

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

---

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
КАФЕДРА ФОТОНИКИ И ФИЗИКИ МИКРОВОЛН

Дифракция на оптически индуцированных неоднородностях.

Курсовая работа  
студента 4 курса  
Гуляева А.А.

Заведующий кафедрой  
фотоники и физики  
микроволн, профессор

---

А.П. Сухоруков

Научный руководитель, профессор

---

А.П. Сухоруков

МОСКВА  
2009

## Содержание:

- ❖ Цель работы
- ❖ История исследований в области фоторефракции
  - Нелинейные эффекты и самовоздействие
  - Фотоника и фоторефракция
- ❖ Физика явления фоторефракции
  - Нелинейное описание оптических процессов
  - Явление фоторефракции
  - Фоточувствительные центры
  - Электрооптические эффекты
  - Эффект Поккельса
  - Электрооптический эффект во внутренних полях
  - Эффект Керра
  - Электронный эффект Керра
- ❖ Уравнение, описывающее стационарную картину дифракции в ФРК на включённой в ФРК неоднородности. Аналогия с гидродинамикой.
- ❖ Уравнения, описывающие распространение и взаимодействие двух пучков в ФРК.
- ❖ Задача по нахождению стационарной дифракционной картины.
  - Численное решение задачи.
  - Описание спектрального метода
  - Результаты численного моделирования
- ❖ Заключение

## Цель работы:

В работе изучается распространение взаимодействующих пучков лазерного излучения через фоторефрактивную среду, в частности, дифракция слабого пучка на оптически индуцированной мощным пучком накачки неоднородности разных диаметров. Целью ставилось выяснение стационарной картины дифракции, а также стационарного фазового распределения поля слабого дифрагирующего пучка в слоях  $z = \text{const}$ , удалённых от места геометрического пересечения начальных траекторий пучков. Была исследована аналогия оптических уравнений дифракции с фоторефрактивной нелинейностью и уравнений гидродинамики сверхтекучей жидкости.

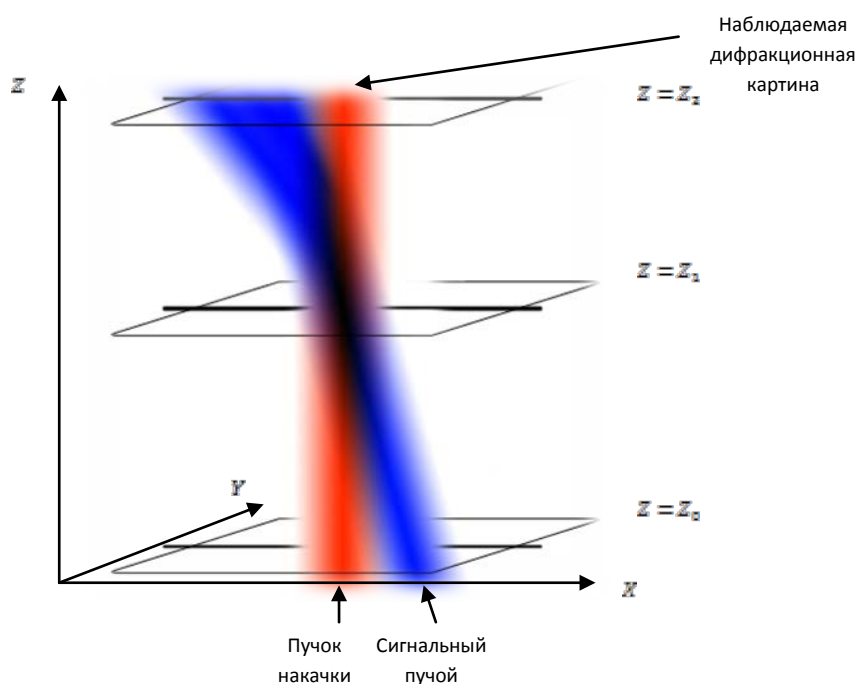


Рис 1.  
Конфигурация оптических пучков излучения в фоторефрактивном кристалле

## История исследований в области фоторефракции

### Нелинейные эффекты и самовоздействие

Одним из важнейших и весьма широких классов нелинейно-оптических эффектов является класс самовоздействий. Самовоздействия проявляются в изменении фундаментальных постоянных нелинейной среды (диэлектрической восприимчивости, коэффициента преломления и т.п.) под действием электрических, магнитных, акустических, тепловых полей. При этом, рассматриваются самовоздействия не в плане «быстрого» (с частотой света) изменения, например, коэффициента преломления в квадратично-нелинейной среде, в которой нелинейная добавка к коэффициенту преломления (вызванная квадратичной поляризованностью) осциллирует пропорционально напряженности светового поля с частотой света, так что средняя за период добавка равна нулю.

Речь идет о самовоздействиях в плане появления средних (за период колебаний) добавок, например, к тому же коэффициенту преломления, т.е. добавок, не имеющих осциллирующих с частотой света составляющих и, следовательно, пропорциональных квадрату модуля амплитуды (т.е. пропорциональных интенсивности) света. Это, в свою очередь, означает, что эффекты самовоздействия должны проявляться на нелинейности третьего порядка в разложении диэлектрической поляризованности по степеням напряженности электрического поля (или во втором порядке в аналогичном разложении коэффициента преломления).

В 1962 г. советским ученым Г.А. Аскарьяном был предсказан один из эффектов самовоздействий — самофокусировка света (или звука) в нелинейной среде. В этой работе был описан сам эффект самофокусировки, заключающийся в создании лучом света (или звука) канала, коэффициент преломления в котором отличается от такового в соседних областях (где поля нет), и появления фокусирующего действия возникшей таким образом «линзы» (свет или звук сам создает себе среду, в которой он распространяется — это самосогласованная задача, не имеющая аналогов в традиционной оптике).

В 1963 г. на Генеральной Ассамблее URSI был представлен доклад от ученых НИРФИ (г. Горький), где в том числе излагались результаты первых строгих теоретических расчетов самофокусировки электромагнитных волн в плазме или стрикционной жидкости; эти расчеты были выполнены В.И. Талановым и опубликованы в детальном изложении в 1964 г.. Несколько позже, но в том же 1964 г. появилась и первая зарубежная работа по теории самофокусировки, выполненная Таунсом с сотрудниками. В этой работе были подтверждены выводы приоритетной работы В.И. Таланова и впервые было указано на существование критической мощности самофокусировки. В 1965 г. Таунс признал приоритет советских ученых Г.А. Аскарьяна и В.И. Таланова в предсказании и теоретическом подтверждении самофокусировки, а в том же 1965 г. советскими учеными Н.Ф. Пилипецким и С.Р. Рустамовым самофокусировка впервые наблюдалась экспериментально. В дальнейшем в 1965 г. В.И. Талановым и П. Келли, в 1966 г. С.А. Ахмановым, А.П. Сухоруковым и Р.В. Хохловым, Я.Б. Зельдовичем и Ю.П. Райзером и др. развивалась теория этого интереснейшего явления. Было развито так называемое без абберационное приближение в теории самофокусировки, базирующееся на параболическом уравнении для полей пучков в слабонелинейной среде (квазиоптический подход). Основной трудностью теории в этот период было естественное и аномально большое (до бесконечности) возрастание интенсивности поля вблизи «нелинейного фокуса», что с очевидностью указывало на необходимость учета других нелинейно-оптических механизмов, которые могут ограничить такое возрастание (нелинейное поглощение, световой пробой, развитие вынужденных рассеяний и т.п.).

### **Фотоника и фоторефракция**

Явление фоторефракции было обнаружено в 1966 г. при изучении прохождения достаточно мощного лазерного луча через электролитические кристаллы  $LiNbO_3$ ,  $LiTaO_3$  и некоторые другие. Оказалось, что под действием лазерного света, освещающего отдельный участок образца, происходило локальное изменение показателя преломления кристалла. Это приводило к искажению волнового фронта луча. Таким образом, луч света портил изначально высокое оптическое качество кристалла: появлялась неоднородность показателя преломления в освещенном участке, что послужило поводом для первоначального названия эффекта: optical damage (оптическое повреждение). Но вскоре обратили внимание и на важные положительные стороны эффекта. Появились предложения о его практическом использовании, и началось его интенсивное исследование. В дальнейшем само явление все чаще стало называться эффектом

фоторефракции. Поскольку при фоторефракции изменение показателя преломления является обратимым, то фоторефрактивные кристаллы стали рассматриваться как реверсивные светочувствительные среды. Это оказалось ценной находкой для инженеров-оптиков, занимающихся голографией и оптической обработкой информации. С другой стороны, изучение природы явления фоторефракции оказалось интересным для физиков-специалистов в области физики твердого тела, полупроводников, когерентной оптики.

В настоящее время наибольший интерес представляет интенсивно развивающееся направление нелинейной оптики: фотоника, изучающая процессы нелинейного взаимодействия оптического излучения, с помощью которых можно реализовывать управление светом с помощью света. В частности, рассматриваются процессы стационарного взаимодействия оптических пучков в фоторефрактивных средах. Среди этих процессов можно выделить процесс оптического переключения направления распространения слабого сигнального пучка с помощью интенсивного пучка накачки, основанный на явлении полного внутреннего отражения от оптически менее плотной среды, созданной искусственно в явлении фоторефракции под действием поля излучения пучка накачки.

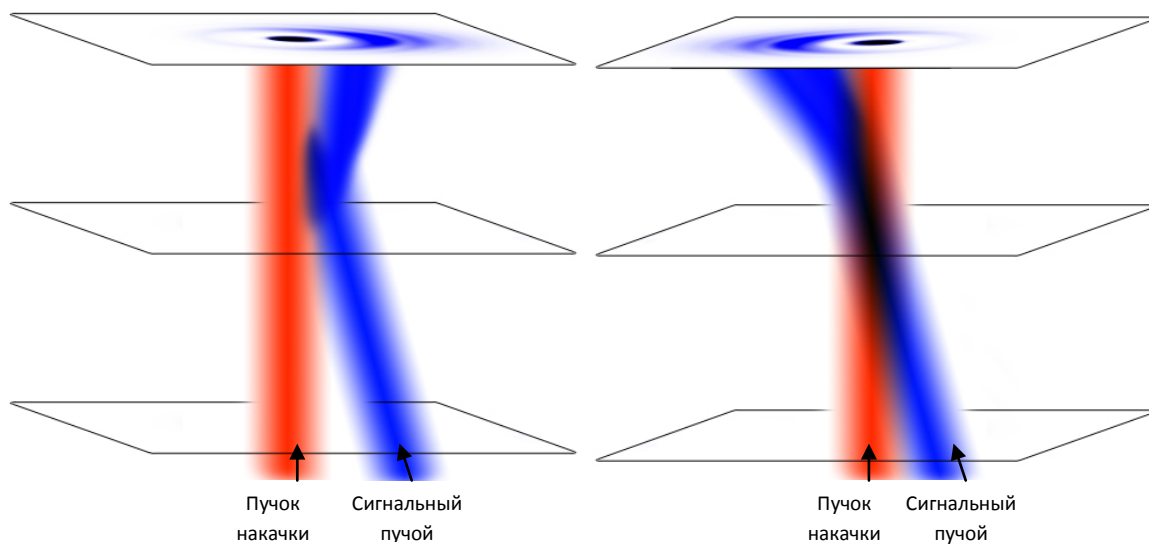


Рис. 2.

Конфигурация оптических пучков в мультиплексоре оптического канала

Рис. 3.

Конфигурация оптических пучков при исследовании поведения решения уравнений гидродинамики

Следует отметить исключительное быстродействие подобных устройств, так например время переключения оптического мультиплексора может быть доведено до времён порядка  $\tau = 5\text{пс}$ , что может увеличить пропускную способность мультиплексоров каналов передачи информации до  $100 \frac{\text{Гбит}}{\text{с}}$ . Помимо явно прикладных задач, фотоника может помочь решению задач научных.

Так, например, процесс взаимодействия двух пучков в фоторефрактивной среде описывается уравнениями, которые могут быть сведены к уравнениям, описывающим поведение сверхтекучей жидкости (в частности, распространение ударных волн). Таким образом, в целях изучения динамики сверхтекучей жидкости, можно построить её оптический аналог (что, естественно, намного дешевле и проще) на основе фоторефрактивного кристалла, и исследовать

интересующую задачу. При этом ось  $z$  направленная вдоль распространения пучка формально становится осью времени для гидродинамического аналога.

## Физика явления фоторефракции

### Нелинейное описание оптических процессов

При описании взаимодействия света с прозрачными средами на макроскопическом уровне среда может быть охарактеризована усреднёнными по времени и по координатам характеристиками: поляризацией  $P$ , показателем преломления  $n$  или диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . При этом эти характеристики могут быть выражены через восприимчивость среды  $\chi$ . В случае малых интенсивностей света, т.е. в линейном приближении, можно ограничиться учётом линейной восприимчивости среды  $\chi^{(1)}$ , что как следствие приведёт к линейным соотношениям:  $P = \chi^{(1)}E$ ,  $n^2 = \epsilon = 1 + 4\pi\chi^{(1)}$ . Но в случае большой интенсивности света становится необходимо рассматривать члены высших порядков разложения поляризации по направлению поля:  $\chi^{(K)}$ . В общем случае для поляризации можем записать:  $P = \chi^{(1)}E + \chi^{(2)}E^2 + \chi^{(3)}E^3 + \dots$ . Относительная роль различных членов разложения в случае с определённой нелинейностью зависит от состояния среды, через которую распространяется свет, частоты, поляризации и интенсивности излучения. Каждая конкретная нелинейная восприимчивость отражает конкретное физическое явление, возникающее в среде под действием излучения высокой интенсивности.

### Явление фоторефракции

Суть эффекта фоторефракции заключается в том, что падающий на кристалл луч света возбуждает в освещённой области фотоэлектроны, которые в результате диффузии или дрейфа в приложенном электрическом поле (либо за счёт фотовольтаического эффекта) уходят из освещённой области. Затем эти электроны захватываются на ловушки в неосвещённых областях кристалла. В результате образуется пространственно неоднородное распределение заряда, а следовательно, и электрического поля внутри образца.

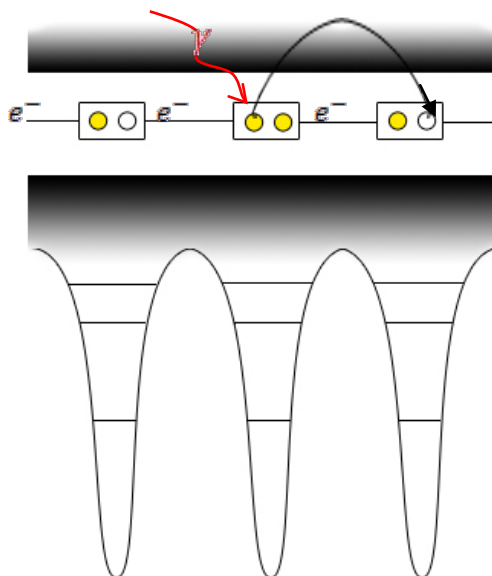


Рис. 4.

Взаимодействуя с фотонами, валентные электроны примеси приобретают энергию, достаточную для перехода в зону проводимости, из которой они уходят, захватываясь ловушками.

Поскольку фоторефрактивные кристаллы обладают электрооптическим эффектом (их показатели преломления зависят от приложенного электрического поля), то в кристалле появляется неоднородное распределение показателя преломления. Таким образом создаётся оптически наведённая неоднородность, эквивалентная обычной неоднородности показателя преломления среды, с той лишь разницей, что, так называемое, оптическое повреждение (optical damage) фоторефрактивного кристалла исчезает с исчезновением поля излучения.

### Фоточувствительные центры

Важнейшим требованием для возникновения явления фоторефракции является возникновение объёмного заряда под действием поля излучения, для реализации последнего требуется наличие примесных центров в запрещённой зоне кристалла – доноров, которые обеспечивают появление электронов при освещении, и центров захвата электронов – глубоких ловушек. Часто донорами и ловушками выступают атомы одного и того же типа но в различном валентном состоянии. На пример: ионы железа  $Fe^{2+}$  и  $Fe^{3+}$  являются донорами и акцепторами электронов в таких кристаллах, как  $LiNbO_3$ ,  $KNbO_3$ ,  $BaTiO_3$ . Ионы железа могут присутствовать в окисных кристаллах либо за счёт естественного содержания примеси железа в исходном сырье, либо благодаря специальному допированию. При освещении кристалла происходит поглощение света примесями  $Fe^{2+}$ , осуществляется ионизация  $Fe^{2+} + e^-$ , и возбуждаемый фотоэлектрон уходит из освещённой области, пока не будет захвачен глубокой ловушкой, в частности, другим ионом  $Fe^{3+}$ , находящимся в неосвещённой части кристалла. Характерные значения фотофозбуждения ионов  $Fe^{2+}$  составляют 3.2-3.1 эВ в кристаллах типа  $LiNbO_3$  и  $KNbO_3$ . Концентрация ионов  $Fe^{2+}$  и  $Fe^{3+}$  может варьироваться в широких пределах:  $10^{16} \div 10^{19} \text{ см}^{-3}$ , причём пропорция между  $Fe^{2+}$  и  $Fe^{3+}$  тоже может изменяться в широких пределах. Надо отметить, что в процессе переноса фотовозбуждённого заряда могут принимать участие не только электроны, но и дырки. Однако, подвижность дырок, как правило, значительно ниже подвижности электронов, в время жизни короче, поэтому их вклад в фоторефракцию обычно мал.

Для сегнетоэлектрических (или вообще полярных) кристаллов важным фактором, влияющим на перенос электронов в отсутствие внешнего поля является фотовольтаический эффект. Суть эффекта состоит в том, что, если при возбуждении электрона вероятность его движения в ту или иную сторону (направление импульса) оказывается анизотропной и возникает некоторое преимущественное движение электронов, приводящее к тому, что в разомкнутом образце появляется результирующее фотонапряжение. Для возникновения фотовольтаического эффекта необходимо, чтобы сам фотоактивный центр не был пространственно симметричным, например, обладал дипольным моментом и чтобы такие центры имели преимущественную ориентацию в кристалле, благодаря которой не происходит полного усреднения в направлении движения фотофозбуждённых электронов. В фотовольтаический эффект столь же важный вклад даёт анизотропия рекомбинации носителей. Необходимые условия для существования фотовольтаического эффекта имеются в полярных кристаллах.

### Электрооптические эффекты

Когда в фоторефрактивном кристалле (ФРК) образуется неоднородное распределение заряда и электрического поля, то, как следствие, возникает и изменение показателей преломления, благодаря электрооптическому эффекту. Исходно ФРК могут быть как оптически изотропными, так и оптически анизотропными. В изотропном кристалле диэлектрическая проницаемость  $\epsilon^\omega$  является скалярной величиной, а показатель преломления  $n = \sqrt{\epsilon^\omega}$  и скорость распространения света ни от направления распространения световой волны, ни от направления или характера её поляризации. В анизотропном кристалле  $\epsilon^\omega$  - тензор. Скорость распространения световой волны, также как и показатель преломления будет в общем случае зависеть как от направления распространения волны, так и от поляризации этой волны. При этом в кристалле может быть одно или два направления, при распространении вдоль которых скорость распространения и показатель преломления не зависят от поляризации волны. Эти направления – оптические оси кристалла. Электрооптический эффект заключается в том, что под действием приложенного электрического поля происходят изменение показателей преломления в кристалле и изменение ориентации его оптических осей. С точки зрения кристаллооптики, в основе электрооптического эффекта лежит зависимость компонент тензора диэлектрической проницаемости  $\hat{\alpha}_{ij}^\omega$  ( $\hat{\alpha}^\omega = (\hat{\epsilon}^\omega)^{-1}$ ) от электрического поля  $E$ . Если связь  $\Delta\alpha_{ij}^\omega$  с  $E$  линейна, то эффект называется линейным электрооптическим эффектом Поккельса, если же связь квадратична – эффектом Керра. Рассмотрим эффект Поккельса.

### Эффект Поккельса

Для существования эффекта Поккельса необходимым условием является отсутствие центра инверсии и кристалле. Линейная связь  $\Delta\alpha_{ij}^\omega$  и  $E$  описывается выражением:  $\Delta\alpha_{ij}^\omega = \sum_l r_{ijl} E_l \equiv r_{ijl} E_l$ , где  $E_l$  - проекция электрического поля ( $l = x, y, z$ ),  $r_{ijl}$  - тензор электрооптических коэффициентов (тензор третьего ранга). Поскольку  $\frac{\Delta\alpha_{ij}^\omega}{\alpha_{ij}^\omega} \ll 1$ , то компоненты тензора диэлектрической проницаемости при этом приобретают вид (в частности, для кубических кристаллов):  $\epsilon_{ij}^\omega(E) = n^2 \delta_{ij} - n^4 r_{ijl} E_l$ , где  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера. Отсюда следует, что в самом общем случае ориентация той системы координат, где тензор  $\hat{\epsilon}^\omega$  диагонален, будет зависеть от направления электрического поля  $E$ , а показатели преломления в этой системе координат:  $n_1 = \sqrt{\epsilon_{11}^\omega}$ ,  $n_2 = \sqrt{\epsilon_{22}^\omega}$ ,  $n_3 = \sqrt{\epsilon_{33}^\omega}$  зависят от величины электрического поля. При приложении поля  $E$  исходно оптически изотропный кристалл:  $n_1 = n_2 = n_3$  может стать одноосным  $n_1 = n_2 \neq n_3$  или двуосным  $n_1 \neq n_2 \neq n_3$ .

Рассмотрим изначально одноосный изотропный кристалл. В одноосном кристалле плоскую световую волну с произвольным направлением распространения и направлением линейной поляризации можно представить в виде суперпозиции нормальных мод. Эти моды являются волнами с взаимно перпендикулярной поляризацией и каждая из них распространяется по кристаллу со своим показателем преломления. Одной из нормальных мод, является такая волна, поляризация которой одновременно перпендикулярна и к оптической оси, и к направлению распространения волны. Эта волна называется обыкновенной и её соответствует обыкновенный показатель преломления  $n_o$ . Вторая мода, после того, как определена обыкновенная волна, уже находится однозначно и называется необыкновенной. Ей соответствует необыкновенный показатель преломления  $n_e$ . При этом  $n_o$  одинаков для всех обыкновенных волн в кристалле, а  $n_e$  зависит от направления распространения необыкновенной волны, кристалл становится



двулучепреломляющим. В случае нормального падения исходной волны на поверхность кристалл и оптической оси, расположенной параллельно поверхности, обыкновенная и необыкновенная волны распространяются внутри кристалла в одном и том же направлении. Если поле приложено вдоль распространения световой волны, электрооптический эффект называют продольным, если же поле перпендикулярно волновому вектору, то эффект поперечный. Для исходно изотропного кристалла без центра инверсии, если поле прикладывается вдоль одной из кубических кристаллографических осей (при этом кристалл становится двуосным с  $n_z = n, n_x = n + \Delta n, n_y = n - \Delta n$ ) для  $\Delta n$  можно получить  $\Delta n = \frac{1}{2} n^3 r_{41} E$ .

### Электрооптический эффект во внутренних полях

Понятия продольного и поперечного электрооптических эффектов сохраняются и в том случае, если электрическое поле наведено фотоэлектронами, образовавшимися вследствие взаимодействия оптического излучения с веществом. Необходимо отметить, что это поле в общем случае неоднородно в образце. А роль внешнего поля становится не столь существенной, оно только обеспечивает дрейф носителей заряда.

### Эффект Керра

Эффект Керра состоит в возникновении оптической анизотропии среды под действием постоянного электрического поля. Т.е. исходная оптически изотропная среда под действием постоянного электрического поля становится анизотропной и двулучепреломляющей. Соответственно под действием поля изменяется исходный показатель преломления. Закон Керра для показателя преломления можно записать следующим образом:  $n_{\parallel} - n_{\perp} = \lambda B(\lambda, T) E^2$ , где  $n_{\parallel}$  и  $n_{\perp}$  - показатели преломления для линейно поляризованного света, распространяющегося параллельно и перпендикулярно вектору  $E$ ,  $B(\lambda, T)$  - константа Керра, характеризующая конкретную среду и зависящая от длины волны света  $\lambda$  и температуры среды  $T$ . Эффект Керра наблюдается лишь для некоторых сред, состоящих из полярных молекул. Типичной керровской средой является нитробензол. Микроскопическая природа эффекта Керра состоит в том, что полярная молекула взаимодействует с внешним полем и ориентируется под действием поля так, что энергия молекулы в поле минимальна. Действие внешнего поля  $E$  на молекулу, имеющую постоянный дипольный момент  $d$ , заключается в возникновении пары сил с моментом  $\vec{M} = [d\vec{E}]$ , вращающим диполь так, чтобы расположить его вдоль поля. Ориентации молекул препятствует из тепловое движение. Таким образом, микроскопические оптические свойства среды зависят от напряжённости внешнего поля и температуры среды. Типичное время ориентации составляет  $10^{-9}$  с. Действие на молекулу излучения оптического диапазона частот сводится к воздействию усреднённого по времени поля излучения  $\langle E^2 \rangle$ .

### Электронный эффект Керра

Оптический или электронный эффект Керра состоит в том, что атомы и молекулы, исходно не имеющие постоянного дипольного момента, приобретают его под действием внешнего поля. Взаимодействие индуцированного дипольного момента с внешним полем происходит аналогично обычному эффекту Керра. Для того, чтобы атом, не имеющий постоянного дипольного момента в отсутствие внешнего поля, приобрёл его под действием поля, индуцированная поляризация

атома должна носить анизотропный характер. В случае молекул анизотропный характер индуцированной поляризации обусловлен исходной анизотропией структуры молекулы. Линейная восприимчивость анизотропной молекулы различна для различных направлений в системе координат, связанной с молекулой. Соответственно линейную восприимчивость можно разложить на составляющие и представить в виде недиагонального тензора  $\chi^{(1)} = \chi_{ij}^{(1)}$ . При этом поляризация во внешнем поле  $E$  описывается соотношением  $P_i = \sum_j \chi_{ij}^{(1)} E_j$ . В общем случае  $P \neq E$  и, следовательно, индуцированная поляризация анизотропных молекул определяется линейной восприимчивостью  $\chi^{(1)}$  и начинает играть существенную роль в относительно слабом внешнем поле.

**Уравнение, описывающее стационарную картину дифракции в ФРК на включённой в ФРК неоднородности. Аналогия с гидродинамикой.**

Для описания процессов дифракции в ФРК необходимо воспользоваться уравнением распространения стационарных пучков, получаемым из уравнений Максвелла при определённых предположения о свойствах пучка, среды и стержня.

Выпишем систему уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{B} = 0 \\ \text{div} \vec{D} = 4\pi\rho \end{cases} \quad (1)$$

В четвертом уравнении дивергенция  $D$  равна нулю в предположении об отсутствии свободных зарядов в среде. В соответствии с этим же предположением  $\vec{j} = 0$ , как ток свободных зарядов. Дрейфовые токи зарядов, появляющиеся как следствие эффекта Погкельса, будем рассматривать как изменение поляризации среды со временем:

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{B} = 0 \\ \text{div} \vec{D} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Теперь необходимо учесть материальные уравнения, связывающие  $\vec{D}$  с  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  с  $\vec{B}$ :

В результате получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{D} = 0 \\ \vec{D} = \varepsilon(\vec{r}) \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{cases}, \quad (3)$$

преобразуем её классическим способом к виду:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{\varepsilon(\vec{r})}{c} \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \operatorname{div}(\varepsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t)) = 0 \end{cases}. \quad (4)$$

В результате получим:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = -\frac{\mu \varepsilon(\vec{r})}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \\ \operatorname{div}(\varepsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t)) = 0 \end{cases}, \quad (5)$$

раскроем теперь левую часть первого уравнения:

$$\begin{cases} \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\mu \varepsilon(\vec{r})}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \\ \operatorname{div}(\varepsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t)) = 0 \end{cases}. \quad (6)$$

В однородной задаче, в которой весь объем рассматриваемого пространства занимает однородная среда, второе уравнение можно привести к виду  $\operatorname{div}(\vec{E}(\vec{r}, t)) = 0$  и как следствие получить классическое волновое уравнение для электрического поля в среде:

$$\Delta \vec{E} = \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (7)$$

Далее можно перейти к уравнению для ММА, будем искать решение уравнения в виде:

$\vec{E} = \vec{A} e^{i(\omega t + \vec{k} \vec{r})}$ , где  $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$  - медленно меняющаяся амплитуда. Получим:

$$\Delta \vec{E} = e^{i(\omega t + \vec{k} \vec{r})} (\Delta \vec{A} + 2i(\vec{k} \nabla) \vec{A} - \vec{A} k^2) \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{A} e^{i(\omega t + \vec{k} \vec{r})}, \quad (9)$$

переходим к уравнению ММА:

$$\Delta \vec{A} + 2i(\vec{k}\nabla)\vec{A} - \vec{A}k^2 = -\frac{n^2(\omega_0)}{c^2}\omega_0^2\vec{A}, \quad (10)$$

где  $n(\omega) = \sqrt{\mu\varepsilon(\omega)}$ .

Далее используем предположение задачи о малом угле скольжения  $\theta$  лазерного пучка, из которого следует, что:

1.  $k_z \gg k_x, k_y$  и следовательно  $|k| \cong k_z$ , тогда:

$$\Delta \vec{A} + 2ik \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} - \vec{A}k^2 = -\frac{n^2(\omega_0)}{c^2}\omega_0^2\vec{A}. \quad (11)$$

2. Дифракция в основном реализуется в перпендикулярной направлению распространения плоскости, считая, что  $|k| \cong k_z$ , т.е. пучок распространяется почти целиком вдоль оси  $z$ , можем переписать уравнение в виде:

$$\Delta_{\perp} \vec{A} + 2ik \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} - \vec{A}k^2 = -\frac{n^2(\omega_0)}{c^2}\omega_0^2\vec{A}. \quad (12)$$

Будем считать направление вектора  $\vec{A}$  неизменным с той же точностью, с которой  $|k| \cong k_z$ , тогда можем перейти к уравнению на амплитуду вектора  $\vec{A}$ .

$$\Delta_{\perp} A + 2ik \frac{\partial A}{\partial z} - Ak^2 = -\frac{n^2(\omega_0)}{c^2}\omega_0^2 A \quad (13)$$

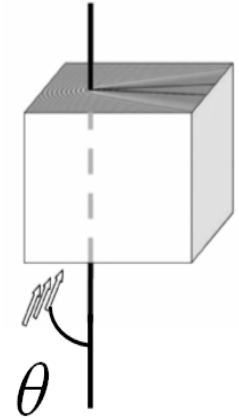
Теперь рассмотрим свойства показателя преломления. Разобьём  $n$  на две части,  $n_0$  постоянную для данной частоты сигнала и  $n_{nl}$  - нелинейную, причём  $n_{nl} = n_{nl}(|A|^2)$ , т.е.  $n_{nl}$  зависит от интенсивности излучения. Перепишем уравнение на ММА в виде:

$$\Delta_{\perp} A + 2ik \frac{\partial A}{\partial z} - Ak^2 = -\frac{(n_0 + n_{nl})^2}{c^2}\omega_0^2 A, \quad (14)$$

или

$$\Delta_{\perp} A + 2ik \frac{\partial A}{\partial z} - Ak^2 = -\frac{n_0^2 + n_{nl}^2 + 2n_0 n_{nl}}{c^2}\omega_0^2 A, \quad (15)$$

отметим, что  $n_{nl}$  является малой добавкой (зачастую не более 1%) к  $n_0$ , и, соответственно, квадратом этой добавки в правой части можно пренебречь. Учитывая, что  $k = \frac{\omega}{v_{\phi}}$ , получим:



$$\Delta_{\perp} A + 2ik \frac{\partial A}{\partial z} - Ak^2 = - \left( 1 + 2 \frac{n_{nl}}{n_0} \right) \frac{\omega_0^2}{v_{\phi}^2} A \quad (16)$$

или

$$i \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{2k_0} \Delta_{\perp} A + \frac{k_0}{n_0} n_{nl} (|A|^2) A = 0. \quad (17)$$

Уравнение

$$i \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{2k_0} \Delta_{\perp} A + \frac{k_0}{n_0} n_{nl} (|A|^2) A = 0 \quad (18)$$

описывает распространение стационарного светового пучка в приближении однородной среды и преобладании поперечной направлению распространению луча дифракции.

Теперь рассмотрим неоднородную в пространстве среду, т.е.  $\varepsilon = \varepsilon(\vec{r})$

$$\begin{cases} \text{grad}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = - \frac{\mu \varepsilon(\vec{r})}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \\ \text{div}(\varepsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t)) = 0 \end{cases} \quad (19)$$

здесь уже нельзя считать, что  $\text{grad}(\text{div} \vec{E}) = 0$ , т.к.  $\varepsilon = \varepsilon(\vec{r})$  и второе уравнение даёт следующее выражение для дивергенции вектора  $\vec{E}$ :

$$\text{div} \vec{E} = - \frac{(\vec{E} \cdot \text{grad} \varepsilon(\vec{r}))}{\varepsilon(\vec{r})}, \quad (20)$$

соответственно, первое уравнение преобразуется к виду

$$- \left( \frac{1}{\varepsilon^2} (\text{grad} \varepsilon) * (\vec{E} \text{grad} \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} [\text{grad}(\vec{E} \text{grad} \varepsilon)] \right) - \Delta \vec{E} = - \frac{\mu \varepsilon(\vec{r})}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (21)$$

Далее можно перейти к уравнению для ММА, если искать решение в виде  $\vec{E} = \vec{A} e^{i(\omega t + \vec{k} \vec{r})}$ ,  $n(\omega, \vec{r}) = \sqrt{\mu \varepsilon(\omega_0, \vec{r})}$ . При этом зависимость  $\varepsilon(\vec{r})$  сведётся в введению формального потенциала  $V(\vec{r})$  в уравнении ММА:

$$i \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{2k_0} \Delta_{\perp} A + \frac{k_0}{n_0} n_{nl} (|A|^2) A + V(\vec{r}) A = 0. \quad (22)$$

В задаче со стержнем в фоторефрактивной среде используем следующий вид нелинейности:  $n_{nl} = - \frac{1}{2} n_0^3 r_{33} E_p \frac{\rho}{\rho + \rho_d}$ , где  $E_p$  - электрическое поле, приложенное к кристаллу,  $r_{33}$  - электро-оптический индекс,  $\rho = |A|^2$  и  $\rho_d$  - параметр насыщения.

Переходя к безразмерным величинам:

$$\tilde{z} = \frac{1}{2} k_0 n_0^2 r_{33} E_p \left( \frac{\rho_c}{\rho_d} \right) z \quad (21)$$

$$\tilde{x} = k_0 n_0 \sqrt{\frac{1}{2} r_{33} E_p \left( \frac{\rho_c}{\rho_d} \right)} x \quad (22)$$

$$\tilde{y} = k_0 n_0 \sqrt{\frac{1}{2} r_{33} E_p \left( \frac{\rho_c}{\rho_d} \right)} y \quad (23)$$

$$\tilde{A} = \sqrt{\rho_c} A, \quad (24)$$

где  $\rho_c$  - характеристическая оптическая интенсивность, получим обобщенное нелинейное уравнение Шредингера (GNLS):

$$i \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{2} \Delta_{\perp} A - \frac{|A|^2}{1 + \gamma |A|^2} A + V(\vec{r}) A = 0, \quad (25)$$

где  $\gamma = \frac{\rho_c}{\rho_d}$ . В общем виде уравнение можно записать в следующем виде:

$$i \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{2} \Delta_{\perp} A - f(|A|^2) A + V(\vec{r}) A = 0, \quad (26)$$

где в нашем случае

$$f(|A|^2) = \frac{|A|^2}{1 + \gamma |A|^2} = \frac{\rho}{1 + \gamma \rho}, \quad (27)$$

где  $\rho = |A|^2$ . (28)

Если насыщение мало:  $\gamma |A|^2 \ll 1$ , тогда это уравнение сводится к стандартному кубическому уравнению Шредингера:

$$i \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{2} \Delta_{\perp} A - |A|^2 A + V(\vec{r}) A = 0, \quad (29)$$

заметим, что  $A$  включает в себя не только амплитуду волны, но и её фазу.

В том случае, когда фаза  $A$  представляет собой однозначную функцию, стандартное кубическое уравнение Шредингера можно переписать в гидродинамической интерпретации, переходя к новым величинам:

$$A(\vec{r}, z) = \sqrt{\rho} \exp(i \int \vec{u}(\vec{r}', z) d\vec{r}'). \quad (30)$$

Получаем:

$$\rho_z + \nabla_{\perp}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (31)$$

$$\vec{u}_z + (\vec{u} \nabla_{\perp}) \vec{u} + \nabla_{\perp} V(\vec{r}) - \nabla_{\perp} \left( \frac{\Delta_{\perp} \rho}{4\rho} - \frac{(\nabla_{\perp} \rho)^2}{8\rho^2} \right) = 0. \quad (32)$$

В гидродинамической интерпретации интенсивность света  $\rho$  приобретает смысл плотности жидкости, таким образом уравнение

$$f(\rho) = \frac{\rho}{1+\gamma\rho} \quad (33)$$

Может рассматриваться как уравнение состояния для такой жидкости. Функция  $\vec{u}(\vec{r}, z)$  - локальное значение компоненты волнового вектора, перпендикулярной к направлению распространения светового луча в гидродинамическом представлении рассматривается как локальная скорость потока жидкости. Переменная  $z$  играет в этом случае роль времени.

### Уравнения, описывающие распространение и взаимодействие двух пучков в ФРК.

Рассматривая вывод обобщённого уравнения Шредингера мы полагали, что неоднородность в ФРК имеет неоптическое происхождение. Однако, используя эффект фоторефракции, можно создавать неоднородность с помощью опорного пучка оптического излучения. Если рассматривать такую задачу в приближении заданного поля, то она сведётся к уже рассмотренной задаче о внесённой искусственно неоднородности, с другой стороны, можно рассмотреть более общую задачу о взаимодействии почти параллельных пучков в ФРК. Запишем уравнения для распространения взаимодействующих пучков в ФРК:

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} - iD_1 \Delta_{\perp} A_1 = \frac{-i\gamma_1 A_1}{1+|A_1|^2+|A_2|^2} \quad (34)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} - iD_2 \Delta_{\perp} A_2 = \frac{-i\gamma_2 A_2}{1+|A_1|^2+|A_2|^2}, \quad (35)$$

где  $z$  - продольная координата, а  $\Delta_{\perp} = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$  - лапласиан в поперечных координатах,

$D_j = \frac{l_0}{2k_j a_j^2}$  - коэффициент дифракции,  $\gamma_j = k_j n_0^2 r_{ef} l_0 E_{ext}$  - коэффициент нелинейности,  $k_j$  -

волновой вектор,  $l_0$  - длина кристалла,  $r_{ef}$  - преобладающая компонента электрооптического тензора,  $E_{ext}$  - внешнее электростатическое поле, приложенное к ФРК перпендикулярно направлению распространения пучка накачки. Эти уравнения описывают дифракцию и фоторефракцию в ФРК, при этом считается, что в электрооптическом эффекте участвуют заряды, переносимые только дрейфовыми токами.

### Задача по нахождению стационарной дифракционной картины.

Зададим входное оптическое поле в виде:

$$A_1 = E_{10} \exp \left( -\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} \right), \quad (36)$$

$$A_2 = E_{20} \exp\left(-\frac{(x-d_2)^2}{a_2^2} - \frac{y^2}{b_2^2}\right) \exp(ik_2 \theta x). \quad (37)$$

Таким образом  $A_1$  - интенсивный опорный пучок,  $A_2$  - сигнальный пучок, распространяющийся под малым углом  $\theta$  - к направлению опорного пучка.

### Численное решение задачи.

Для численного решения описанной задачи рациональнее всего применять спектральные методы решения. Т.к. они наиболее экономичные с точки зрения необходимых для вычисления ресурсов, самосогласованные и, самое главное, они сохраняют основополагающие свойства исходной системы уравнений: сохранение интегралов движения. Выпишем базовые интегралы движения. Энергетический интеграл, описывает сохранение энергии в недиссипативных системах:

$$I_1 = \iint \sum_{m=1}^N |A_m|^2 dx dy \quad (38)$$

Интегралы  $I_2$  и  $I_3$ :

$$I_2 = \iint \sum_{m=1}^N (\varphi_m A_m \nabla A_m^*) dx dy, \quad (39)$$

$$I_3 = \iiint \left\{ \sum_{m=1}^N \varphi_m \left[ D_m \left( \left| \frac{\partial A_m}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial A_m}{\partial y} \right|^2 \right) + \beta_m \text{Im} \left( A_m \frac{\partial A_m^*}{\partial x} \right) + \tilde{P}_m \left| \frac{\partial A_m}{\partial \eta} \right|^2 + v_m \text{Im} \left( A_m \frac{\partial A_m^*}{\partial \eta} \right) \right] + U(A_1, A_2, \dots, A_N, A_1^*, \dots, A_N^*) \right\} dx dy d\eta \quad (40)$$

Кроме того спектральная схема сохраняет соотношения Мэнли-Роу.

### Описание спектрального метода

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{\partial A}{\partial z} - iD \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \right) A = F(A) \quad (41)$$

Будем искать решение в виде:

$$A(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{L_x L_y}} \sum_{k_x=0}^{N_x-1} \sum_{k_y=0}^{N_y-1} u_{k_x k_y}(z) \exp\left(-2\pi i \left[ \frac{k_x x}{L_x} + \frac{k_y y}{L_y} \right]\right), \quad (42)$$

где  $u_{k_x k_y}(z)$  - Фурье образ функции  $A(x, y, z)$  при фиксированном  $z$ ,  $L_x$  и  $L_y$  размеры прямоугольника поперечного сечения кристалла в направлении осей  $x$  и  $y$  соответственно.

Подставив выражение для  $A$  в данном виде, в исходное уравнение, получим:



$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{L_x L_y}} \sum_{k_x=0}^{N_x-1} \sum_{k_y=0}^{N_y-1} \frac{\partial u_{k_x k_y}(z)}{\partial z} \exp\left(-2\pi i \left[\frac{k_x x}{L_x} + \frac{k_y y}{L_y}\right]\right) - \\ & iD \frac{1}{\sqrt{L_x L_y}} \sum_{k_x=0}^{N_x-1} \sum_{k_y=0}^{N_y-1} u_{k_x k_y}(z) \cdot \exp\left(-2\pi i \left[\frac{k_x x}{L_x} + \frac{k_y y}{L_y}\right]\right) \cdot \left[ \left(-2\pi i \frac{k_x}{L_x}\right)^2 + \left(-2\pi i \frac{k_y}{L_y}\right)^2 \right] = F(A) \end{aligned} \quad (43)$$

после чего возьмём Фурье-образ функции  $F(A(z))$  для каждого фиксированного  $z$ , таким образом получим уравнение для Фурье-образов неизвестных функций, однако, стоит заметить, что при переходе к Фурье-спектрам мы автоматически провели операции дифференцирования по поперечным координатам  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{L_x L_y}} \sum_{k_x=0}^{N_x-1} \sum_{k_y=0}^{N_y-1} \frac{\partial u_{k_x k_y}(z)}{\partial z} \exp\left(-2\pi i \left[\frac{k_x x}{L_x} + \frac{k_y y}{L_y}\right]\right) - \\ & iD \frac{1}{\sqrt{L_x L_y}} \sum_{k_x=0}^{N_x-1} \sum_{k_y=0}^{N_y-1} u_{k_x k_y}(z) \cdot \exp\left(-2\pi i \left[\frac{k_x x}{L_x} + \frac{k_y y}{L_y}\right]\right) \cdot \left[ \left(-2\pi i \frac{k_x}{L_x}\right)^2 + \left(-2\pi i \frac{k_y}{L_y}\right)^2 \right] = \\ & \frac{1}{\sqrt{L_x L_y}} \sum_{k_x=0}^{N_x-1} \sum_{k_y=0}^{N_y-1} F_{k_x k_y}(z) \exp\left(-2\pi i \left[\frac{k_x x}{L_x} + \frac{k_y y}{L_y}\right]\right) \end{aligned} \quad (43)$$

Т.к. спектральный базис разложения взаимно попарно ортогонален это уравнение можно записать для каждой двумерной гармоники в отдельности:

$$\frac{\partial u_{k_x k_y}(z)}{\partial z} + iD u_{k_x k_y}(z) \cdot 4\pi^2 \left( \frac{k_x^2}{L_x^2} + \frac{k_y^2}{L_y^2} \right) = F_{k_x k_y}(z), \quad (44)$$

где  $k_x = \overline{0, N_x - 1}$ ,  $k_y = \overline{0, N_y - 1}$ . Обозначим теперь  $\lambda_{k_x k_y} = 4\pi^2 \left( \frac{k_x^2}{L_x^2} + \frac{k_y^2}{L_y^2} \right)$ . Теперь для решения уравнения воспользуемся симметричной разностной неявной схемой с нелинейной неоднородностью:

$$\frac{u_{k_x k_y}^{n+1} - u_{k_x k_y}^n}{h_z} + iD \frac{u_{k_x k_y}^{n+1} + u_{k_x k_y}^n}{2} \cdot \lambda_{k_x k_y} = \frac{F_{k_x k_y}^{n+1} + F_{k_x k_y}^n}{2}, \quad (45)$$

При этом  $F_{k_x k_y}^{n+1}$  за счёт Фурье-преобразования зависит от всех  $u_{lm}^{n+1}$  на последующем слое по  $z$ .

Аналогично дело обстоит и с текущим слоем по  $z$ :

$$\frac{u_{k_x k_y}^{n+1} - u_{k_x k_y}^n}{h_z} + iD \frac{u_{k_x k_y}^{n+1} + u_{k_x k_y}^n}{2} \cdot \lambda_{k_x k_y} = \frac{1}{2} \left( F_{k_x k_y}^{n+1}(\{u_{lm}^{n+1}\}) + F_{k_x k_y}^n(\{u_{lm}^n\}) \right). \quad (46)$$

Теперь остаётся только найти  $u_{k_x k_y}^{n+1}$  для каждой пары  $(k_x, k_y)$  из уравнения вида:

$$u_{k_x k_y}^{n+1} = \mathcal{F}(u_{k_x k_y}^{n+1}). \quad (47)$$

Здесь очевидно эффективно использовать метод простых итераций:

$$s+1 u_{k_x k_y}^{n+1} = \mathcal{F}(s u_{k_x k_y}^{n+1}), \quad (48)$$

который при правильном выборе начальных условий сходится со скоростью геометрической прогрессия. Выпишем окончательные формулы для вычислительного процесса:

$${}^{s+1}u_{k_x k_y}^{n+1} = \frac{\frac{i}{2} \left( F_{k_x k_y}^{n+1} (u_{lm}^{n+1}) + F_{k_x k_y}^n (u_{lm}^n) \right) + \frac{u_{k_x k_y}^n}{\hbar_z} \frac{iD}{2} \lambda_{k_x k_y} u_{k_x k_y}^n}{\frac{i}{\hbar_z} + \frac{iD}{2} \lambda_{k_x k_y}}, \quad (49)$$

где

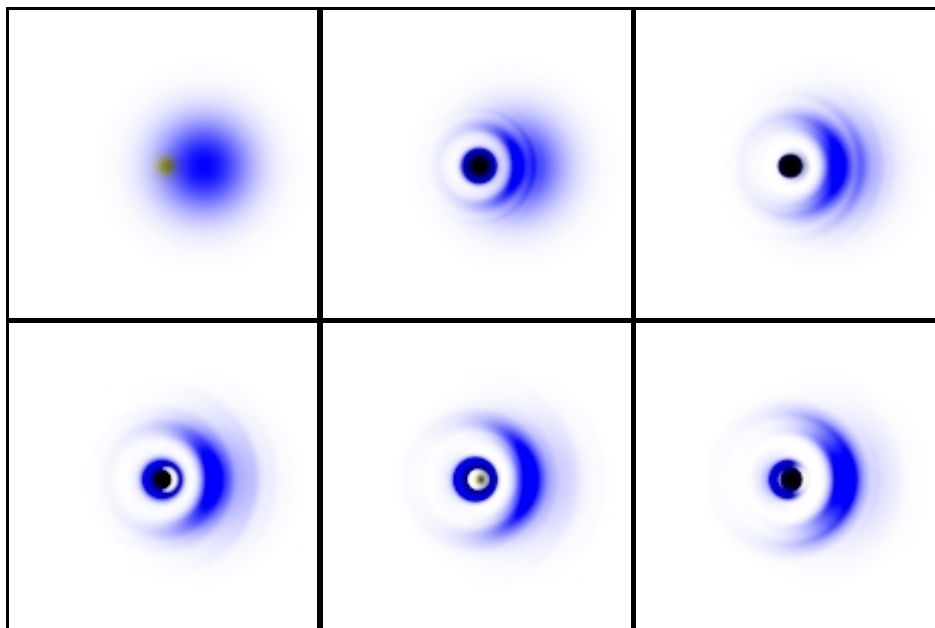
$$\lambda_{k_x k_y} = 4\pi^2 \left( \frac{k_x^2}{L_x^2} + \frac{k_y^2}{L_y^2} \right), \quad (50)$$

$$k_x = \overline{0, N_x - 1}, k_y = \overline{0, N_y - 1}, l = \overline{0, N_x - 1}, m = \overline{0, N_y - 1}. \quad (51)$$

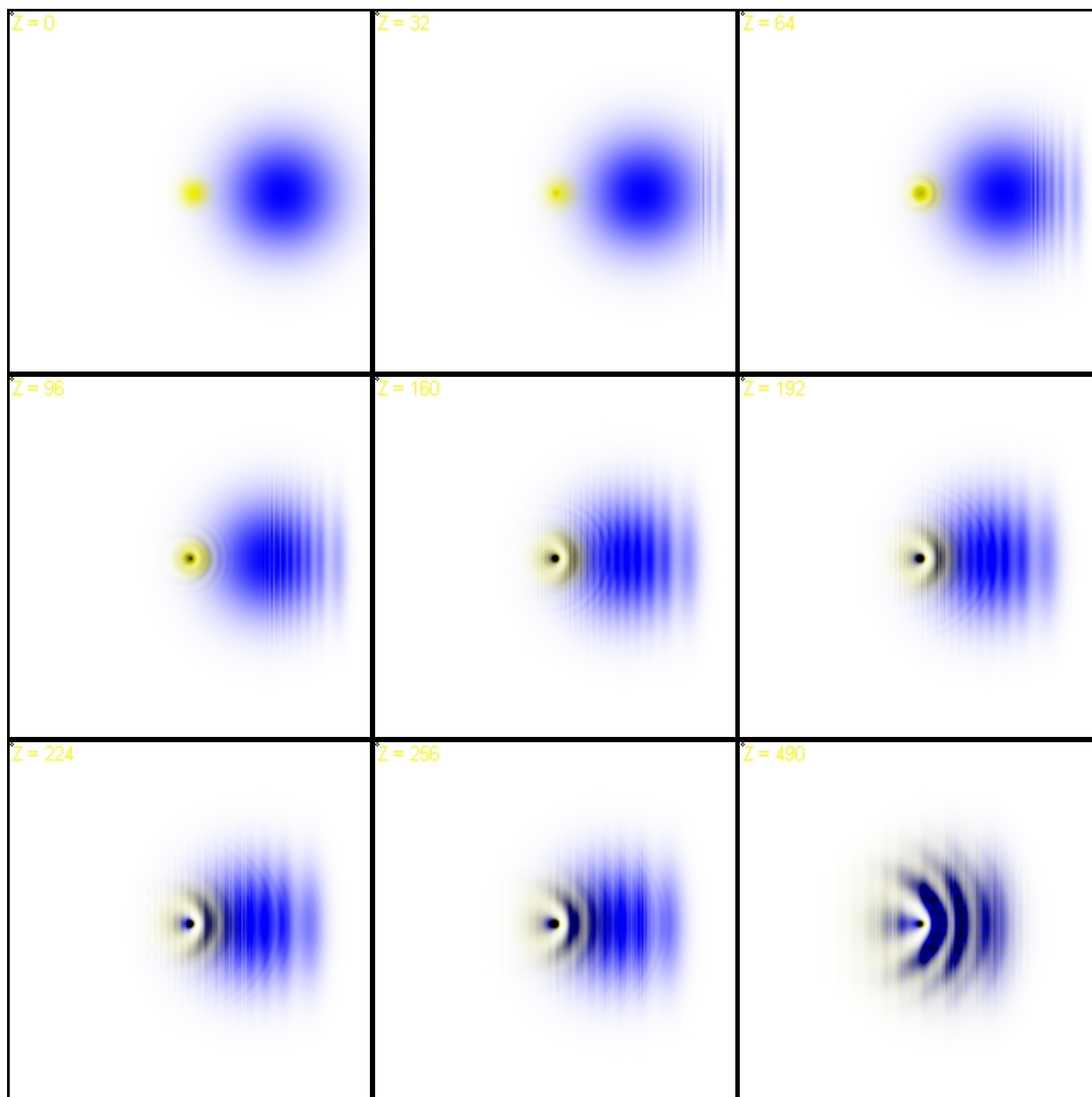
### Результаты численного моделирования

В работе был реализован описанный выше спектральный метод, с помощью написанной программы были получены стационарные картины дифракции пучков в ФРК. Ниже приведены результаты.

Дифракция пучков сравнимых размеров



## Дифракция широкого сигнального пучка.



### Заключение

Целью настоящей работы было изучение распространения взаимодействующих оптических пучков в фоторефрактивной среде. Нами была численно исследована картина дифракции на неоднородности, вызванной мощной оптической накачкой. В теоретической части работы была показана аналогия оптических уравнений с уравнениями, описывающими гидродинамику сверхтекучей жидкости. Стоит отметить, что разнообразие процессов взаимодействия излучения с веществом в нелинейной оптике, позволяет говорить о том, что гидродинамика – не единственная область научных исследований, в исследовании уравнений которой может быть эффективно применён метод замены реальной системы, её оптическим аналогом.

### Список литературы

1. Дж. Каули. Физика дифракции. Перевод с английского. «МИР» Москва 1979г.
2. Н. Бломберген. Нелинейная оптика. Перевод с английского. «МИР» Москва 1966г.
3. И. Б. Делоне. Взаимодействие лазерного излучения с веществом. «НАУКА» Москва 1989г.
4. М.П. Петров, С.И. Степанов, А.В. Хоменко. Фоторефрактивные кристаллы в когерентной оптике. «НАУКА» Санкт-Петербург 1992г.
5. В.Г. Дмитриев, Л.В. Тарасов. Прикладная нелинейная оптика. 2-е изд. «Физматлит» Москва 2004г.
6. И.Р. Шен. Принципы нелинейной оптики. Перевод с английского. «НАУКА» Москва 1989г.
7. В.И. Карпман. Нелинейные волны в диспергирующих средах. «НАУКА» Москва 1973г.
8. E. G. Khamis, A. Gammal // PHYSICAL REVIEW A **78**, 013829 2008
9. G.A. El, A. Gammal // 0706.1112v1 [nlin.PS] 8 Jun 2007
10. Neda Ghofraniha, Claudio Conti // PRL **99**, 043903 (2007)
11. Christopher Barsi, Wenjie Wan // OPTICS LETTERS / Vol. 32, No. 20 / October 15, 2007
12. Wenjie Wan, Shu Jia. Dispersive, superfluid-like shock waves in nonlinear optics.
13. Кабакова И.В., Сухоруков А.П. // Изв. РАН. Сер. Физ. 2006. Т. 72. № 1. С. 8.
14. Выслоух В.А., Кутузов В., Петникова В.М., Шувалов В.В. Формирование пространственных солитонов и пространственных ударных волн в фоторефрактивных кристаллах ЖЭТФ 1997 том 111, выпуск 2 , стр. 705 – 716.
15. В.Е. Лобанов, А.П. Сухоруков // Изв. РАН. Сер. физ. 2005. Т. 69. № 12. С. 1775.
16. М.Б. Виноградова, О.В. Руденко, А.П. Сухоруков. Теория волн. «НАУКА» Москва 1990г.