

в

пакета на-
Полагая в
тъ следую-

(1)

(2)

Г л а в а XII

САМОВОЗДЕЙСТВИЕ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ И ПАКЕТОВ

волны с амплитуду на
ту условию
и накачки,

2,... (3)

, приходим
шением но-
ается.
основного
в середину
 $n_1 = 1,5$.
 $= -3,2/l =$
ней прелом-
щус основ-
вен $a_{1\text{опт}} =$

В нелинейных средах могут проявляться эффекты самовоздействия и взаимодействия волн. Эти процессы были рассмотрены в гл. X при распространении в диспергирующей среде плоских монохроматических волн. Однако плоские волны — это идеализация; на самом деле мы имеем дело с волнами, ограниченными в пространстве и во времени. Поэтому, вообще говоря, нелинейные эффекты протекают совместно с дифракционными и дисперсионными явлениями и встает задача выявить их конкуренцию и взаимное влияние.

Рассмотрим, например, среду, показатель преломления которой зависит от интенсивности волны: $n = n(|E|^2)$. В такой среде плоская волна бежит с фазовой скоростью, определяемой амплитудой поля: $v = v(|E|^2)$. Если теперь на такую среду падает ограниченный волновой пучок, то эффект самовоздействия приобретает принципиально новые черты. Под действием амплитудно-модулированной волны нелинейная среда становится неоднородной: показатель преломления в области, занимаемой пучком, изменяется на нелинейную добавку по сравнению с областью вне пучка. Причем в отличие от линейных сред, в которых неоднородности определяются внешними условиями и являются известными функциями координат и времени, неоднородности, наведенные в нелинейных средах, зависят от профиля интенсивности волны и ее мощности. Вследствие наведенных неоднородностей траектории лучей в нелинейной среде в общем случае искривляются — возникает явление нелинейной рефракции. Нелинейная рефракция может приводить к целому ряду явлений: самофокусировке, самоканализации, дефокусировке и самоотклонению волновых пучков, самокомпрессии и декомпрессии импульсов, образованию солитонов.

Взаимодействие модулированных волн также приобретает новые черты по сравнению со случаем плоских волн. С одной стороны, вследствие дифракции происходят нарушение строгого условия фазового синхронизма и ограничение области эффективного взаимодействия размерами фокального пятна; с другой стороны, при сильных полях сама дифракция взаимодействующих волн

может иметь совершенно иной характер, чем в линейной среде (см. гл. XI).

В настоящей главе мы рассмотрим основные закономерности распространения волновых пучков и волновых пакетов, т. е. волн с узкими частотным и угловым спектрами, в средах с нелинейным показателем преломления. Иными словами, мы разберем несколько характерных задач нелинейной квазиоптики.

§ 1. Нелинейная квазиоптика

Рассмотрим распространение модулированной волны в среде, диэлектрическая проницаемость которой зависит от интенсивности волны:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_{\text{нл}}(|E|^2). \quad (1.1)$$

Здесь ε_0 — линейная диэлектрическая проницаемость (асимптотическое значение ε при $|E| \rightarrow 0$), $\varepsilon_{\text{нл}}$ — нелинейная добавка, которую можно представить в виде ряда

$$\varepsilon_{\text{нл}} = \varepsilon_2 |E|^2 + \varepsilon_4 |E|^4 + \varepsilon_6 |E|^6 + \dots, \quad (1.2)$$

где первый член разложения ($\varepsilon_2 |E|^2$) соответствует учету кубичной по полю нелинейной поляризации среды; $\varepsilon_4 |E|^4$ — поляризации пятого порядка по полу и т. д.

С нелинейным изменением диэлектрической проницаемости связаны эффекты самовоздействия. В процессе самовоздействия волна остается квазимохроматической; нелинейный эффект проявляется в изменении амплитудной и фазовой модуляции волны, формы ее углового и частотного спектров. При изменении углового спектра или пространственной модуляции волны говорят о самофокусировке и самодефокусировке, а при изменении частотного спектра или временной модуляции — о самокомпрессии (самосжатии) и самодекомпрессии волновых пакетов. Хотя оба указанных явления могут, вообще говоря, протекать одновременно, мы будем рассматривать их отдельно. При этом, так как самовоздействие волновых пучков и волновых пакетов имеют много общих черт, мы будем вести основное изложение на примере пространственной самофокусировки волн.

Стационарное самовоздействие волн в среде с диэлектрической проницаемостью (1.1) описывается уравнением Гельмгольца

$$\Delta E + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0 E + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\text{нл}}(|E|^2) E = 0. \quad (1.3)$$

В случае волновых пучков с узким угловым спектром и малой нелинейностью среды решение последнего уравнения можно упростить, воспользовавшись методом медленно изменяющихся амплитуд. Мы уже применяли данный подход в линейных средах ($\varepsilon_{\text{нл}} = 0$) для описания дифракции волновых пучков (см. гл. VII),

получив уравнение параболического типа с мнимым коэффициентом диффузии, соответствующее приближение называется *квазиоптическим*. Метод медленно изменяющихся амплитуд применялся также нами при анализе распространения плоских волн в нелинейных средах (см. гл. X). Теперь необходимо объединить эти две теории, т. е. необходимо обобщить квазиоптическое описание на нелинейные волны.

Итак, представим волновое поле дифрагирующего пучка в виде квазиплоской волны:

$$E = (e/2)A(\mu z, \sqrt{\mu}x, \sqrt{\mu}y) \exp[i(\omega t - kz)] + \text{к. с.}, \quad (1.4)$$

где z — направление распространения пучка, x и y — поперечные координаты, A — медленно изменяющаяся амплитуда, μ — малый параметр, характеризующий отличие пучка от линейной плоской волны, которое появляется у него вследствие дифракции и нелинейности среды. В (1.4) учтено, что изменения комплексной амплитуды полярек волнового пучка происходят более быстро, чем вдоль пучка. Считая, что нелинейность среды имеет тот же порядок малости μ ($\varepsilon_{\text{нл}} \approx \mu \varepsilon_0$), получаем после подстановки (1.4) в (1.3) в первом приближении по малому параметру следующее уравнение:

$$2ik \frac{\partial A}{\partial z} = \Delta_1 A + \frac{k^2 \varepsilon_{\text{нл}} |A|^2}{\varepsilon_0} A. \quad (1.5)$$

При $\varepsilon_{\text{нл}} = 0$ уравнение (1.5) переходит в параболическое уравнение, используемое в квазиоптической теории дифракции волновых пучков в линейных средах (см. гл. VII).

Таким образом, уравнение (1.5) соответствует квазиоптическому приближению в теории нелинейных волн. Оно описывает стационарное самовоздействие дифрагирующих волновых пучков. Входящие в уравнение (1.5) линейная и нелинейная части диэлектрической проницаемости являются, строго говоря, комплексными функциями. В дальнейшем мы будем считать ε_0 и $\varepsilon_{\text{нл}}$ действительными величинами, пренебрегая тем самым как линейным, так и нелинейным поглощением волны. Тогда член с $\varepsilon_{\text{нл}}$ в параболическом уравнении (1.5) отвечает учету зависимости фазовой скорости от интенсивности.

Уравнение (1.5) является комплексным. В ряде случаев более удобно перейти к действительным величинам. С этой целью представим комплексную амплитуду в виде

$$A = A_0 \exp(-ik\Psi), \quad (1.6)$$

где A_0 — действительная амплитуда, Ψ — эйконал комплексной амплитуды, который является добавкой к эйконалу плоской волны (1.4).

Подставляя (1.6) в уравнение (1.5) и разделяя мнимую и действительную части, приходим к системе двух действительных

уравнений

$$\frac{2}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + (\nabla_{\perp} \Psi)^2 = \frac{\varepsilon_{\text{ни}} (A_0^2)}{\varepsilon_0} + \frac{\Delta_{\perp} A_0}{k^2 A_0}, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial A_0}{\partial z} + \nabla_{\perp} \Psi \nabla_{\perp} A_0 + \frac{1}{2} A_0 \Delta_{\perp} \Psi = 0. \quad (1.8)$$

Первое из этих уравнений — уравнение эйконала, в правой части которого стоят две «силы»: нелинейной рефракции и дифракции. Второе уравнение — уравнение переноса, выражющее закон сохранения энергии в дифференциальной форме. Для двумерного «щелевого» пучка и трехмерного осесимметричного пучка уравнения (1.7) и (1.8) принимают вид

$$\frac{2}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)^2 = \frac{\varepsilon_{\text{ни}} (A_0^2)}{\varepsilon_0} + \frac{1}{k^2 A_0} \left(\frac{\partial^2 A_0}{\partial r^2} + \frac{m}{r} \frac{\partial A_0}{\partial r} \right), \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial A_0}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial A_0}{\partial r} + \frac{1}{2} A_0 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{m}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) = 0. \quad (1.10)$$

Здесь двумерному пучку соответствуют $m = 0$, $r = x$, а трехмерному — $m = 1$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

§ 2. Нелинейная геометрическая оптика

Рассмотрим поведение волнового пучка в нелинейной среде в приближении геометрической оптики. Для перехода к геометрической оптике нужно в уравнениях (1.9) и (1.10) устремить длину волны к нулю или волновое число к бесконечности. Тогда уравнение переноса (1.10) не изменится, а в уравнении эйконала (1.9) исчезнет дифракционный член. При этом оставшаяся нелинейная «сплита» будет описывать влияние на ход лучей неоднородностей, наведенных в нелинейной среде волновым пучком. Явление исчезновения лучей из-за нелинейности среды называется *нелинейной рефракцией*.

Чтобы выявить основные особенности эффекта нелинейной рефракции, ограничим учетом младшего (а следовательно, и наибольшего) нелинейного члена в разложении диэлектрической проницаемости по полю (1.1), т. е. будем считать

$$\varepsilon_{\text{ни}} = \varepsilon_2 |E|^2. \quad (2.1)$$

Зависимость (2.1) отвечает локальному механизму нелинейности среды, в которой нелинейная часть поляризации кубична по полю (см. (10.1.19) и (10.1.20)). Таким образом, полагая в уравнении эйконала (1.9) $k \rightarrow \infty$ и подставляя (2.1), приходим к уравнениям геометрической оптики для кубично-нелинейной среды:

$$2 \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)^2 = \frac{\varepsilon_2 A_0^2}{\varepsilon_0}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial A_0^2}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial A_0^2}{\partial r} + A_0^2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{m}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) = 0. \quad (2.3)$$

Особенность уравнений нелинейной геометрической оптики (2.2) и (2.3), отличающая ее от уравнений линейной оптики (см. гл. V), состоит в том, что здесь уравнение эйконала (2.2) не является независимым от уравнения переноса для амплитуды (2.3), вследствие чего его решение, определяющее ход лучей, зависит не только от начальной формы волнового фронта, но и от вида амплитудного профиля волны. Последнее как раз характерно для явления нелинейной рефракции.

Уравнением нелинейной геометрической оптики можно придать несколько иной вид, заметив, что поперечный градиент эйконала равен углу наклона элементарного луча к оси z :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0. \quad (2.4)$$

С учетом последнего соотношения уравнения (2.2) и (2.3) приобретают следующий вид:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} + 0 \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \Psi \frac{\partial J}{\partial r}, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial J}{\partial z} + 0 \frac{\partial J}{\partial r} + J \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{m}{r} 0 \right) = 0, \quad (2.6)$$

где $\Psi = \varepsilon_2 / 2\varepsilon_0$, $J = A_0^2$.

Найти аналитическое решение уравнений (2.2) и (2.3) или (2.5), (2.6) в общем виде для произвольных начальных профилей интенсивности $A_0^2 (0, r)$ и эйконала $\Psi (0, r)$ не представляется возможным. Однако можно указать некоторые классы точных решений, позволяющие выявить основные черты нелинейной рефракции.

Безаберрационное самоиздействие пучков. Рассмотрим самоиздействие пучков, волновые фронты которых остаются в нелинейной среде сферическими или цилиндрическими, по кривизне фронта $\beta (z)$, а следовательно, и его радиус кривизны $R (z) = 1/\beta (z)$ изменяются в процессе распространения:

$$\Psi = 1/r^2 \beta (z) + \Phi (z), \quad (2.7)$$

где $\Phi (z)$ — падеж фазы на оси пучка. Кривизна $\beta > 0$ соответствует сходящемуся фронту, $\beta < 0$ — расходящемуся, а $\beta = 0$ и $R = \infty$ — плоскому. Следует напомнить, что при квазиоптическом описании, которым мы в данный момент пользуемся, сферическим и цилиндрическим волновым фронтам соответствует параболический закон изменения эйконала.

Решая уравнение для траектории лучей

$$dr/dz = 0 = r\beta (z),$$

приходим к выводу, что в безаберрационном случае все лучи ведут себя подобным образом:

$$r = r_0 \tilde{f}(z), \quad \tilde{f} = \exp \int_0^z \beta(z) dz. \quad (2.9)$$

Здесь r_0 — начальная координата луча. В соответствии с таким ходом лучей форма поперечного профиля пучка не искается, меняется лишь ширина пучка. Действительно, решение уравнения переноса (2.3) с учетом (2.7) имеет автомодельный характер:

$$A_0^2 = \frac{F_0^2(r/a\tilde{f}(z))}{f^{1+m}(z)}, \quad (2.10)$$

где $F_0^2(r/a)$ — функция, задающая начальное распределение амплитуды поперек волнового пучка, a — начальная ширина пучка. Как видно из (2.10), величину $\tilde{f}(z)$ можно назвать безразмерной шириной пучка; она связана с кривизной фронта простым дифференциальным соотношением (см. (2.9))

$$\beta(z) = \frac{1}{f} \frac{df}{dz}. \quad (2.11)$$

Теперь вопрос заключается в том, при каких условиях может наблюдаться безаберрационное распространение волнового пучка. В линейной среде ($\epsilon_2 = 0$) уравнение для эйконала (2.2) отвечает отрыву от уравнения переноса, и из его решения в форме (2.7) можно найти

$$f(z) = 1 + \frac{z}{R_0}, \quad \beta(z) = \frac{1}{z + R_0}, \quad (2.12)$$

где R_0 — начальный радиус волнового фронта. При этом амплитудный профиль пучка $F_0^2(r/a)$ может быть произвольным, только при учете дифракции форма пучка оказывается на процессе его распространения, особенно близи каустик и фокальных точек.

В нелинейной среде ($\epsilon_2 \neq 0$) безаберрационное распространение пучка осуществляется не для произвольного профиля амплитуды, как это имеет место в линейной среде. (Напомним, что речь идет пока о приближении геометрической оптики ($k \rightarrow \infty$).) Если подставить в левую часть уравнения (2.2) выражение для эйконала (2.7), соответствующее сферическому и цилиндрическому фазовому фронтам, то мы увидим, что левая часть будет содержать члены нулевого и второго порядка по координате r . Если решить о построении точного решения, то такие же члены по r должны входить в правую часть уравнения (2.2), где стоит интенсивность волн. Это означает, что безаберрационное самовоздействие в кубично-нелинейной среде будет испытывать пучок с параболическим профилем интенсивности. Удерживая в F_0^2 в выражении

$$(2.10) \text{ нулевой и квадратичный по } r \text{ члены, находим}$$

$$A_0^2(r, z) = \frac{F_0^2}{f^{1+m}(z)} \left[1 - \frac{2r^2}{a^2 f^2(z)} \right]. \quad (2.13)$$

Подставляя выражения для амплитуды (2.13) и эйконала (2.7) с учетом (2.11) в уравнение (2.2), приходим к следующему уравнению для безразмерной ширины пучка:

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = - \frac{\operatorname{sign} \epsilon_2}{R_{\text{нил}}^2 f^{1+m}(z)}, \quad (2.14)$$

где величина

$$R_{\text{нил}} = a \left(\frac{\epsilon_0}{2 |\epsilon_2| F_0^2} \right)^{1/2} \quad (2.15)$$

характеризует «силю» нелинейной рефракции. Более ясный физический смысл величины $R_{\text{нил}}$ выясняется чуть позже.

Уравнению (2.14) можно дать следующую интерпретацию. Вторая производная $d^2 f / dz^2$ определяет, как видно из (2.9), кривизну лучей. В линейной среде ($\epsilon_2 = 0$) кривизна равна нулю и лучи являются прямыми линиями. В нелинейной среде ($\epsilon_2 \neq 0$) возникает нелинейная рефракция и лучи перестают быть прямыми: кривизна лучей определяется «силою» нелинейной рефракции, стоящей в правой части уравнения (2.14). Причем в среде с $\epsilon_2 > 0$ лучи отклоняются к оси пучка, где интенсивность больше (самофокусируются). Если же $\epsilon_2 < 0$, лучи изгибаются от оси к периферии (самодефокусируются). Отметим также, что сила нелинейной рефракции возрастает при сжатии пучка (концентрации поля) и уменьшается при расширении пучка; причем эта зависимость более резкая у трехмерного пучка ($m = 1$).

Проанализируем ход лучей в нелинейной среде для параболического пучка с плоским начальным волновым фронтом; граничные условия имеют вид

$$f(0) = 1, \quad \left. \frac{df}{dz} \right|_{z=0} = \frac{1}{R_0} = 0. \quad (2.16)$$

Умножая обе части уравнения (2.14) на производную df/dz и интегрируя по z с учетом граничных условий (2.16), находим первый интеграл:

$$\left(\frac{df}{dz} \right)^2 = \frac{4\epsilon_2 F_0^2}{i(1+m)\epsilon_0 a^2} \left(\frac{1}{f^{1+m}} - 1 \right). \quad (2.17)$$

Рассмотрим отдельно самовоздействие трехмерных и двумерных пучков.

Для случая трехмерного осесимметричного пучка ($m = 1$) решение уравнения (2.17) дает следующую зависимость:

$$f^2(z) = 1 - (\text{sign } \varepsilon_2) z^2/R_{\text{нил}}^2. \quad (2.18)$$

В среде с $\varepsilon_2 > 0$ ширина пучка согласно (2.18) уменьшается — развивается самофокусировка (рис. 12.1a). Нелинейный фокус, где ширина пучка обращается в нуль, расположен на расстоянии $R_{\text{нил}}$ от входа в среду. Таким образом, величина $R_{\text{нил}}$ (см. (2.15)) равна *фокальной длине толстой нелинейной линзы*, создаваемой в среде с $\varepsilon_2 > 0$ коллимированным трехмерным пучком ($m = R_{\text{нил}} = 1, R_0 = \infty$) с параболическим профилем интенсивности (см. (2.13)). То обстоятельство, что кривизна лучей увеличивается по мере приближения к нелинейному фокусу, отражает лавинообразный характер самофокусировки.

В среде с $\varepsilon_2 < 0$ ширина пучка увеличивается по мере его распространения — это явление самодифокусировки (рис. 12.1б). В отличие от самофокусировки с ростом пройденного расстояния (см. (2.14)) при самодифокусировке (2.14) ослабевает и лучи становятся все более прямыми. На больших длинах ($z \gg R_{\text{нил}}$) ширина пучка возрастает пропорционально расстоянию:

$$f = z/R_{\text{нил}} + 1/2 \ln(z/2R_{\text{нил}}). \quad (2.22)$$

Нелинейные aberrации волновых пучков. При распространении в нелинейной среде пучков с профилем интенсивности, отличным от параболического (см. (2.13)), возникают aberrации: различные лучи ведут себя по-разному, автоматичность решения отсутствует, и профиль пучка искажается. Для двумерного пучка можно провести достаточно общее рассмотрение, позволяющее учесть в приближении нелинейной геометрической оптики aberrационные явления. Дело заключается в том, что в двумерном случае ($m = 0$) уравнения нелинейной геометрической оптики, записанные в форме (2.5) и (2.6), имеют гидродинамический аналог. Именно эти уравнения при $m = 0$ формально аналогичны уравнениям, описывавшим нестационарное, изоэнтропическое течение баротропной жидкости. Однако если для жидкости $\gamma < 0$, то для нелинейной среды возможны как $\gamma < 0$ (случай самодифокусировки, $\varepsilon_2 < 0$), так и $\gamma > 0$ (случай самофокусировки, $\varepsilon_2 > 0$). Из курсов гидродинамики известно, что систему уравнений (2.5), (2.6) при $m = 0$ можно свести к линейной посредством преобразования телографа. Последнее дает возможность разработать методику анализа уравнений нелинейной геометрической оптики для двумерных пучков. С помощью такого

изменению диэлектрической проницаемости среды на оси входного пучка.

В случае самовоздействия двумерного пучка ($m = 0$) после интегрирования (2.17) получаем более сложные неявные выражения для ширины пучка в произвольном сечении нелинейной среды.

Ширина самофокусирующегося пучка ($\varepsilon_2 > 0$) описывается формулой

$$f(z) = \cos^2 [\sqrt{f(1-f)} - z/R_{\text{нил}}], \quad (2.24)$$

где величина $R_{\text{нил}}$ задается прежней формулой (2.15). Нелинейный фокус двумерного пучка, в котором $f = 0$, расположен не сколько дальше, чем трехмерного: $z_0 = 1/2\pi R_{\text{нил}}$. Это и понятно: длия двумерного пучка ($m = 0$) «сила» нелинейной рефракции нарастает менее стремительно, чем для трехмерного пучка ($m = 1$) (см. (2.14)).

Самодифокусировка двумерного пучка ($\varepsilon_2 < 0$) описывается следующей формулой:

$$f = \sin^2 [\sqrt{f(f-1)} - z/R_{\text{нил}}]. \quad (2.25)$$

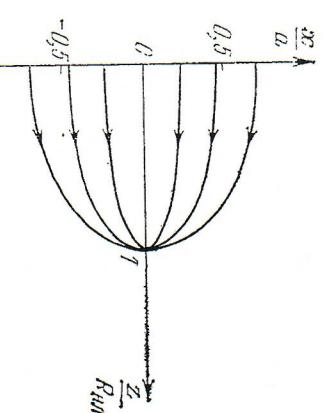
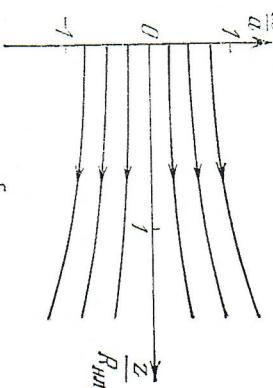
«Сила» нелинейной рефракции ослабевает более медленно, чем у трехмерного пучка, и на больших расстояниях $z \gg R_{\text{нил}}$ ширина двумерного пучка несколько больше, чем трехмерного (2.19):

$$f = z/R_{\text{нил}} + 1/2 \ln(z/2R_{\text{нил}}). \quad (2.26)$$

Рис. 12.1. Траектории лучей при нелинейной рефракции пучка с параболическим профилем в случае самофокусировки (a) и самодифокусировки (б).

$f = z/R_{\text{нил}} = (2 |\varepsilon_2| E_0^2/\varepsilon_0)^{1/2}$, (2.20)

т. е. квадрат нелинейной расходимости равен относительному



подхода удаётся найти точное решение уравнений (2.5), (2.6) для пучка с начальным профилем интенсивности

$$J_0(x/a) = E_0^2 \text{ch}^{-2}(x/a),$$

которое имеет явный вид

$$\theta = -\frac{2yzJ}{a} \tanh \frac{x-\theta z}{a}, \quad (2.25)$$

$$J = \left(J_0 + \frac{yz^2 J^2}{a^2} \right) \text{ch}^{-2} \frac{x-\theta z}{a}. \quad (2.26)$$

Используя явное решение (2.25), (2.26), можно на плоскости xz нарисовать поле лучевых векторов, наклоненных к оси z на угол θ .

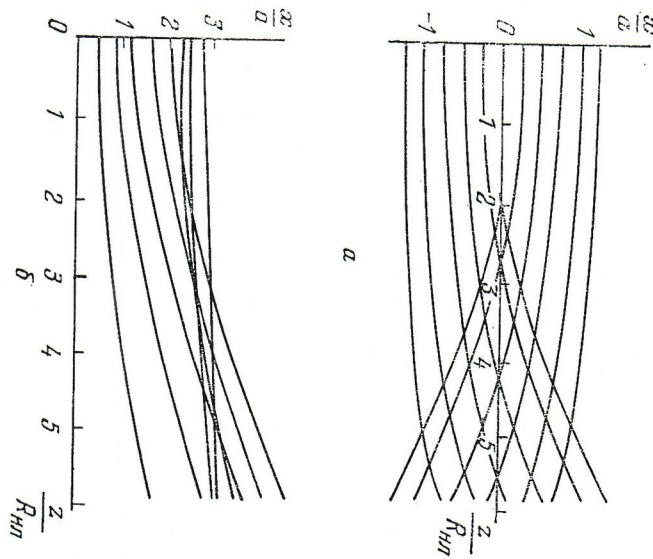
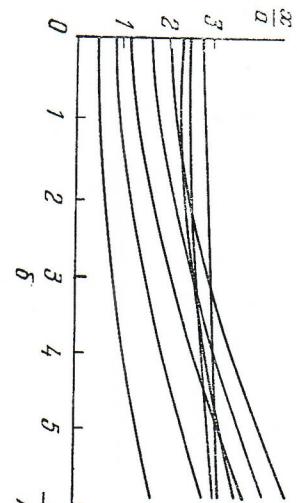
*a*

Рис. 12.2. Аберрационная картина самовоздействия гауссового пучка с колоколообразным профилем интенсивности при самофокусировке (a) и самофокусировке (b)

Линии, которые в каждой точке касаются этих векторов, и будут траекториями лучей. Построенные таким способом лучи представлены на рис. 12.2.

Из рис. 12.2a, который относится к среде с $\varepsilon_2 > 0$, следует, что при самофокусировке колоколообразного пучка (2.24) в от-

личие от рассмотренного выше случая волны с параболическим профилем интенсивности возникают довольно сильные aberrации.

Порифорийные лучи пересекают ось z позже, чем прямые.

Полупогодный фокус расположен на оси пучка в плоскости $z_\Phi = 2/l_{\text{обр}}$.

При самофокусировке ($\varepsilon_2 < 0$) вследствие нелинейных aberrаций образуется внешняя область пересечения лучей (рис. 12.2б).

Аберрационная картина самофокусировки и самофокусирования наиболее типична для реальных волновых пучков. Хотя для трехмерных пучков картину aberrаций аналитически рассчитать несложно затрудительно, ясно, что на расстояниях порядка $z \gtrsim R_{\text{обр}}$, а иногда и раньше aberrации начинают сильно влиять на характер самовоздействия пучка. Нелинейные aberrации, как правило, усиливают силу нелинейной рефракции, вследствие чего, например, темп нарастания поля рблези нелинейного фокуса может замедлиться.

§ 3. ДИФРАКЦИЯ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

Проанализируем теперь поведение волнового пучка в кубично-нелинейной среде в рамках полных квазиоптических уравнений (1.9) и (1.10), не отбрасывая в уравнении для эйконала (1.9) дифракционный член, пропорциональный квадрату длины волны. Иными словами, рассмотрим закономерности распространения пучка при одновременном действии дифракции и нелинейной рефракции.

Учет дифракционного члена в квазиоптических уравнениях значительно усложняет задачу нахождения точных аналитических решений. В принципе такие решения можно получить для двумерных пучков, применения метод обратной задачи рассеяния. Однако изложение этого математически сложного аппарата выходит за рамки данного курса. К тому же общие решения, полученные этим методом, довольно громоздки и не позволяют просто проследить за процессом распространения пучков на всех этапах.

В данном параграфе мы рассмотрим самовоздействие волновых пучков с учетом дифракции в безаберрационном приближении, которое широко применяется при решении различных задач подобного типа.

Пусть на вход нелинейной среды падает пучок с гауссовым профилем интенсивности и (для простоты) с плоским волновым фронтом:

$$A_0^2(r, 0) = E_0^2 \exp(-2r^2/a^2), \Psi(r, 0) = 0. \quad (3.1)$$

По мере распространения пучка в нелинейной среде меняются его амплитудный и фазовый профили. Мы учтем эти изменения, полагая, что в первом приближении волновой фронт пучка можно считать сферическим ($m = 1$) или пипинтическим ($m = 0$).

переменной кривизной (ср. с (2.7))

$$\Psi = 1/r^2 \beta(z) + \Phi(z). \quad (3.2)$$

Тогда в соответствии с уравнением переноса (1.40) пучок сохраняет свою гауссову форму

$$A_0^2(r, z) = \frac{E_0^2}{r^{1+m}(z)} \exp \left[-\frac{2r^2}{a^2 f^2(z)} \right], \quad (3.3)$$

где $f(z)$ — безразмерная ширина пучка, связанная с кривизной фронта прямым соотношением (2.11).

Подставим выражение (3.2) и (3.3) в уравнение для эйконала (1.9), полагая $\varepsilon_{\text{нил}} = \varepsilon_2 A_0^2$. В правой части этого уравнения стоят две «силы» — нелинейной рефракции и дифракции. Дифракционная («сила») гауссова пучка (3.3) будет содержать только нулевые и квадратичные члены по попечерной координате r :

$$\frac{\Delta A_0}{k^2 A_0} = -\frac{4}{k^2 a^2 f^2} + \frac{4r^2}{k^2 a^4 f^4}. \quad (3.4)$$

Это отражает тот факт, что дифракция не искаляет гауссовой формы пучка в линейной среде. Однако в нелинейной среде есть еще «сила» рефракции ($\varepsilon_2 A_0^2 / \varepsilon_0$). Очевидно, она будет содержать помимо нулевого и квадратичного по r членов еще и другие слагаемые более высокого порядка, наличие которых приводит к нелинейным аберрациям. Так как мы пренебрегаем нелинейными аберрациями, то учетом в разложении «силы» нелинейной рефракции по координате r вблизи оси пучка только первые два члена:

$$\frac{\varepsilon_2 A_0^2(r, z)}{\varepsilon_0} \approx \frac{\varepsilon_2 E_0^2}{\varepsilon_0 r^{1+m}} - \frac{2\varepsilon_2 E_0^{2,2}}{\varepsilon_0 a^2 f^{2+m}}. \quad (3.5)$$

В безаберрационном приближении мы учитываем изменение кривизны фронта, предполагая, что сферичность и цилиндрическость фронта не нарушаются. Собирая в уравнении для эйконала (1.9) члены при r^2 , приходим к уравнению для ширины пучка

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = -\frac{\text{sign } \varepsilon_2}{R_{\text{нил}}^2 f^{2+m}} + \frac{1}{R_{\text{нил}}^2 c^2}. \quad (3.6)$$

Здесь $R_{\text{нил}}$ характеризует силу нелинейной рефракции и дается прежней формулой (2.15); $R_{\text{нил}} = ka^2/2$ — дифракционная длина пучка, равная половине конфокального параметра, или длине зоны френелевской дифракции в линейной среде.

Первый интеграл уравнения (3.6) для пучка с начальным плоским фронтом ($f = 1$ и $df/dz = 0$ при $z = 0$) имеет вид

$$\left(\frac{df}{dz} \right)^2 = \frac{2 \text{sign } \varepsilon_2 (1 - f^{1+m})}{(1+m) R_{\text{нил}}^2 f^{1+m}} + \frac{f^2 - 1}{R_{\text{нил}}^2 c^2}. \quad (3.7)$$

Теперь в рамках общей волновой теории поведение пучка зависит от соотношения сил нелинейной рефракции и дифракции. Причем в нелинейной среде с $\varepsilon_2 < 0$ нелинейная рефракция и дифракция действуют в одну сторону и совместно приводят к расфокусировке пучка. В среде с $\varepsilon_2 > 0$ нелинейная рефракция и дифракция противоположают друг другу, и здесь возможны различные режимы распространения. Рассмотрим, как и ранее, отдельно самовоздействие трехмерных ($m = 1$) и двумерных ($m = 0$) пучков. Для трехмерных осесимметричных пучков решение уравнения (3.7) имеет вид

$$f^2 = 1 + z^2 \left(\frac{1}{R_{\text{нил}}^2} - \frac{\text{sign } \varepsilon_2}{R_{\text{нил}}^2} \right). \quad (3.8)$$

Относительный вклад дифракции и рефракции определяется величиной $R_{\text{нил}}^2/R_{\text{нил}}^2$, которую можно переписать в терминах мощности:

$$R_{\text{нил}}^2/R_{\text{нил}}^2 = P_0/P_{\text{кр}}, \quad (3.9)$$

где $P_0 = c n_0 E_0^2 a^2 / 16$ — полная мощность гауссова пучка, а

$$P_{\text{кр}} = \frac{c n_0 \lambda^3}{32 \pi^2 |\varepsilon_2|} \quad (3.10)$$

— критическая мощность. Используя соотношение (3.9), формулу (3.8) можно переписать так:

$$f^2 = 1 + \frac{z^2}{R_{\text{нил}}^2} \left(1 - \text{sign } \varepsilon_2 \frac{P_0}{P_{\text{кр}}} \right) = 1 + \frac{z^2}{R_{\text{нил}}^2} \left(\frac{P_{\text{кр}}}{P_0} - \text{sign } \varepsilon_2 \right). \quad (3.11)$$

Рассмотрим сначала поведение пучка в дефокусирующей среде ($\varepsilon_2 < 0$). Здесь, как видно из (3.8), происходит расплющивание пучка вследствие дифракции и рефракции (рис. 12.3а). На больших расстояниях ($z \gg R_{\text{нил}}, R_{\text{нил}}$) пучок приобретает угловую расходимость:

$$\theta_{\text{нил}} = a df/dz = \theta_{\text{нил}} (1 + P_0/P_{\text{кр}})^{1/2}, \quad (3.12)$$

где $\theta_{\text{нил}} = 2/(ka)$ — дифракционная расходимость гауссова пучка в линейной среде. Видно, что при $P_0 \ll P_{\text{кр}}$ основную роль играет дифракция, если же $P_0 \gg P_{\text{кр}}$, то — нелинейная рефракция. При $P_0 = P_{\text{кр}}$ расходимость пучка увеличивается в $\sqrt{2}$ раз, а попечерное сечение — в два раза по сравнению со случаем линейной среды.

В нелинейной фокусирующей среде ($\varepsilon_2 > 0$) можно выделить три различных режима распространения в зависимости от мощности пучка (рис. 12.3б).

1. $P_0 \ll P_{\text{кр}}, R_{\text{нил}} \gg R_{\text{нил}}$. Если мощность пучка меньше критической, то дифракция преобладает над нелинейной рефракцией

§ 3. ДИФРАКЦИЯ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

и пучок расплывается. Однако скорость уширения уменьшается, и расходимость пучка в фраунгоферовой зоне также уменьшается по сравнению с линейной средой: $\theta_{\text{нл}} = \theta_{\text{л}} (1 - P_0/P_{\text{кр}})^{1/2}$ (ср. со случаем дефокусировки (3.11)).

2. $P_0 = P_{\text{ир}}$, $R_{\text{нл}} = R_{\text{л}}$. Мощность пучка в точности равна критической, т. е. дифракция и нелинейная рефракция находятся

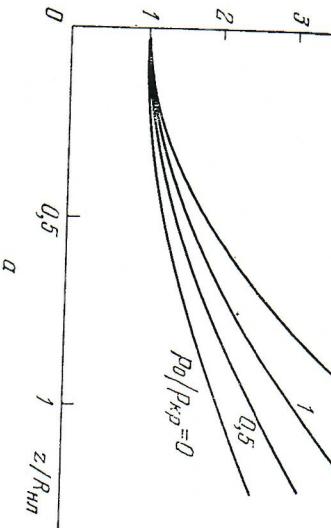


Рис. 12.3. Зависимость безразмерной ширины гауссова пучка с различной мощностью от расстояния, прошедшего в нелинейной среде при самодифракции (a) и самофокусировке (b)

в равновесии. В этом специальном случае ширина пучка не меняется с расстоянием ($f = 1$) — имеет место волноводное распространение в нелинейной среде. Отметим, что критическая мощность нелинейного осесимметричного волновода (3.10) не зависит от полосочных размеров.

3. $P_0 > P_{\text{кр}}$, $R_{\text{нл}} < R_{\text{л}}$. Если мощность пучка превышает критическую, то нелинейная рефракция подавляет дифракцию и ширина пучка уменьшается — наступает самофокусировка. Ширина пучка обращается в нуль ($f \rightarrow 0$) на конечном расстоянии

$$z_{\Phi} = R_{\text{нл}} / (1 - P_{\text{кр}}/P_0)^{1/2} \quad (3.42)$$

в точке, которую можно назвать *нелинейным фокусом*. Поле на оси пучка ($A_0(0, z) = E_0/f(z)$) стремится к бесконечности при приближении к нелинейному фокусу (возникает колапс); причем в отличие от линейной среды дифракция не способна одна противостоять образованнию колапса в кубично-нелинейной среде. Учитывая, что при самофокусировке $f^2 = 1 - z^2/z_{\Phi}^2$, можно указать закон изменения поля вблизи нелинейного фокуса:

$$A_0 \sim E_0 (1 - z/z_{\Phi})^{-1/2}.$$

Для более корректного описания нелинейной фокальной области надо, вообще говоря, усложнить модель среды (учесть вынужденные рассеяния, нелинейное поглощение и т. д.) и уточнить квазиоптическое скалярное приближение (вблизи нелинейного фокуса лучи имеют очень большие наклоны, что выходит за рамки предположения).

Для двумерных пучков ($m = 0$) общая классификация различных режимов самовоздействия такая же, как и в предыдущем случае осесимметричных пучков. Однако здесь есть и существенные отличия. Во-первых, для двумерного гауссова пучка имеется смысл погонная мощность $P_{0, \text{пог}} = c n_0 E_0^2 a / (8 \sqrt{2\pi})$, и в соответствии с этим вводится погонная критическая мощность

$$P_{\text{кр, пог}} = \frac{c n_0 \lambda_0^2}{16 \pi^3 \sqrt{2\pi} \varepsilon_2 a}, \quad (3.43)$$

которая обратно пропорциональна ширине пучка; при этом $R_{\text{нл}}^2 / R_{\text{л}}^2 = P_{0, \text{пог}} / P_{\text{кр, пог}}$. Поэтому одномерный в поперечном сечении нелинейный волновод, возникающий при $P_{0, \text{пог}} = P_{\text{кр, пог}}$, имеет поперечный размер, обратно пропорциональный его мощности: $a_{\text{в}} \sim c \lambda^2 / (\varepsilon_2 P_{0, \text{пог}})$. Во-вторых, сила нелинейной рефракции, как видно из (3.6), зависит от ширины пучка f менее резко, чем сила дифракции. Вследствие этого при самофокусировке двумерного пучка, когда $P_{0, \text{пог}} > P_{\text{кр, пог}}$, колапс в нелинейном фокусе не возникает: здесь дифракция ограничивает размеры фокального пятна. Действительно, полагая в (3.7) $df/dz = 0$, находим

$$f_{\min}(z_{\Phi}) = \frac{1}{2 P_{0, \text{пог}} / P_{\text{кр, пог}} - 1}. \quad (3.44)$$

После прохождения нелинейного фокуса пучок расширяется, ширина пучка достигает первоначального значения ($f_{\max} = 1$), и процесс повторяется снова. Таким образом, волноводное распространение наступает и при $P_{0, \text{пог}} > P_{\text{кр, пог}}$, только волновод в этом случае является осциллирующим.

§ 4. Волноводное распространение пучков

Как мы видели выше (см. § 3), при мощности пучка, равной критической, в среде с $\varepsilon_2 > 0$ может наступить волноводное распространение, когда плоский фронт и профиль интенсивности пучка не меняются с расстоянием. Этот режим можно проанализировать более строго, не ограничиваясь безаберрационным приближением. Волноводному распространению соответствует следующая форма волнового поля:

$$A = A_{\text{в}}(r) \exp(-i\Gamma z), \quad (4.1)$$

где Γ — константа, характеризующая добавку к волновому вектору в линейной среде. Подставляя (4.1) в квазиоптические уравнения (1.5) или (1.9) и (1.10), находим

$$\frac{d^2 A_{\text{в}}(r)}{dr^2} + \frac{m}{r} \frac{dA_{\text{в}}(r)}{dr} - 2\Gamma k A_{\text{в}} + \frac{\varepsilon_2 k^3}{\varepsilon_0} A_{\text{в}}^3 = 0. \quad (4.2)$$

Границные условия для поперечных мод нелинейного волновода, локализованных в пространстве, имеют вид

$$\left. \frac{dA_{\text{в}}}{dr} \right|_{r=0} = 0, \quad A_{\text{в}}|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (4.3)$$

Уравнение (4.2) можно привести к безразмерному виду, вводя нормировку амплитуды и ширины пучка:

$$A_{\text{в}} = E_{\text{в}} \tilde{A}_{\text{в}}(r/a_{\text{в}}). \quad (4.4)$$

Подставляя (4.4) в (4.2) и приравнивая все коэффициенты единице, получаем

$$\frac{d^2 \tilde{A}_{\text{в}}}{dr^2} + \frac{m}{r} \frac{d\tilde{A}_{\text{в}}}{dr} - \tilde{A}_{\text{в}} + \tilde{A}_{\text{в}}^3 = 0, \quad (4.5)$$

при этом константа распространения, ширина пучка и поле на оси связаны между собой соотношениями

$$\Gamma = 1/(2ka_{\text{в}}^2) = \varepsilon_2 k E_{\text{в}}^2 / (2\varepsilon_0). \quad (4.6)$$

Рассмотрим свойства нелинейных волноводов — двумерных ($m=0$) и осесимметричных ($m=1$).

В случае двумерного волновода имеется единственное решение уравнения (4.5), удовлетворяющее граничным условиям (4.3), а именно

$$A_{\text{в}} = \frac{\sqrt{2}}{\cosh(x/a_{\text{в}})}. \quad (4.7)$$

Таким образом, существует только одна поперечная мода нелинейного двумерного волновода, несущая критическую погонную

мощность

$$P_{\text{кр}, \text{пол}}^{\text{в}} \approx \int \tilde{A}_{\text{в}}^2 dx = \frac{\pi a_0 \lambda_0^2}{8\pi^2 \varepsilon_0 a_{\text{в}}}. \quad (4.8)$$

С точностью до числового коэффициента эта величина совпадает с выражением (3.13) для критической мощности, полученным в безаберрационном приближении.

Для осесимметричных пучков ($m=1$) решения уравнения (4.5) удается найти только числовыми методами. Математический анализ этой задачи показывает, что при $m=1$ существует бесконечный набор решений, у которых амплитуда на оси пучка $\tilde{A}_{\text{в}}(0)$ и полная мощность, принимают вполне определенные дискретные значения. Иными словами, осесимметричный нелинейный волновод имеет бесконечный дискретный спектр собственных мод.

На основной моде амплитуда монотонно уменьшается при удалении от оси пучка, а на высших модах N -го порядка радиальная зависимость амплитуды имеет характер затухающих осцилляций, причем число нулей равно номеру моды N .

Таким образом, картина распределения интенсивности в поперечном сечении нелинейного осесимметричного волновода имеет в общем случае колышевую структуру. Критическая мощность самоканализирующегося пучка на новой моде равна

$$P_{\text{кр}}^{\text{в}} = 5,763 \varepsilon_0 \lambda_0^2 / (16\pi^2 \varepsilon_2).$$

Эта величина превышает в 3,7 раза критическую мощность (3.10), вычисленную в безаберрационном приближении. Последнее обстоятельство отражает тот факт, что в безаберрационном приближении, как было показано ранее, значение «силы» нелинейной рефракции завышается, а критическая мощность, при которой наступает равновесие «силы» нелинейной рефракции и дифракции, соответственно занижается. С ростом номера моды амплитуда на оси пучка $\tilde{A}_{\text{в},N}(0)$ и его пиковая мощность $P_{\text{кр},N}$ неограниченно увеличиваются.

Основные качественные закономерности явлений самофокусировки и волноводного распространения пучков в нелинейных средах можно исследовать с более общих позиций. Обратимся к исходному в квазиоптической теории параболическому уравнению (1.5) для амплитуды волнового пучка, распространяющегося в среде с нелинейной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_{\text{нл}}(|A|^2)$. Покажем, что это уравнение обладает интегралами движения, не зависящими от продольной координаты z .

Умножим уравнение (1.5) на A^* и вычтем комплексно-сопряженное выражение; в результате получим ($\varepsilon_{\text{нл}} —$ действительная

величина)

$$2ik \frac{\partial |A|^2}{\partial z} = (A^* \Delta_{\perp} A - A \Delta_{\perp} A^*). \quad (4.10)$$

Принтегрируем (4.10) по поперечному сечению, учитывая, что $A(x, y = \pm\infty) = 0$. Тогда интеграл от правой части дает нуль, и мы приходим к закону сохранения полной энергии:

$$dI_1/dz = 0, \quad I_1 = \iint |A|^2 dx dy. \quad (4.11)$$

В нелинейной среде, как и следовало ожидать, полная мощность пучка сохраняется.

Найдем теперь другой весьма важный интеграл движения, для чего умножим уравнение (1.5) на $\partial A^*/\partial z$ и сложим с комплексно-сопряженным выражением. Это дает выражение

$$\frac{\partial A^*}{\partial z} \Delta_{\perp} A + \frac{\partial A}{\partial z} \Delta_{\perp} A^* + \varepsilon_{\text{пл}}(|A|^2) k_0^2 \frac{\partial |A|^2}{\partial z} = 0. \quad (4.12)$$

Снова интегрируя по поперечному сечению, находим второй закон сохранения:

$$dI_2/dz = 0, \quad (4.13)$$

$$I_2 = \iint \left\{ \left| \frac{\partial A}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial A}{\partial y} \right|^2 - k_0^2 F_{\text{пл}}(|A|^2) \right\} dx dy,$$

где введена потенциальная функция

$$F_{\text{пл}} = \int_0^{|A|^2} \varepsilon_{\text{пл}}(\xi) d\xi. \quad (4.14)$$

Для кубично-нелинейной среды с $\varepsilon_{\text{пл}} = \varepsilon_2 |A|^2$ имеем

$$F_{\text{пл}} = 1/2 \varepsilon_2 |A|^4. \quad (4.15)$$

Таким образом, пучок сохраняет в процессе распространения не только полную мощность I_1 , но и величину I_2 . Интеграл I_2 учитывает одновременно нелинейные и дифракционные эффекты.

В линейной среде ($F_{\text{пл}} = 0$) интеграл движения I_2 , как видно из (4.13), всегда положителен. В нелинейной среде в интеграле I_2 появляется дополнительный член, который может быть как положительным (в лефокусирующей среде), так и отрицательным (в самофокусирующую среде). В последнем случае при достаточно большой мощности пучка интеграл I_2 может быть отрицательным. Так как интеграл I_2 сохраняется при распространении волн, то его нелинейная часть, несущая отрицательную величину, не может стремиться к нулю. Это означает, что в самофокусирующей среде ($\varepsilon_{\text{пл}} > 0$) пучок с $I_2 < 0$ не может перейти в расходящуюся волну, амплитуда которой стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$. Таким образом, при выполнении условия $I_2 < 0$ пучок испытывает в нелинейной среде волноводное распространение. При произ-

вольных начальных условиях нелинейный волновод будет нерегулярным: его поперечное сечение непрерывно искается, огибаясь около некоторого среднего сечения.

Пользуясь интегралом движения I_2 , можно засово вывести безаберрационное приближение уравнение для ширины гауссова пучка. Подставим в (4.13) с учетом (4.15) автомодельное представление комплексной амплитуды гауссова пучка со сферическим фронтом

$$A = \frac{E_0}{f(z)} \exp \left(- \frac{r^2}{a^2 f^2} - \frac{i k r^2}{2f} \frac{df}{dz} \right). \quad (4.16)$$

После интегрирования получаем в осесимметричном случае уравнение

$$\left(\frac{df}{dz} \right)^2 = \frac{\text{sign } \varepsilon_2 \cdot (1 - f^2)}{4 R_{\text{пл}}^2 f^2} + \frac{f^2 - 1}{R_{\text{пл}}^2}, \quad (4.17)$$

где $R_{\text{пл}}$ и $R_{\text{пл}}$ — дифракционная и нелинейная длины, введенные ранее. Сравнение последнего уравнения с уравнением (3.7), полученным непосредственно из уравнения эйконала (1.9), показывает, что при усреднении описания безаберрационной самофокусировки с помощью интеграла движения «сила» нелинейной рефракции уменьшается в четыре раза. Соответственно этому критическая мощность возрастает в четыре раза по сравнению с (3.10).

Уравнение (4.17) в количественном отношении лучше описывает самофокусировку, чем (3.7). Волноводному распространению в (4.17) соответствует $I_2 = 0$. Длина самофокусировки, равная $2R_{\text{пл}}$, менее точно согласуется с результатами численного решения уравнения (1.5).

Интерес к изучению волноводных режимов распространения в нелинейной среде в значительной степени связан также с тем, что нелинейные волнистые могут формироваться в результате распадной неустойчивости. В гл. X мы рассмотрели распадную неустойчивость волн в среде с квадратичной нелинейностью, когда волна частоты ω_3 отдает почти полностью свою энергию двум другим волнам меньших частот: $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Аналогичный процесс может наблюдаться в среде с кубичной нелинейностью, только здесь другое соотношение частот: $2\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, и, в частности, звуковые (слабые и сильные) могут быть одинаковыми, частоты, частоты всех волн (слабых и сильных) могут быть одинаковыми: $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$.

Рассмотрим на основе уравнения (1.5) простейшую задачу об устойчивости распространения интенсивной плоской волны в среде с кубичной нелинейностью $\varepsilon_{\text{пл}} = \varepsilon_2 |A|^2$. Плоская волна амплитуды E_0 распространяется в нелинейной среде с иной фазовой скоростью, чем в линейной:

$$A_{\text{пл}} = E_0 \exp(-ik\varepsilon_2 E_0^2 z / 2\varepsilon_0). \quad (4.18)$$

Наложим на плоскую волну малые пространственные возмущения

$$A = [E_0 + \tilde{A}(x, y, z)] \exp[-ik\varepsilon_2 E_0^2 z/(2\varepsilon_0)], \quad (4.19)$$

причем $|\tilde{A}| \ll E_0$. Чтобы проследить за развитием возмущений, подставим (4.19) в уравнение (4.5). Оставляя только линейные члены по амплитуде возмущения, получаем дифференциальное уравнение

$$2ik \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = \Delta_{\perp} \tilde{A} + k^2 E_0^2 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} (\tilde{A} + \tilde{A}^*). \quad (4.20)$$

Для анализа устойчивости распространения плоской волны достаточно проследить за поведением отдельных пространственных Fourier-компонент, на которые можно разложить возмущения:

$$\tilde{A} = \tilde{E} e^{iz} \cos(x/a_1) \cos(y/a_2).$$

Подставляя (4.21) в (4.20), находим из условия нетривиальности решения системы двух алгебраических уравнений для \tilde{E} и \tilde{E}^* :

$$\Gamma = \pm \frac{a_1^2 + a_2^2}{2ka_1^2 a_2^2} \left[-4 + \frac{2k^2 \varepsilon_2 E_0^2 a_1^2 a_2^2}{\varepsilon_0 (a_1^2 + a_2^2)} \right]^{1/2}. \quad (4.22)$$

Из (4.22) следует, что при $\varepsilon_2 < 0$ коэффициент Γ является чисто мнимой величиной. Это означает, что в дефокусирующем среде возмущения не нарастают, т. е. плоская волна устойчива.

В среде с $\varepsilon_2 > 0$ при выполнении порогового условия

$$E_0^2 > \tilde{E}_{\text{кр}}^2 = \frac{\lambda_0^2 (a_1^2 + a_2^2)}{8\pi^2 \varepsilon_2 a_1^2 a_2^2}, \quad (4.23)$$

коэффициент Γ становится действительной величиной и решение, отвечающее $\Gamma > 0$, экспоненциально нарастает с расстоянием.

При этом в каждой область возмущения (4.21) с попечными размерами $t a_1$ и $t a_2$ захватывается монополь.

$$\tilde{P}_{\text{кр}}' = \frac{c n_0 \lambda_0^3}{64 \pi^3 \varepsilon_2} \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} \right). \quad (4.24)$$

Эта мощность по порядку величины сравнима с критической мощностью самоканализирующегося пучка: ср. (4.24) с (3.10) при $a_1 = a_2$ и с (3.15) при $a_2 \rightarrow \infty$. Таким образом, в среде с $\varepsilon_2 > 0$ плоская волна неустойчива: она разбивается на отдельные самофокусирующиеся пучки, несущие мощность порядка критической. Среди всевозможных пространственных возмущений существует такие, для которых инкремент Γ наибольший. Дифференцируя выражение для Γ (4.22) по a_1 и a_2 , находим, что оптимальный

масштаб поперечной модуляции плоской волны

$$\left[\frac{a_1}{(1 + a_1^2 / a_2^2)^{1/2}} \right]_{\text{опт}} = \frac{\lambda}{2\pi} \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2 E_0^2} \right)^{1/2}, \quad (4.25)$$

а максимум инкремента

$$\Gamma_{\text{опт}} = k \varepsilon_2 E_0^2 / 2 \varepsilon_0. \quad (4.26)$$

Обратная величина инкремента Γ^{-1} характеризует порядок длины самофокусировки. Возмущения с поперечным размером (4.25) формируются быстрее других на длине

$$z_{\text{ф.опт}} = \lambda \varepsilon_0 / (4\pi \varepsilon_2 E_0^2). \quad (4.27)$$

В наиболее быстро самофокусирующуюся нить захватывается мощность $P_{\text{опт}} = c n_0 \lambda_0^2 / (16\pi \varepsilon_2)$ для двумерных возмущений ($a_1 = a_2$) и полонная мощность $P_{\text{опт. пот}} = c \lambda_0 E_0 / (16\pi^2) \sqrt{\varepsilon_0 / \varepsilon_2}$ для одномерных возмущений ($a_2 \rightarrow \infty$).

Растянутая неустойчивость в среде с $\varepsilon_2 > 0$ проявляется не только у плоской волны, но и у ограниченных пучков с мощностью $P_0 \gg P_{\text{кр}}$. Здесь происходит конкуренция самофокусировки пучка как целого на длине $R_{\text{кр}} = a [\varepsilon_0 / (2\varepsilon_2 E_0^2)]^{1/2}$ и процесса распада пучка на отдельные нити. Однако если профиль пучка достаточно гладкий (в его пространственном спектре отсутствуют компоненты с масштабом порядка оптимального), то неустойчивость пучка не проявляется на длине самофокусировки $R_{\text{кр}}$.

В заключение этого параграфа отметим, что во многих лазерных экспериментах амплитуда электромагнитного излучения обычно изменяется во времени ($E_0(t)$). Если ограничиться первым приближением теории дисперсии (см. гл. III), то вместо стационарного уравнения (4.5) поведение амплитуды пучка A будет описываться уравнением

$$2ik \left(\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial A}{\partial t} \right) = \Delta_{\perp} A - k_0^2 \varepsilon_2 (|A|^2) A(x, y, z, t), \quad (4.28)$$

где u — групповая скорость. Введем вместо времени t сопровождающую координату

$$\tau = t - z/u. \quad (4.29)$$

Тогда уравнение (4.28) примет вид

$$2ik \frac{\partial A}{\partial z} = \Delta_{\perp} A + k_0^2 \varepsilon_2 (|A|^2) A(x, y, z, \tau), \quad (4.30)$$

совершенно аналогичный уравнению (4.5), только теперь в уравнение (4.30) входит время через параметр τ . Поэтому для анализа квазистационарной самофокусировки и дефокусировки достаточно во всех выражениях и формулах этого параграфа заменять такие, для которых инкремент Γ наибольший. Дифференци-

нить E_0 на $E_0(\tau)$. Например, длина самофокусировки (2.15) будет изменяться во времени, следя за изменением импульса отгибающей. Такие бегущие фокальные точки прочерчивают в нелинейной среде треки, весьма похожие на волноводные каналы.

§ 5. Самокомпрессия волновых пакетов и солитоны отгибающей

Рассмотрим распространение плоских волновых пакетов с одновременным учетом эффектов самовоздействия и дисперсионного расщепления. В среде с нелинейным показателем преломления ($\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_{\text{нл}}(|A|^2)$) параболическое уравнение для медленно изменяющейся амплитуды волнового пакета, отвечающее второму приближению в теории дисперсии (см. гл. III), имеет вид

$$2ik \frac{\partial A}{\partial z} = -k \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + \frac{k^2 \epsilon_{\text{нл}}(|A|^2)}{\epsilon_0} A(z, \tau). \quad (5.1)$$

Если ввести новые переменные

$$\tilde{z} = -\text{sign}\left(\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}\right) z, \quad \tilde{\tau} = \tau \left(k \left|\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}\right|^{1/2}\right)^{-1/2}, \quad \tilde{\epsilon}_{\text{нл}} = -\text{sign}\left(\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}\right) \epsilon_{\text{нл}}, \quad (5.2)$$

то уравнение (5.1) можно записать следующим образом:

$$2ik \frac{\partial A}{\partial \tilde{z}} = \frac{\partial^2 A}{\partial \tilde{\tau}^2} + \frac{k^2 \tilde{\epsilon}_{\text{нл}}(|A|^2)}{\epsilon_0} A(\tilde{z}, \tilde{\tau}). \quad (5.3)$$

Сравнение уравнения (5.3) с уравнением (4.5), описывающим стационарное самовоздействие волнового пучка, показывает, что между поведением плоского волнового пакета и пространственной самофокусировкой или дефокусировкой друмерного пучка ($m = 0$) имеется математическая аналогия. В силу математической идентичности уравнений (4.5) и (5.3) при анализе закономерностей нелинейного распространения волновых пакетов остаются в силе все выкладки и соответствующие выводы § 4–5 при формальной замене величин:

$$z \rightarrow \tilde{z}, \quad x \rightarrow \tilde{x}, \quad \epsilon_{\text{нл}} \rightarrow \tilde{\epsilon}_{\text{нл}}, \quad a \rightarrow T \left(k \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}\right)^{-1/2}. \quad (5.4)$$

Единственное существенное отличие заключается в том, что если пространственная самофокусировка пучков происходит в среде с $\epsilon_2 > 0$, то сжатие волновых пакетов может наблюдаться в среде с $\tilde{\epsilon}_2 > 0$, т. е. при $\epsilon_2 \partial^2 k / \partial \omega^2 < 0$, или $\epsilon_2 \partial u / \partial \omega > 0$. Например, нелинейное расщепление импульсов (аналог дефокусировки пучков в среде с $\epsilon_2 < 0$) развивается в среде с $\tilde{\epsilon}_{\text{нл}} < 0$, или $\epsilon_2 \partial u / \partial \omega < 0$. Этот вывод следует, в частности, из анализа интегралов движения волновых пакетов в нелинейной среде.

Используя связь переменных величин (5.2), можно сразу записать интегралы движения по аналогии с (4.41) и (4.43):

$$I_1 = \int |A|^2 d\tau, \quad (5.5)$$

$$I_2 = \int \left\{ \left| \frac{\partial A}{\partial \tau} \right|^2 + \frac{k_0^2}{k (\partial^2 k / \partial \omega^2)} F_{\text{нл}}(|A|^2) \right\} d\tau. \quad (5.6)$$

Теперь при $I_2 > 0$ происходит дисперсионное и нелинейное расщепление импульса — компрессия волнового пакета, а при $I_2 < 0$ дисперсионное расщепление подавляется эффектом самосжатия импульса — образуется солитонное состояние. Условие $I_2 < 0$, как видно из (5.6), можно достичь только в среде с $\epsilon_2 \partial^2 k / \partial \omega^2 < 0$.

Стационарный солитон вида $A = \exp(iTz)A_c(\tau)$ (аналог двумерного волновода) имеет структуру типа (4.7):

$$A_c = \sqrt{2} E_c \operatorname{ch}^{-1}(\pi/T_c) \quad (5.7)$$

при наличии соотношений между параметрами солитона

$$\Gamma = -\frac{1}{2T_c^2} \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} = -\frac{k e_2 E_c^2}{2\epsilon_0}. \quad (5.8)$$

Солитон (5.7) обладает энергией (ср. с (4.8))

$$\mathcal{E}_{\text{кр}} = -\frac{\epsilon_0 \lambda_0}{4\pi^2 e_2 T_c} \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}, \quad (5.9)$$

которая обратно пропорциональна его длительности.

При описании нелинейного распространения волнового пакета в предположении сохранения формы отгибающей можно воспользоваться результатами безбарьерационной самофокусировки двумерных пучков. Автомодельное представление гауссова импульса переменной длительности с квадратичным изменением фазы по аналогии с (4.16) или (3.2) и (3.3) записывается так:

$$A = \frac{E_0}{V f(z)} \exp \left[-\frac{t^2}{T^2 z^2} - \frac{i\tau^2}{2f} \frac{df}{dz} \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right)^{-1} \right]. \quad (5.10)$$

Огносительное изменение длительности импульса $f(z) = T(z)/T$ в кубично-нелинейной среде описывается уравнением типа (4.17):

$$\left(\frac{df}{dz} \right)^2 = \frac{\text{sign}(z_0)(1-f)}{R_{\text{нл}}^2 T f} + \frac{f^2 - 1}{L_1^2 f^2}, \quad (5.11)$$

где нелинейная длина

$$R_{\text{нл}, T} = T \left(\sqrt{\frac{z_0}{2e_2 E_0^2 (\partial^2 k / \partial \omega^2)}} \right)^{1/2}, \quad (5.12)$$

а длина дисперсионного расплюсования (см. гл. III)

$$L_p = \frac{T^2}{2|\partial^2 k / \partial \omega^2|} \quad . \quad (5.13)$$

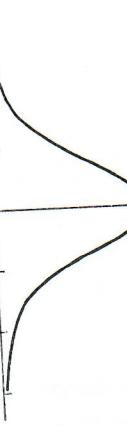
При условии $R_{\text{ил}} \ll L_p$ или $\varepsilon_0 \gg \varepsilon_{\text{кр}}$ волновой пакет используется на длине $z \approx R_{\text{ил},T}$ самосжатие, если $\varepsilon_2 > 0$, или нелинейное расслабление, если $\varepsilon_2 < 0$. При этом, очевидно, импульс

нейное радиомодулирование, приобретает дополнительную фазовую модуляцию. Он может разрываться в полинойской пакет неустойчив. В среде с $\tilde{\varepsilon}_2 > 0$ аналогично энергии — солитоны —

биться на отдельные сгустки, разбивающиеся в самофокусирующиеся волны. Наиболее быстро на длинах волновых нитей. Наиболее быстро на длинах волновых нитей. Наиболее быстро на длинах волновых нитей.

$$T_{\text{опт}} = \left(\frac{-\varepsilon_0 k}{s_0 E^2 \partial^2 k / \partial \Omega^2} \right)^{1/2}. \quad (5.14)$$

В результате распадной неустойчивости волновой пакет с энергией \mathcal{E}_0 разбивается на солитоны, каждый из которых несет энергию $\mathcal{E}_{\text{кр}}$.



Итак, в среде с $\varepsilon_2 \partial^2 k / \partial \omega^2 < 0$ может сформироваться солитон огибающей (5.7), профили интенсивности которого имеют колоколообразную форму (рис. 12.4а). Однако и в среде с $\varepsilon_2 \partial^2 k / \partial \omega^2 > 0$ могут распространяться гравитационные

рангом k вида $A = A_c (\pi/T_c) > 0$ волны типа $\propto \exp(iTz)$. Решением уравнения (5.1), ограниченным во всем пространстве, является волна с амплитудой

$$\frac{C}{C_0} = \frac{en_0 E_0}{8\pi} \left(\frac{-\varepsilon_0 k}{\varepsilon_2 (\partial^2 k / \partial \omega^2)} \right)^{1/2}. \quad (5.15)$$

квоти волновой пакет с энергией E_0 , каждый из которых несет энергию

§ 6. Обращение Водяного фронта

§ 6. Обращение *волн*

Помимо эффектов самовоздействия в среде с кубичной пелинейностью могут иметь место четырехвольновые взаимодействия на частотах

$$(I) \quad (6.4)$$

(I)
(II)

$\omega_1 = \omega_2 + \omega_3 + \omega_4$ (ср. с трехволновыми взаимодействиями в квадратично-нелинейной среде $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$). Как видно из (6.1), четырехвольновые взаимодействия типа I можно осуществлять между четырьмя волнами одной частоты ω_j , имеющими различные фазы, если они распространяются в разных направлениях. Фазо-

обращения волнового фронта. Рассмотрим в качестве примера следующую схему взаимодействия (рис. 12.5). В кутично-пеленговую среду с противоположных сторон (слева и справа) входят две моночные волны накачки с равными амплитудами $E_0(x)$. В среде они испытывают самовоздействие, которое заключается в изменении показателя преломления. Гомоплексные амплитуды источников пакета описываются укороченными уравнениями:

੮

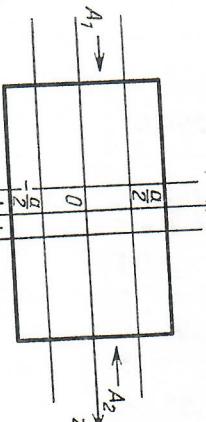
$$\partial A_1 / \partial z = -ik_0 n_2 (|A_1|^2 + 2|A_2|^2) A_1, \\ \partial A_2 / \partial z = -ik_0 n_2 (|A_2|^2 + 2|A_1|^2) A_2,$$

Рис. 12.4. Светлый (а) и темный (б) солитоны отдающей в кубично-нелинейной среде

$$\Gamma = -\frac{k\epsilon_2 E_c^2}{2T_c^2} = -\frac{1}{T_c^2} \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}. \quad (5.17)$$

При $\tau = 0$ амплитуда волны равна нулю и солитон отгибается (рис. 12.4б) от светлого темным.

солитоном у темного другого знака нелинейной добавки Γ , к волновому числу и в два раза больше амплитуды E_c . В гл. XI описан темный солитон в квадратично-нелинейной среде с относительной дисперсией первого порядка, образующийся в результате трехчастотного взаимодействия с двумя светлыми солитонами (см. также сплошной темный солитон волны в квадратично-нелинейной среде).



тической) входят две монопольные волны (справа) и волны накачки с равными амплитудами $E_0(x)$. В среде они испытывают самовоздействие, которое заключается в изменении показателя преломления. Комплексные амплитуды встречных волн накачки описываются уравнениями:

$$\partial A_1 / \partial z = -ik_0 n_2 (|A_1|^2 + 2|A_2|^2) A_1, \quad (6.3)$$

$$\partial A_2 / \partial z = -ik_0 n_2 (|A_2|^2 + 2|A_1|^2) A_2, \quad (6.4)$$

где n_2 — коэффициент нелинейности показателя преломления $\chi_{(2)}$, причем $n_2 \approx \varepsilon_2 n_0 / 2\varepsilon_0$, $k_0 = \omega/c$. В результате

тате решения (6.3), (6.4) находим амплитуды волн накачки:

$$A_1 = E_0(x) \exp[-i \cdot 3q_{\text{нл}}(x)z], \quad A_2 = E_0(x) \exp[i \cdot 3q_{\text{нл}}(x)z], \quad (6.5)$$

$$q_{\text{нл}} = k_1 n_2 E_0^2(x).$$

Видно, что в симметричном случае, когда амплитуды встречных волн равны друг другу, изменения волновых векторов одинаковы. Поэтому соотношение $k_1 + k_2 = 0$ остается в силе и при учете нелинейных добавок к волновым числам $q_{\text{нл}}$.

Направим перпендикулярно двум волновым пучкам накачки вдоль оси x слабый сигнал с амплитудой A_3 (см. рис. 12.5). В соответствии с условием синхронизма (6.2) в нелинейной среде волна A_3 , идущая навстречу сигналу (должно выполняться четвертая волна A_4 , идущая $k_3 + k_4 = 0$). Амплитуды этих двух слабых волн получаются параметрически связанным уравнением:

$$\partial A_3 / \partial x = -i \cdot 2q_{\text{нл}}(x)(A_4^* + A_4), \quad (6.6)$$

$$\partial A_4 / \partial x = i \cdot 2q_{\text{нл}}(x)(A_3^* + A_3). \quad (6.7)$$

(ср. с (3.5), (3.6) при $\Delta k = 0$ и $A_3 = E_0$). В отличие от параметрического возбуждения волн в квадратично-нелинейной среде (см. (6.6), (6.7)) учитывают эффект кросс-модуляции, т. е. изменение показателя преломления слабых волн под действием мощных волн накачки. Для слабых волн надо задать граничные условия. Пусть пучки накачки имеют ширину a и однородное распределение поля. Тогда на стороне $x = -a/2$ известна амплитуда падающей волны сигнала:

$$(6.8)$$

$$A_3(x = -a/2) = E_3(z),$$

а на другой стороне пучка накачки отсутствует поле возбуждающей волны на $x = a/2$:

$$(6.9)$$

$$A_4(x = a/2) = 0.$$

Решая (6.6), (6.7) с граничными условиями (6.8), (6.9), находим распределение амплитуд слабых волн в области пучков накачки

$$A_3 = E_3(z) \exp \left[-i \cdot 2q_{\text{нл}} \left(x + \frac{a}{2} \right) \right] \frac{\cos [2q_{\text{нл}}(x - a/2)]}{\cos (2q_{\text{нл}} a)}, \quad (6.10)$$

$$A_4 = iE_3^*(z) \exp \left[i \cdot 2q_{\text{нл}} \left(x + \frac{a}{2} \right) \right] \frac{\sin [2q_{\text{нл}}(x - a/2)]}{\cos (2q_{\text{нл}} a)}. \quad (6.11)$$

Полученные выражения показывают, что с увеличением интенсивности накачки E_0^2 амплитуды обеих слабых волн растут и при абсолютной неустойчивости встречных волновых пучков монотонно абсолютной неустойчивости встречных волновых пучков монотонно накачки, при которой наблюдается генерация встречных волн A_3 и A_4 (ср. с порогом абсолютной неустойчивости волнового пакета в квадратично-нелинейной среде (см. § 3 гл. XI)).

Полагая в (6.11) $x = -a/2$, находим амплитуду слабой волны, отраженной от нелинейной среды:

$$A_4 = -iE_3^*(z) \operatorname{tg}(2k_1 n_2 E_0^2 a). \quad (6.12)$$

То обстоятельство, что амплитуда отраженной волны пропорциональна комплексно-сопряженной амплитуде падающего на среду сигнала, и говорит об обращении волнового фронта.

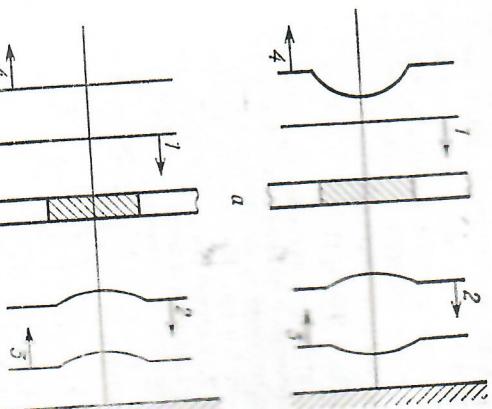
Явление обращения волнового фронта позволяет решить следующую важную задачу (рис. 12.6). Пусть слева падающая плоская волна с фронтом $E_1 = E_0 \exp[i(\omega t - k_1 x)]$ (этап T), которая на своем пути встречает неоднородную среду. В неоднородной среде волна приобретает дополнительный падающий фронт: $E_2 = E_0 \exp \{i[\omega t - k_1 x - \Phi(z)]\}$. На этапе 2 фронт волны не плоский: $k_1 x + \Phi(z) = \text{const}$. Далее обсудим два случая.

В первом случае (рис. 12.6a) волна падает на плоское зеркало. После отражения на этапе 3 $E_3 = E_0 \exp[i(\omega t + k_1 x - \Phi(z))]$, что означает сохранение формы голлового фронта. Если отраженная волна проходит через неоднородную среду, то набег сложится с узкомимением: $E_4 = E_0 \exp[i(\omega t + k_1 x - 2\Phi(z))]$. Таким образом, на этапе 4 искачения голлового фронта еще более увеличиваются, волновой фронт определяется поверхностью $k_1 x - 2\Phi(z) = \text{const}$.

Принципиально другая, необычная ситуация наблюдается, если вместо обычного плоского зеркала поставить ОВФ-зеркало (рис. 12.6b). Теперь после отражения волны изменяется знак набега фазы в соответствии с законом (6.12):

$$E_3 = E_0 \exp[i(\omega t + k_1 x + \Phi(z))],$$

при этом изменяется и форма поверхности волнового фронта $k_1 x + \Phi(z) = \text{const}$ (этап 2). При прохождении волной через абсолютно неоднородную среду у нее будет появляться, как и в первом случае, набег фазы $\Phi(z)$, который полностью компенсирует исчезающую фазу $\Phi(z)$, поскольку $\Phi(z)$ является нечетной функцией z .



жения волнового фронта волны (этап 3) с обращенным фронтом. В итоге отраженная волна восстанавливает первоначальный плоский волновой фронт: $E_4 = E_0 \exp [i(\omega t + kz)]$ (этап 4). Если говорить о волновых пучках, то обращение волнового фронта позволяет придать им минимальную угловую расходимость, определяемую только дифракцией.

Для обращения волнового фронта используются и другие типы нелинейного взаимодействия волн: трехвольновые в квадратично-нелинейной среде, при вынужденных рассеяниях с участием колебаний и волн в среде другой физической природы, чем падающая волна, и т. д.

ЗАДАЧИ

1. Найти значение критической мощности самофокусировки оптического излучения с длиной волны $\lambda = 0,5$ мкм при резонансном самовоздействии в газах, прилив $\varepsilon_2 = 10^{-7}$ ед. СГСЭ.

Ответ. Подставляя данные в (4.9), находим $P_{\text{кр}} = 0,3$ Вт.

2. Рассчитать длину самофокусировки светового пучка с длиной волны $\lambda = 1,06$ мкм и поперечным радиусом $a = 1$ мм при 100-кратном повышении критической мощности.

Решение. Переищем формулу для длины самофокусировки (3.12) в другой, более удобном для данной задачи виде, учитя соотношение (3.9):

$$z_\Phi = \frac{\pi a^2}{\lambda} \left(\frac{iP_0}{P_{\text{кр}}} - 1 \right)^{-1/2}. \quad (1)$$

Подставляя в (1) исходные данные, получаем $z_\Phi \approx 1$ м.

3. Вывести формулу для фокусного расстояния тонкой нелинейной линзы (толщиной l). Рассмотрим уравнение (3.6) для ширины гауссова пучка с осевой симметрией ($m = 1$). Протолокание тонкой линзы заключается в том, что внутри нелинейного слоя сечение пучка практически не меняется ($f(z) \approx z$) ≈ 1 . Тогда, интегрируя (3.6) один раз и полагая при этом в правой части $f = 1$, находим с учетом связи $df/dz = F_{\text{ни}}^{-1}$ следующее выражение для фокусного расстояния тонкой нелинейной линзы:

$$(2)$$

$$F_{\text{ни}} = -\text{sign } \varepsilon_2 \cdot R_{\text{ни}}^2 / l.$$

Видно, что в среде с $\varepsilon_2 > 0$ формируется отрицательная линза, а в среде с $\varepsilon_2 < 0$ — положительная. Условая расходимость гауссова пучка, приобретаемая после прохождения тонкой нелинейной пластины, равна

$$(3)$$

$\theta_{\text{ни}} = -\text{sign } \varepsilon_2 \cdot a / R_{\text{ни}}^2$.

Полученные формулы (2), (3) справедливы при условии $l \ll |R_{\text{ни}}|$, т. е. когда нелинейный фокус расположен далеко за пределами нелинейного слоя.

4. Найти интенсивность в центре оптического солитона с длиной волны $\lambda = 1,06$ мкм и интенсивностью $T_c = 1$ пс в стекле с $\varepsilon_2 = 10^{-11}$ ед. СГСЭ и $\partial^2 k / \partial \omega^2 = -10^{-27}$ с²/см.

Решение. Из (5.8) можно найти выражение для интенсивности в центре солитона опирающей:

$$(4)$$

$$I_c = \frac{c \lambda}{16 \pi^2 \varepsilon_2 T_c^2} \left| \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right|.$$

После подстановки в (1) данных задачи, получаем $I_c = 4 \cdot 10^9$ Вт/см².

Плотность энергии такого солитона равна $\mathcal{E}_2 = 2T_c I_c = 4 \cdot 10^{-3}$ Дж/см².