы, как одномерные полностью интегрируемые модели [20]. Однако все не так плохо, если заметить, что продольные размеры рассмотренных выше солитонов значительно меньше соответствующих поперечных размеров. В этих случаях поперечную динамику можно учесть приближенно (например, с помощью вариационного подхода [21]), отталкиваясь от красивых и имеющих глубокий физический смысл одномерных солитонных решений. Здесь, пожалуй, нелишне удивиться тому, столь различные физические ситуации для распространения оптических импульсов от нано- до фемтосекундных длительностей описываются столь же различными, но все же полностью интегрируемыми уравнениями. Может это случайно? Вряд ли. Скорее, здесь присутствует глубокий смысл.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 05 – 02 - 17422).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] D.J. Korteweg and G. Vries, *Phil. Mag.* **39** (1895) 422.
- [2] N.Z. Zabusky and M.D. Kruskal, *Phys. Rev. Lett.* **15** (1967) 240.
- [3] C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal and R.M. Miura, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1095.
- [4] Дж. Лэм, *Введение в теорию солитонов*, М.: Мир, 1983.
- [5] S.L. McCall and E.L. Hahn, *Phys. Rev. Lett.* **18** (1967) 908.
- [6] Г.Агравал, *Нелинейная волоконная оптика*, М.: Мир, 1996.
- [7] С.А. Козлов, С.В. Сазонов, *ЖЭТФ* **111** (1997) 404.
- [8] T. Brabec and F. Krausz, *Rev. Mod. Phys.* **72** (2000) 545.
- [9] P.J. Caudrey, J.C. Eilbeck, J.D. Gibbon and R.K. Bullough, *J. Phys. A* **6** (1973) L53.
- [10] Э.М. Беленов, А.В. Назаркин, *Письма в ЖЭТФ* **51** (1990) 252.
- [11] Э.М. Беленов, А.В. Назаркин, В.А. Ущাপовский, *ЖЭТФ* **100** (1991) 762.
- [12] А.Н. Азаренков, Г.Б. Альтшулер, Н.Р. Белашенков, С.А. Козлов, *Квант. электрон.* **20** (1993) 733.
- [13] С.В. Сазонов, В.А. Халяпин, *Опт. и спектр.* **95** (2003) 452.
- [14] С.В. Сазонов, А.Ф. Соболевский, *ЖЭТФ* **123** (2003) 1160.
- [15] С.В. Сазонов, А.Ф. Соболевский, *Письма в ЖЭТФ* **75** (2002) 746.
- [16] С.В. Сазонов, А.Ф. Соболевский, *Квант. электрон.* **35** (2005) 1019.

- [17] Р.Додд, Дж.Эйлбек, Дж.Гиббон, Х.Моррис, *Солитоны и нелинейные волновые уравнения*, М.: Мир, 1988.
- [18] N.Yajima and M.Oikawa, *Progr. Theor. Phys.* **56** (1976) 1719.
- [19] А.Г. Степанов, А.А. Мельников, В.О. Компанец, С.В. Чекалин, *Письма в ЖЭТФ* **85** (2007) 279.
- [20] Ю.С. Кившарь, Г.П. Агравал, *Оптические солитоны*, М.: Физматлит, 2005.
- [21] A.N. Bugay and S.V. Sazonov, *Phys. Rev. E* **74** (2006) 066608.