Билет №32

1. Энтропия термодинамической системы. Термодинамические потенциалы.

Второе начало термодинамики (ТД) - для любой равновесной ТД системы существует однозначная функция ТД состояния $S = S(\Theta, V, N)$, которая называется энтропией:

$$dS = \frac{\delta Q}{\Theta} \qquad (1)$$

Дополнительно: для всякого неквазиклассического процесса происходящего в ТД системе:

$$dS > \frac{\delta Q}{\Theta} \qquad (2)$$

где δQ - кол-во поглощенного системой тепла при неравновесном переходе из одного состояния в другое близлежащее такое, что $dS = S_2 - S_1$. Как следствие, при условии $\oint dS = 0$, получаем неравенство Клаузиуса:

$$\oint \frac{\delta Q}{\Theta} < 0$$

Из неравенства Клаузиуса и определения энтропии следует закон возрастания энтропии - энтропия адиабатически изолированной системы не уменьшается.

Третье начало ТД - при $\Theta \to 0$ энтропия системы $\lim\limits_{\Theta \to 0} S(\Theta, V, a, N) = 0$.

Обратимые процессы:

1) Равенство Клаузиуса:

$$\oint dS = 0 = \int \frac{\delta Q}{\Theta}$$

2) Аддитивность S

$$S = S(\Theta, V, a, N) = N{*}s(\Theta, v, a)$$

3) Подставив равенство (1) в первый закон ТД:

$$\Theta dS = dE + pdV + adA - \mu dN$$

следовательно $S = S(E, V, a, N)$ - сосуд с адиабатически изолированными стенками.

$$\frac{1}{\Theta} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{VaN},\ \frac{p}{\Theta} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{EaN},\ \frac{\mu}{\Theta} = \left(-\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{EVa}$$

Термодинамические потенциалы:

1) Свободная энергия: $F = E - \Theta S$

$$dF = -Sd\Theta - pdV - Ada + \mu dN$$
$$F = F(\Theta, V, a, N)$$
$$S = \left(-\frac{\partial F}{\partial \Theta}\right)_{VaN},\ p = \left(-\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{\Theta aN},\ A = \left(-\frac{\partial F}{\partial a}\right)_{\Theta VN},\ \mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{\Theta Va}$$

2) ТД потенциал Гиббса: $G = F + pV$

$$dG = -Sd\Theta + Vdp - Ada + \mu dN$$
$$G = G(\Theta, V, a, N)$$
$$S = \left(-\frac{\partial G}{\partial \Theta}\right)_{paN},\ V = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_{\Theta aN},\ A = \left(-\frac{\partial G}{\partial a}\right)_{\Theta pN},\ \mu = \left(\frac{\partial G}{\partial N}\right)_{\Theta pa}$$

3) Энтальпия: $H = E + pV$

$$dH = \Theta dS + Vdp - Ada + \mu dN$$
$$H = H(S.p.a, N)$$
$$\Theta = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_{paN},\ V = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_{SaN},\ A = \left(-\frac{\partial H}{\partial a}\right)_{SpN},\ \mu = \left(\frac{\partial H}{\partial N}\right)_{Spa}$$

4) ТД потенциал Ω: $\Omega = F - \mu N = -pV$

$$d\Omega = -Sd\Theta - pdV - Ada - Nd\mu$$
$$\Omega = \Omega(\Theta, V, a, N)$$
$$S = \left(-\frac{\partial \Omega}{\partial \Theta}\right)_{Va\mu},\ p = \left(-\frac{\partial \Omega}{\partial V}\right)_{\Theta a\mu},\ A = \left(-\frac{\partial \Omega}{\partial a}\right)_{\Theta V\mu},\ N = \left(-\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)_{\Theta Va}$$

5) Энтропия: $dS = \dfrac{\delta Q}{\Theta}$

$$dS = \frac{\delta Q}{\Theta} = \frac{1}{\Theta} dE + \frac{p}{\Theta} dV + \frac{A}{\Theta} da - \frac{\mu}{\Theta} dN$$

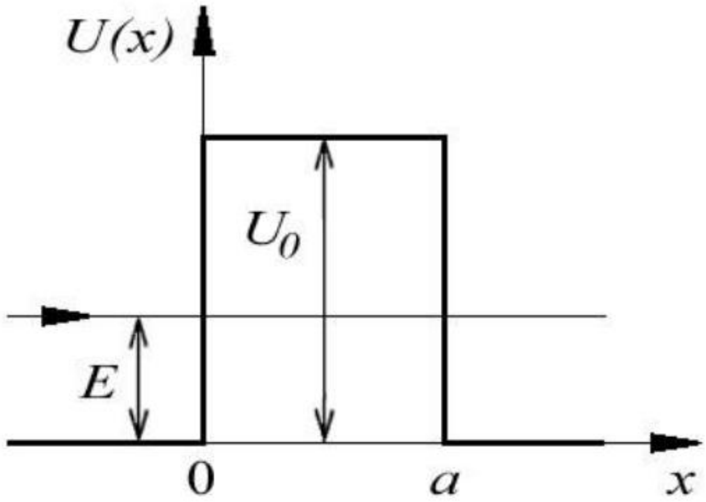
$$S = S(E, V, a, N)$$

$$\frac{1}{\Theta} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{VaN}, \ \frac{p}{\Theta} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{EaN}, \ \frac{\mu}{\Theta} = \left(-\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{EVa}$$

2. **Прохождение частиц через потенциальный барьер в квантовой механике. Туннельный эффект.**

Рассмотрим случай одномерного прямоугольного потенциального барьера:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ U_0, & 0 < x < a \\ 0, & x > a \end{cases}$$



Обозначим цифрой 1 область слева от барьера, цифрой 2 область $0 < x < a$ и цифрой 3 область справа от барьера.

Частица движется слева направо с массой *m* и энергией $E < U_0$.

Запишем стационарные уравнения Шрёдингера для всех областей:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\psi_1(x)}{dx^2} + k_1^2\psi_1(x) = 0 \\ \dfrac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} - k_2^2\psi_2(x) = 0 \\ \dfrac{d^2\psi_3(x)}{dx^2} + k_1^2\psi_3(x) = 0 \end{cases}$$

где $k_1 = \sqrt{\dfrac{2mE}{h^2}}, \; k_2 = \sqrt{\dfrac{2m(U_0 - E)}{h^2}}$

Решение данных уравнений с нормированной амплитудой:

$$\begin{cases}\psi_1(x) = e^{ik_1x} + B_1e^{-ik_1x}\\ \psi_2(x) = A_2e^{k_2x} + B_2e^{-k_2x}\\ \psi_3(x) = A_3e^{ik_1x}\end{cases}$$

Условия сшивки ВФ и их производных на границах барьера приводят к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases}1 + B_1 = A_2 + B_2\\ ik_1 - ik_1B_1 = k_2A_2 - k_2B_2\\ A_2e^{k_2a} + B_2e^{-k_2a} = A_3e^{ik_1a}\\ k_2A_2e^{k_2a} - k_2B_2e^{-k_2a} = ik_1A_3e^{ik_1a}\end{cases}$$

Найдём A_3: $A_3 = \dfrac{4ik_1k_2e^{ik_1a}}{(k_1 + ik_2)^2 e^{k_2a} - (k_1 - ik_2)^2 e^{-k_2a}}$

Найдем вектора плотности вероятности для падающей и прошедшей волны $\vec{j} = \dfrac{ih}{2m}\left(\psi grad\psi^* - \psi^* grad\psi\right)$:

$$\left|\overrightarrow{j_{пад}}\right| = \frac{hk_1}{m}$$

$$\left|\overrightarrow{j_{прош}}\right| = \frac{hk_1}{m}\left|A_3\right|^2$$

Следовательно коэф. прохождения частицы равен:

$$D = \frac{\left|\overrightarrow{j_{прош}}\right|}{\left|\overrightarrow{j_{пад}}\right|} = \left|A_3\right|^2 = \left[1 + \left(\frac{k_1^2 + k_2^2}{2k_1k_2}\right)^2 sh^2 k_2a\right]^{-1}$$

В случае, когда ширина барьера a удовлетворяет условию $k_2a >> 1$, то гиперболический синус можно заменить просто экспонентой - $shk_2a \approx \dfrac{1}{2}e^{k_2a}$, тогда:

$$D \approx \frac{16k_1^2k_2^2}{\left(k_1^2 + k_2^2\right)^2}e^{-2k_2a}$$

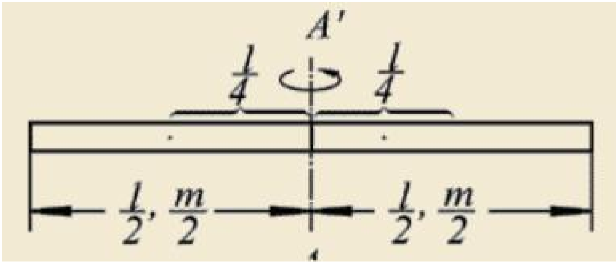
Подставляя выражения для k_1 и k_2, получаем:

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{2a}{h}\sqrt{2m(U_0 - E)}\right)$$

где $D_0 = 16\dfrac{E}{U_0}\left(1 - \dfrac{E}{U_0}\right)$ имеет порядок единицы.

Данная формула для D и иллюстрирует туннельный эффект - не нулевая вероятность того, что частица пройдёт насквозь и окажется справа от барьера.

3. Посчитать момент инерции тонкого однородного стержня массой *m* и длиной *l* относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его центр.



Запишем формулу для нахождения момента инерции:

$$J_0 = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dm \qquad (1)$$

Зная, что линейная плотность однородного стержня $\rho_l = \frac{m}{l}$, найдём $dm = \rho_l dl = \frac{m}{l} dl$ и подставим в формулу (1):

$$J_0 = \frac{m}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dl = \frac{m}{l}\left(\frac{l^3}{3*8} + \frac{l^3}{3*8}\right) = \frac{ml^2}{12}$$