

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

---

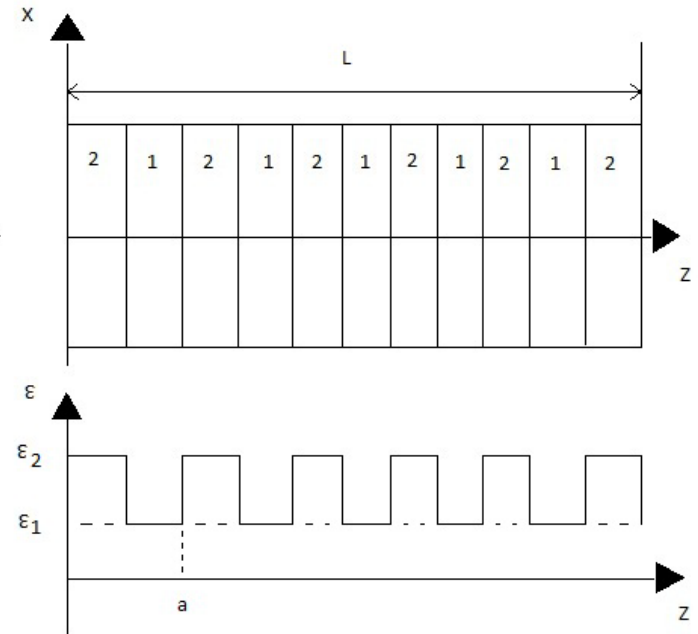
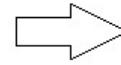
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
КАФЕДРА ФОТОНИКИ И ФИЗИКИ МИКРОВОЛН

# **Дифракция пучка в одномерном фотонном кристалле конечной толщины**

# Периодические структуры

Диэлектрическая проницаемость  
меняется по периодическому закону

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon \cos \frac{2\pi}{a} z$$



## Метод связанных уравнений

+ конечность среды

+ нелинейность

- параксиальное приближение

- слабая нелинейность

- слабая контрастность

$$\frac{k_x}{k} \ll 1$$

$$\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \ll 1$$

## Метод Флоке-Блоха

+ любая контрастность

+ узкие и широкие пучки



- нелинейность

- граничные условия

$$a \approx 5-10\lambda$$

# Цели

1. Исследовать пространственную структуру узкого светового пучка в зависимости от положения его спектра относительно запрещенной зоны периодической структуры конечной толщины
2. Сравнить эффективность метода Флоке-Блоха и модели встречных волн для описания пространственной структуры пучка в фотонном кристалле.

# Поле пучка внутри периодической среды

Временная зависимость

для поля

$$E = E_y e^{-i\omega t}$$

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k_0^2 \varepsilon(z) E_y = 0$$

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon \cos \frac{2\pi}{a} z$$

Интегральное представление

$$E_y(z, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(p) E(z, p) e^{ipx} dp$$

$p = k \sin \theta$ ;  $\theta$  – текущий угол спектральной компоненты

$\Phi(p)$  – Фурье преобразование профиля пучка на входе среды

# Метод Флоке-Блоха

Спектральные компоненты  $E(z, p)$  удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2 E(z, p)}{dz^2} + k_0^2 \left( \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon \frac{2\pi}{a} z \right) E(z, p) = 0$$

Представим решение уравнения в виде

$$E(z, p) = e^{i\mu z} \sum_{l=-1}^0 A_l e^{i \frac{2\pi}{a} lz}$$

## Решение

$$E(z, p) = A_0 e^{-i\frac{2\pi}{d}z} + A_{-1} e^{-i(k - \frac{2\pi}{d})z}$$

$$r_q = \frac{A_{-1}}{A_0} = \frac{iq - \delta}{\varkappa} \quad - \text{отношение амплитуд пространственных гармоник}$$

## Параметры, характеризующие запрещенную полосу

$$\delta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos \Theta - \frac{\pi}{d} \quad - \text{отстройка от центра запрещенной полосы}$$

$$\kappa \approx \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0} \quad - \text{брэгговская связь}$$

$$\delta = \pm \kappa \quad - \text{границы запрещенной полосы}$$

$$q = \sqrt{\kappa^2 - \delta^2} \quad \text{характеризует затухание внутри полосы}$$

Гауссов пучок  $A(x) = A_0 e^{-\frac{x^2}{a^2}}$

Спектр пучка  $\Phi(p) = \frac{A_0}{2\pi} \int e^{-\frac{x^2}{a^2} + ipx} dx = \frac{A_0}{2\pi} e^{-\frac{p^2 a^2}{4}};$

Падение нормальное

Спектр лежит внутри запрещенной  
полосы.

$$\Delta p_{\text{пучка}} \ll \Delta p_{\text{полосы}};$$

# Эволюция гауссового пучка

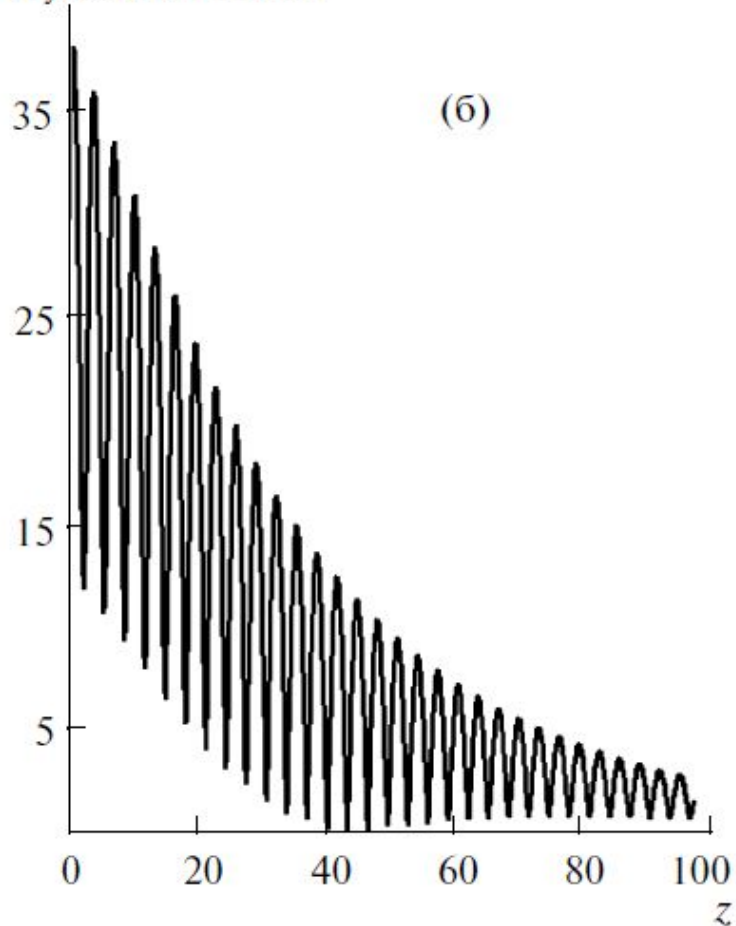
$$a \approx 5\lambda$$

$a$  – нормированный радиус пучка.

Среда полубесконечная,  
контрастность среды:

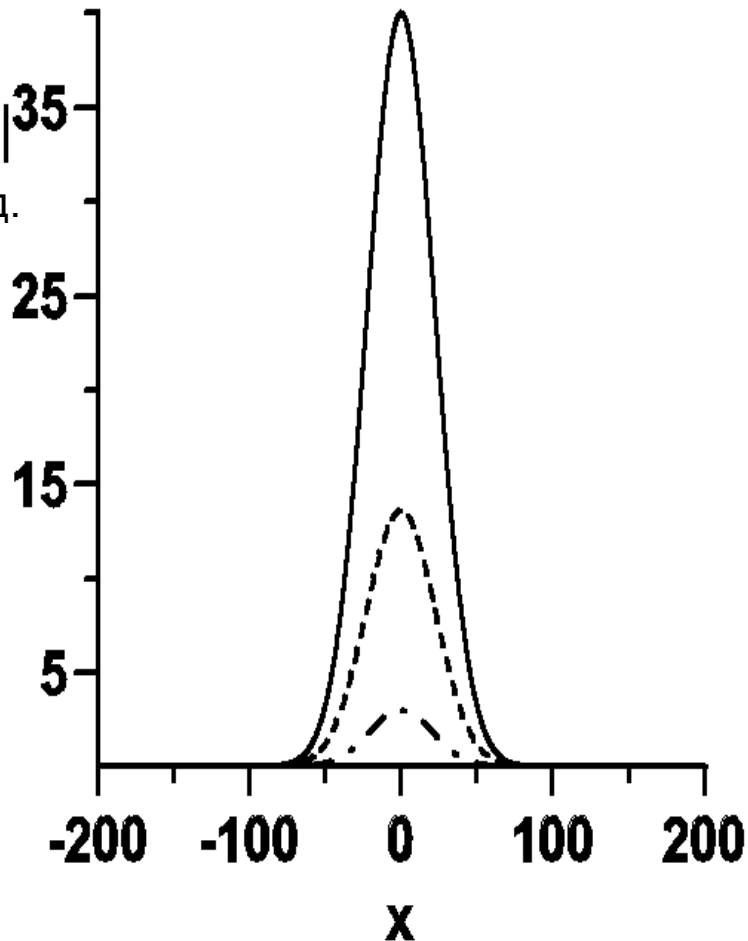
$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0} = 0.06$$

$|E_y(z, x_0)|$ , отн. ед



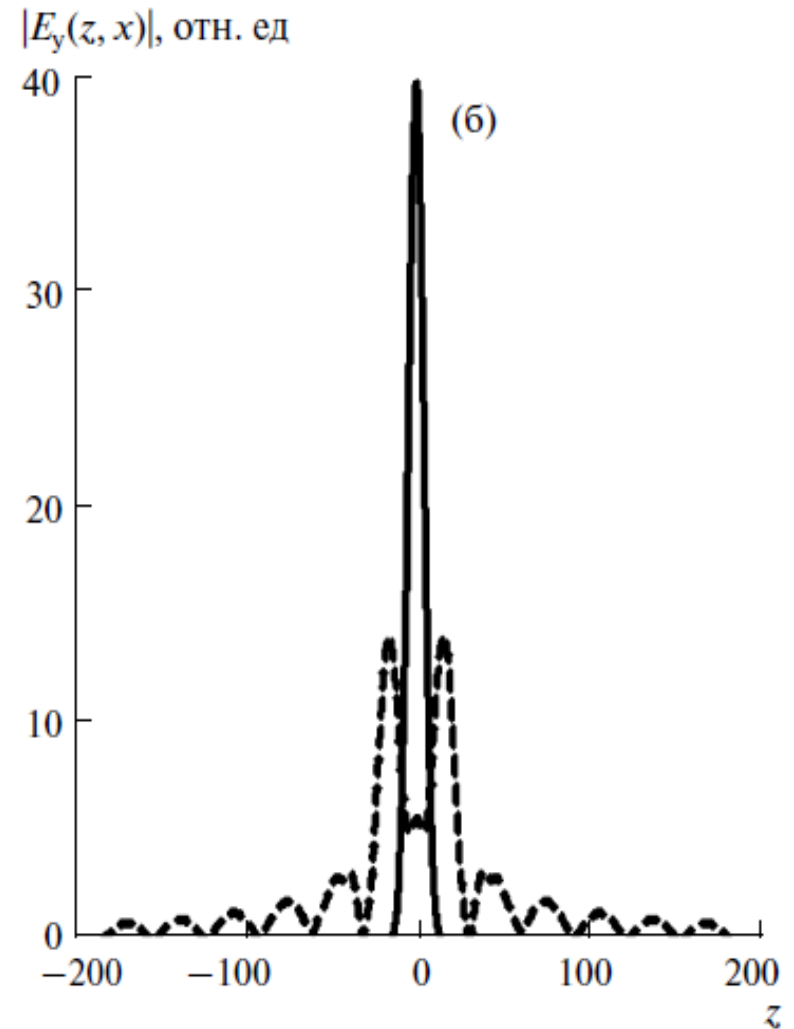
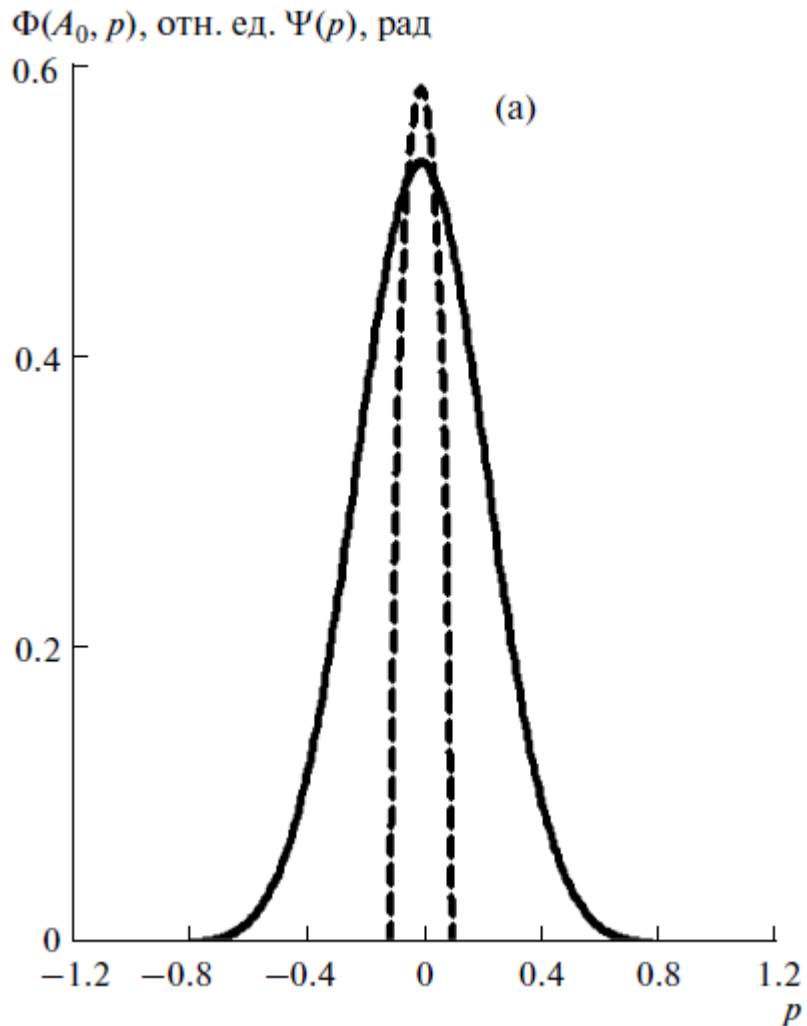
$|E_y(z, x)|$

отн. ед.

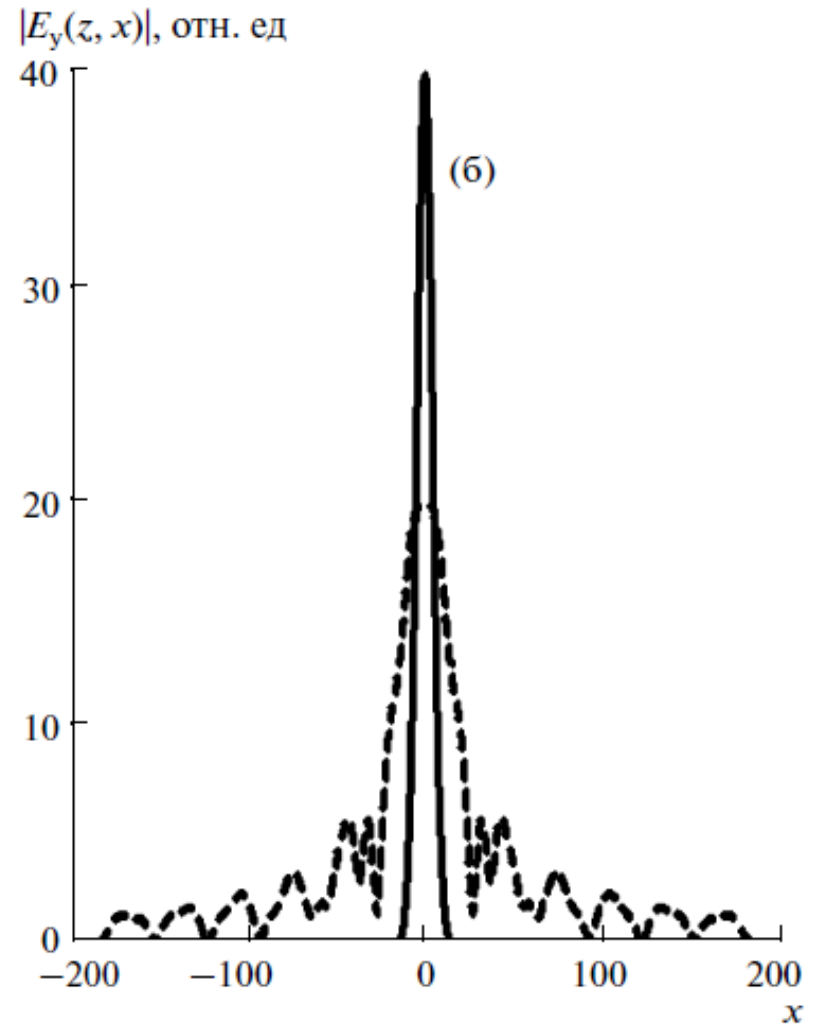
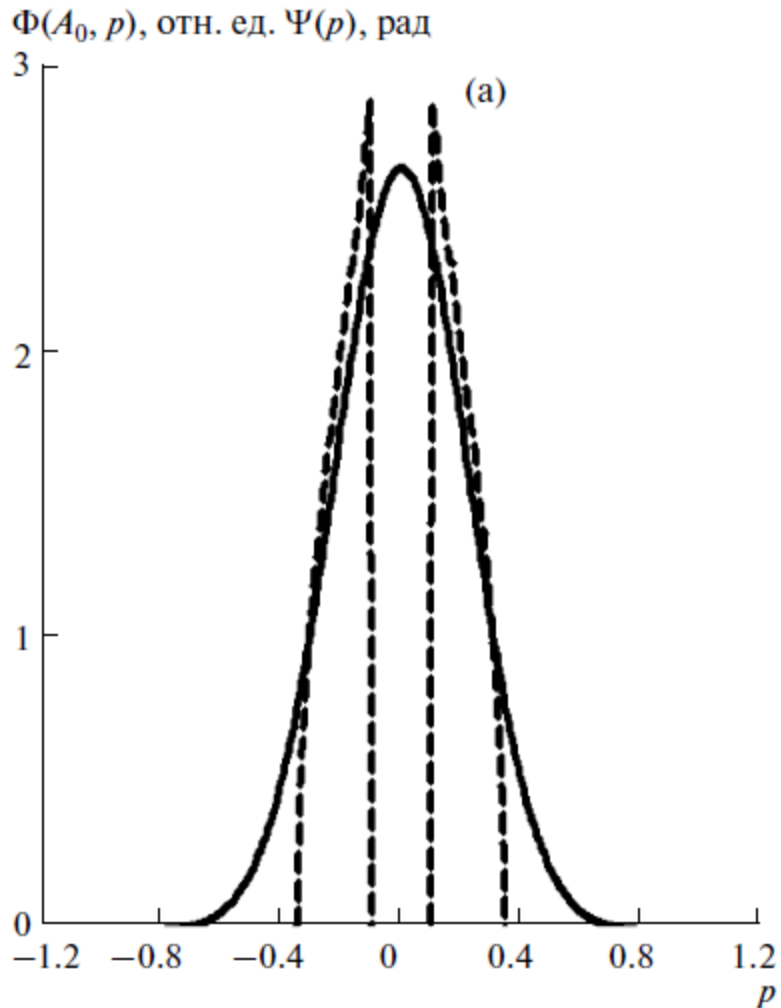




# Распространение пучка вблизи левого края запрещенной полосы периодической структуры



# Распространение пучка вблизи правого края запрещенной полосы периодической структуры



Модулированный пучок  $A(x) = A_0 e^{-\frac{x^2}{a^2} - i\alpha x^2}$

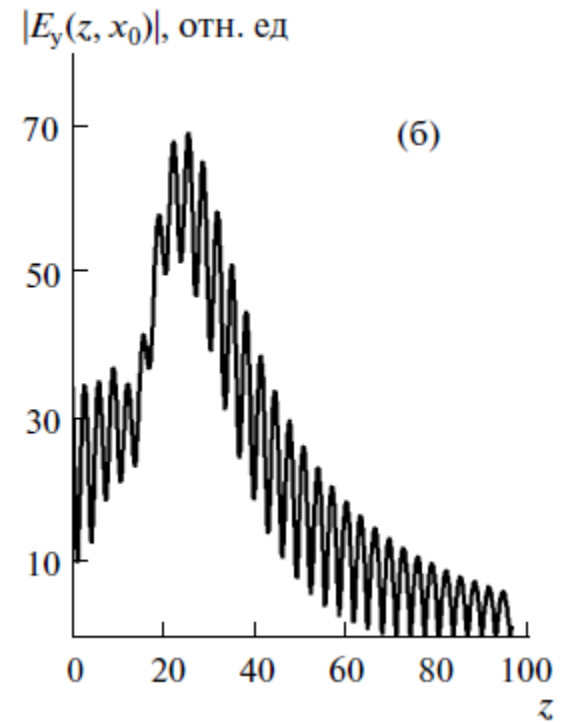
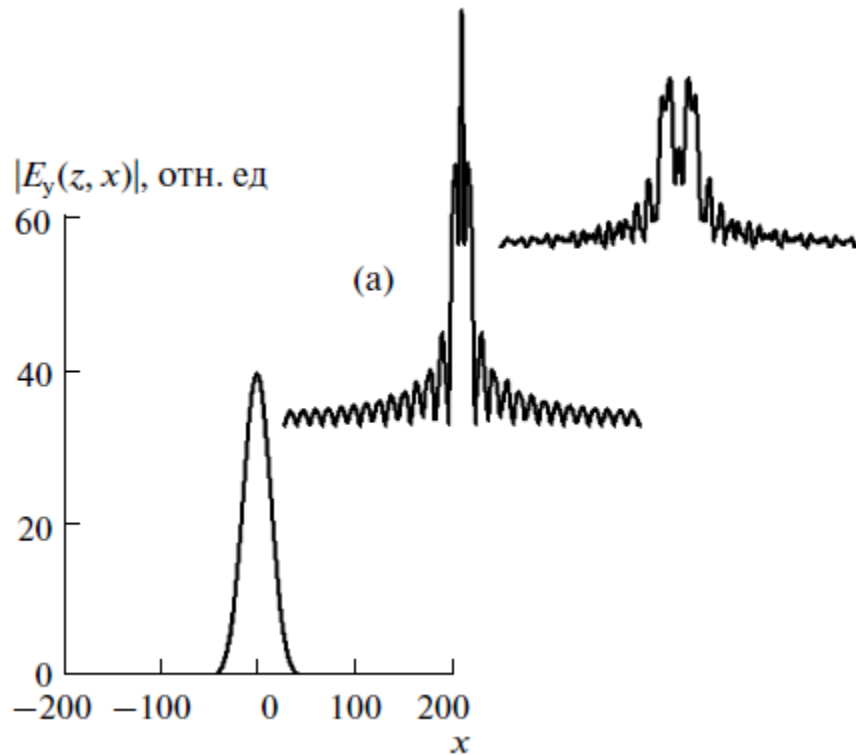
Спектр модулированного пучка

$$\Phi(p) = \frac{A_0}{2\pi} \int e^{-\frac{x^2}{a^2} - i\alpha x^2 + ipx} dx$$

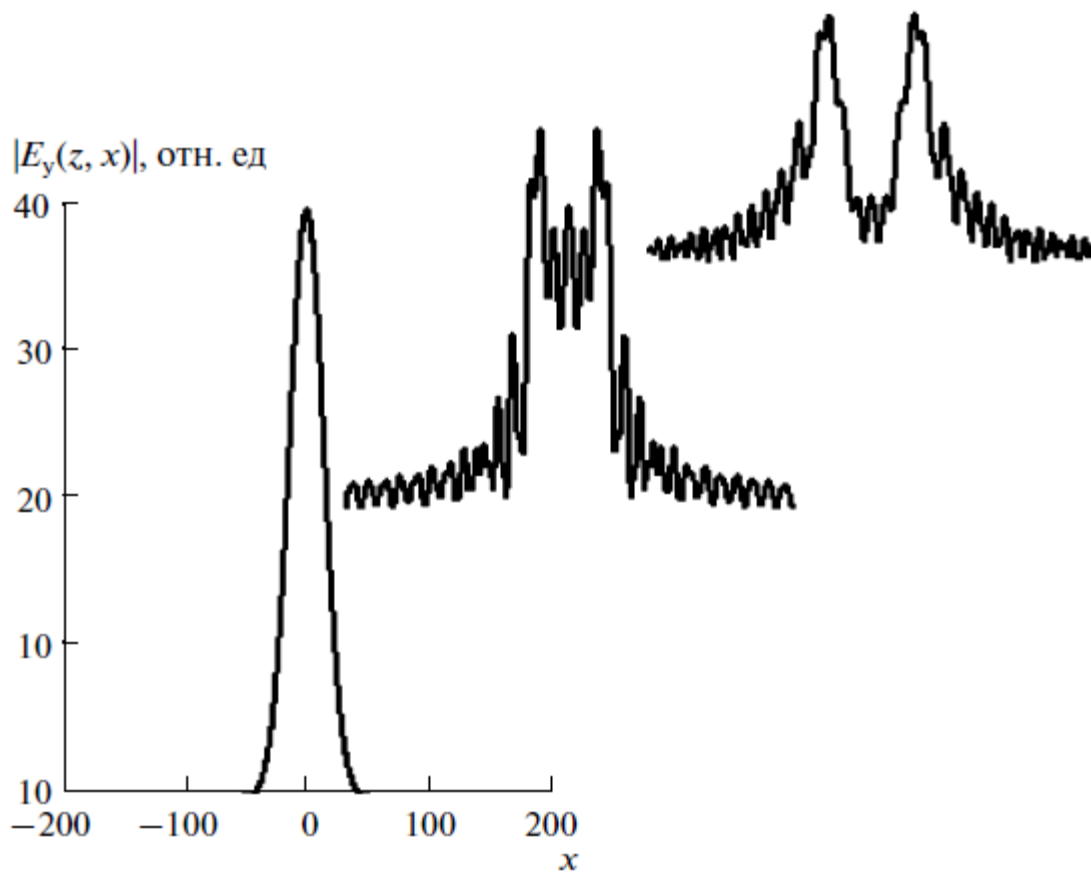
Уширение спектра модулированного пучка

$$\Delta p_{\text{мод.пучок}} \approx \Delta p_{\text{немод.пучок}} \sqrt{1 + \alpha^2 a^4}$$

# Распространение сходящегося пучка в запрещенной полосе периодической структуры



# Распространение расходящегося пучка в запрещенной полосе периодической структуры



# Конечная среда

## Спектральный метод

Поле внутри слоя конечной толщины должно включать как прямые, так и обратные волны Блоха:

$$E_y = [\Phi(z) + \Phi(-z)] = A_0 e^{-qz} \left[ e^{i\frac{\pi}{d}z} + r_q e^{-i\frac{\pi}{d}z} \right] + B_0 e^{qz} \left[ e^{-i\frac{\pi}{d}z} + r_q e^{+i\frac{\pi}{d}z} \right]$$

В области  $z < 0$  поле представим как сумму падающей и отражённой волны:

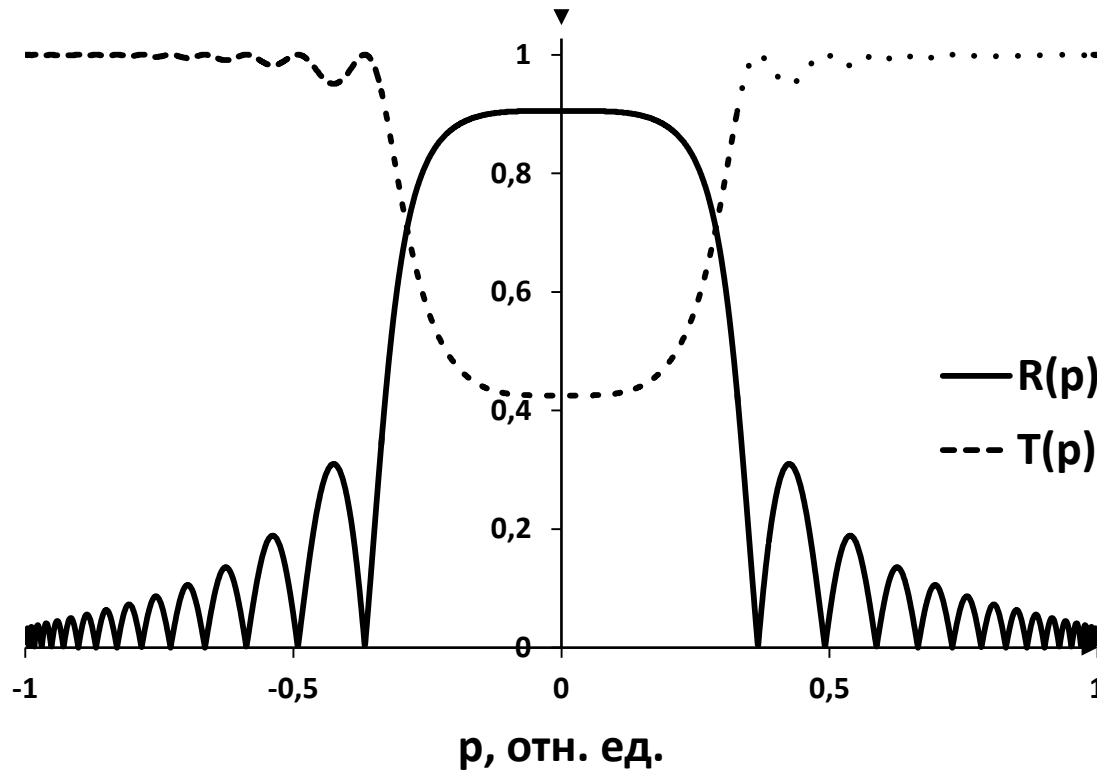
$$E_y^{(1)} = A_{пад} e^{ik_0 \sqrt{\varepsilon_0} z} + A_{отр} e^{-ik_0 \sqrt{\varepsilon_0} z}$$

Для  $z > l$  решение представляем в виде

$$E_y^{(2)} = A_{прош} e^{ik_0 \sqrt{\varepsilon_0} (z-l)}$$

# Коэффициенты отражения и прохождения

$$R = \frac{A_{отр}}{A_{пад}} = \frac{i\alpha \operatorname{sh}(ql)}{q \operatorname{ch}(ql) - i\delta \operatorname{sh}(ql)} \quad T = \frac{A_{прош}}{A_{пад}} = \frac{q e^{-i\frac{\pi l}{d}}}{q \operatorname{ch}(ql) - i\delta \operatorname{sh}(ql)}$$

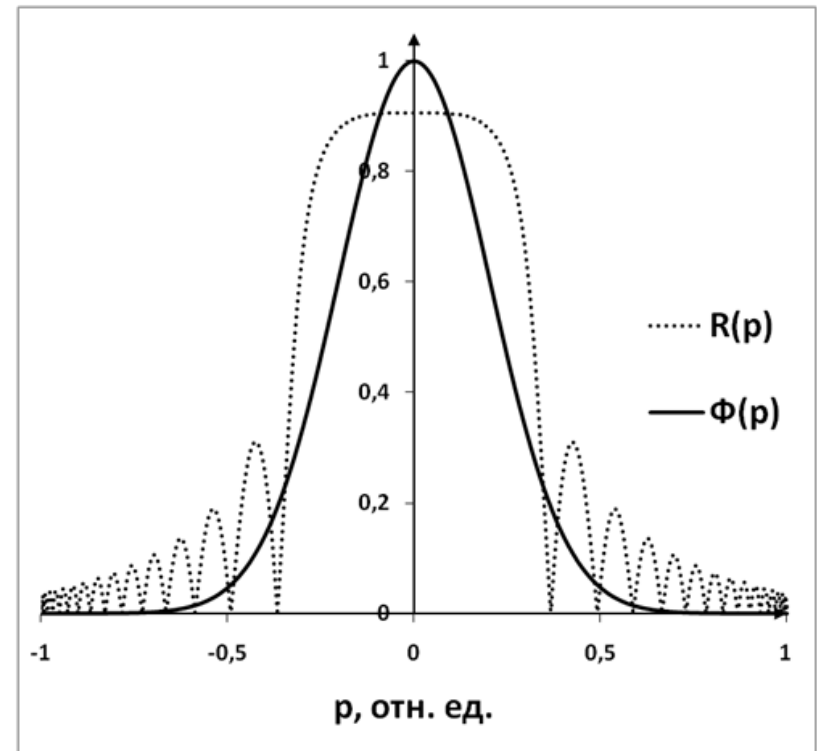
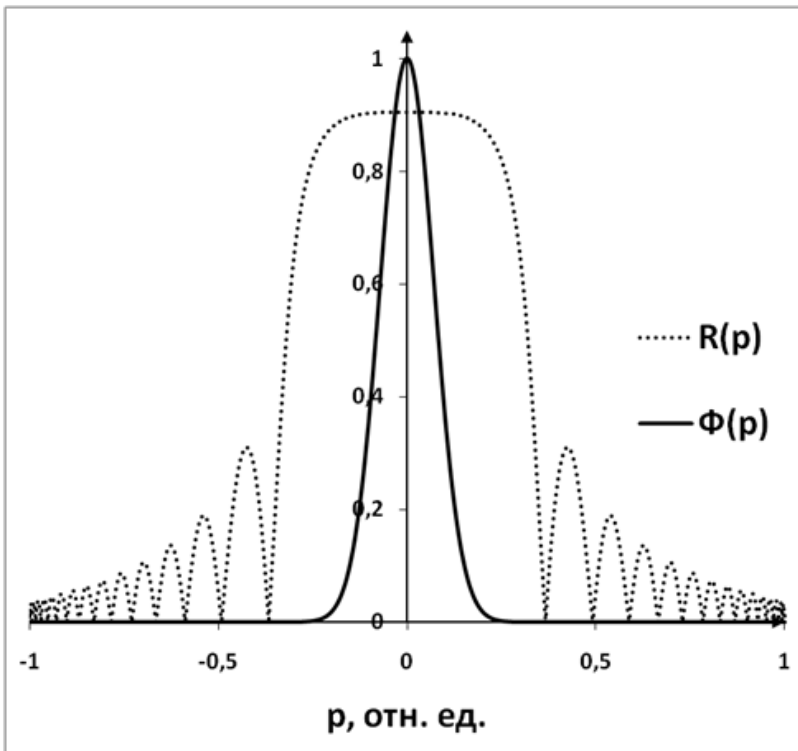


В полубесконечной среде  $R = r_q = \frac{iq - \delta}{\alpha}; T = 0;$

# Прошедшая и отраженная волны

$$A_+(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(p) T(p) \exp[-ipx] dp \quad A_-(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(p) R(p) \exp[-ipx] dp$$

Спектр пучка может быть уже или шире запрещенной полосы





## Уравнения связанных волн

$$\begin{cases} \frac{\partial A_+}{\partial z} + \frac{i}{2k} \frac{\partial^2 A_+}{\partial x^2} + i\delta A_+ + i\kappa A_- = 0; \\ -\frac{\partial A_-}{\partial z} + \frac{i}{2k} \frac{\partial^2 A_-}{\partial x^2} + i\delta A_- + i\kappa A_+ = 0; \end{cases}$$

$A_+, A_-$  - соответственно амплитуды прямой и обратной волн

$\delta$  – отстройка от центра запрещенной полосы

$\kappa$  – брэгговская связь

Представим  $A_+, A_-$  в виде

$$A_{\pm}(z, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\pm}(p, z) \exp[ipx] dp;$$

Система уравнений для  $F_{\pm}$

$$\begin{cases} \frac{\partial F_+}{\partial z} - i\left(\delta + \frac{p^2}{2k}\right)F_+ - i\kappa F_- = 0; \\ -\frac{\partial F_-}{\partial z} - i\left(\delta + \frac{p^2}{2k}\right)F_- - i\kappa F_+ = 0; \end{cases}$$

Граничные условия

$$\begin{cases} F_+(0) = F_{10}; \\ F_-(l) = 0; \end{cases}$$

Решение для прямой и обратной волн, соответственно

$$A_+(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} F_+(p, z) \exp[ipx] dp \quad A_-(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} F_-(p, z) \exp[ipx] dp$$

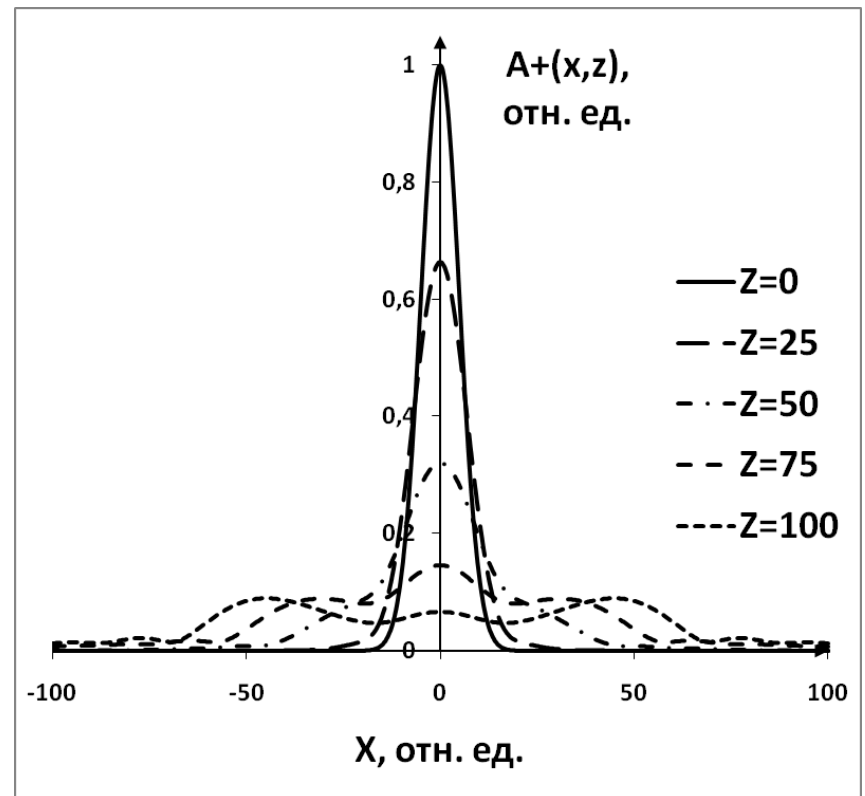
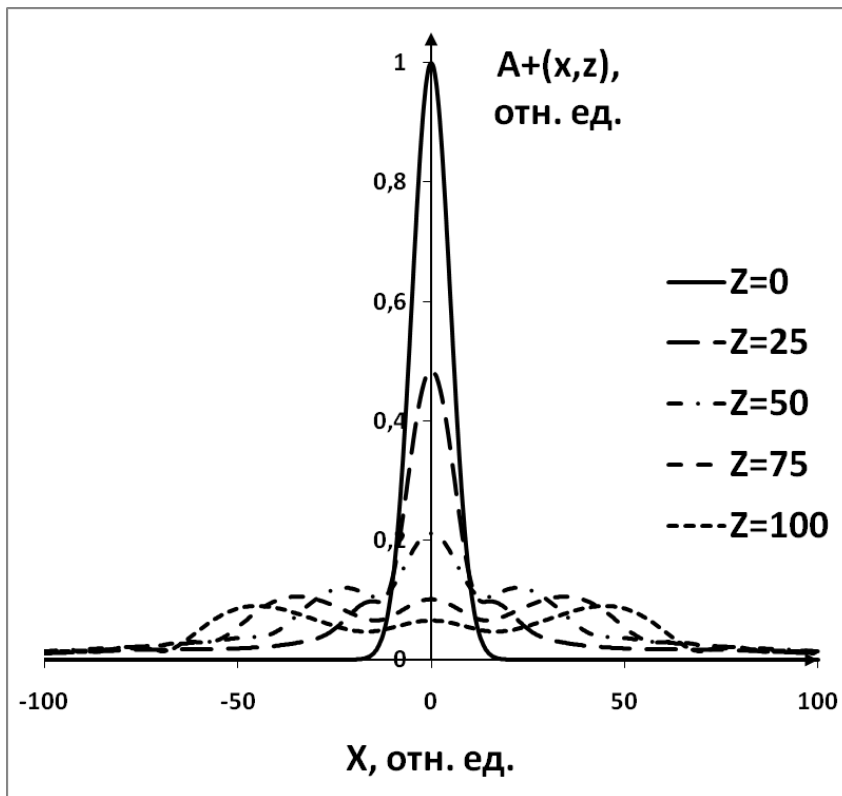
# Сравнение методов

Случай, когда спектр пучка шире щели

Метод связанных волн

Карра=0.03

Спектральный метод

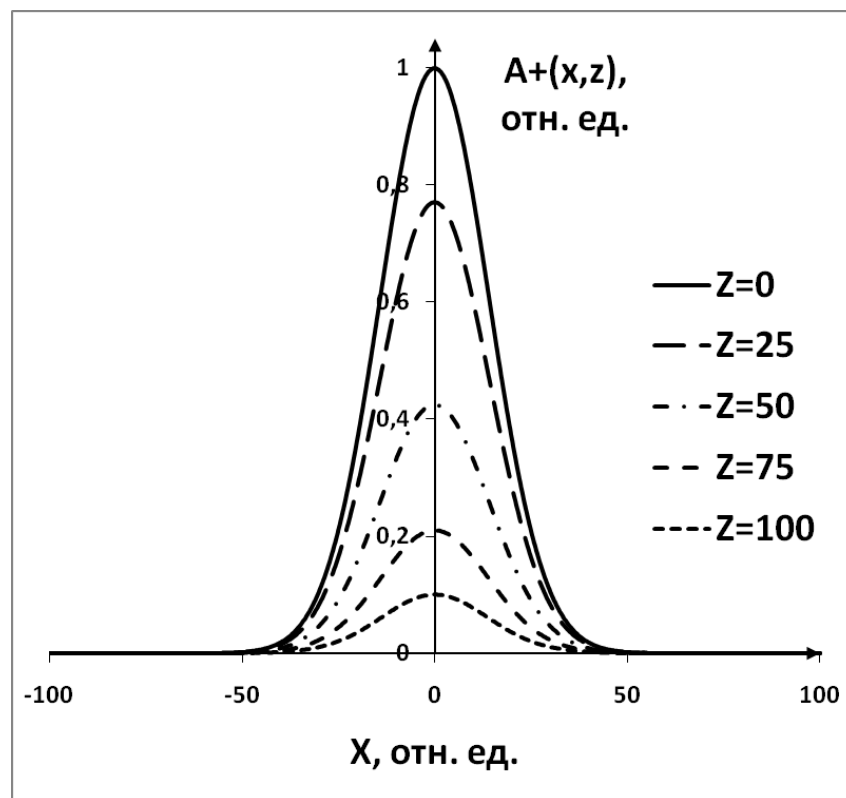
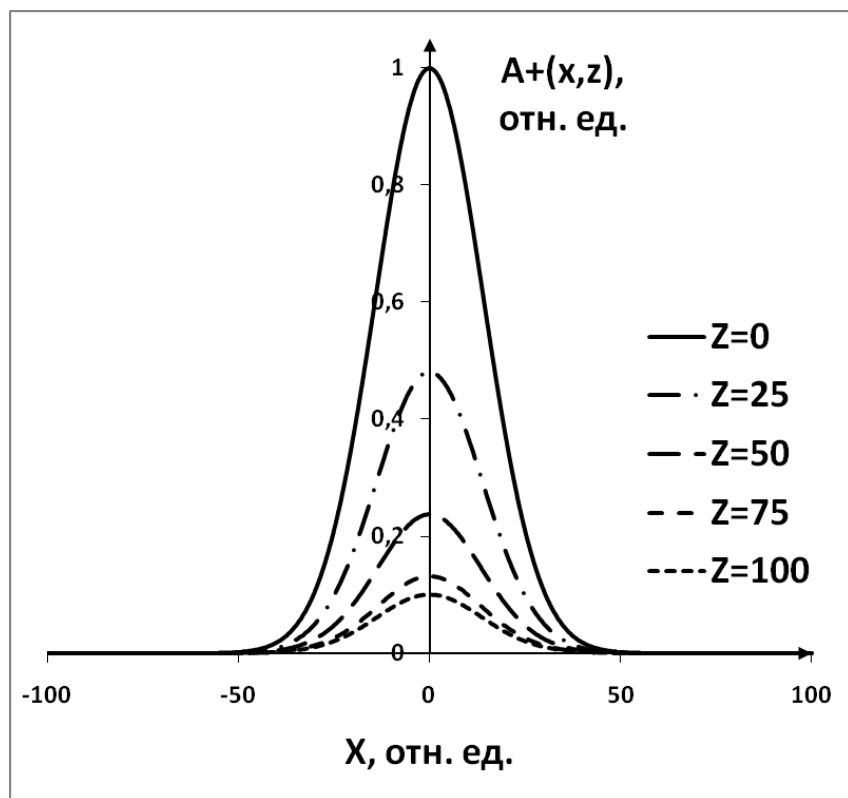


# Случай, когда спектр пучка уже щели

Метод связанных волн

Карра=0.03

Спектральный метод



# Выводы

1. На примере одномерного фотонного кристалла с помощью численного моделирования рассмотрены особенности распространения узких световых пучков в запрещенной области как полубесконечной периодической структуры, так и структуры конечной толщины. Полученные в работе расчетные формулы позволяют оценить структуру поля в различных точках внутри кристалла.
2. Показано, что для полубесконечной структуры в различных точках запрещенной частотной полосы имеют место искажения исходного гауссового профиля пучка: от раздвоения в окрестности левой границы до дифракционного уширения вблизи правой.
3. В центре брэгговской полосы возможны фокусировка и дефокусировка пучков с заданным радиусом фазового фронта. Фокусировка тем эффективнее, чем большая часть спектра пучка оказывается вне запрещенной зоны. Глубина пространственной модуляции поля вдоль оси значительно уменьшается в области фокусировки. В отличие от однородной среды в запрещенной полосе после сжатия пучок распадается на два расходящихся пучка.
4. Показано, что при распространении пучков в одномерном фотонном кристалле конечной толщины основные зависимости изменения пространственной структуры пучка от положения его спектра относительно запрещенной полосы сохраняются. Из-за резонансных свойств появляется дополнительная изрезанность профиля пучка.
5. Сравнение результатов, полученных с помощью спектрального метода и с помощью решения связанных уравнений, учитывающих дифракционную расходимость пучков, показало качественное совпадение для пучков с апертурой  $5 \div 10$  длин волн