

Глава XI

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ И ПУЧКОВ

На эффективность взаимодействия волн разных частот сильное ограничение накладывает дисперсия. Как было показано в предыдущей главе, только при выполнении условия фазового синхронизма можно осуществить эффективное взаимодействие монохроматических волн. Допустим, что мы подобрали такое условие. Теперь, если изменить частоты волн, то из-за дисперсии изменятся их фазовые скорости и нарушится фазовый синхронизм, а это приведет к ослаблению взаимодействия. Данное обстоятельство играет чрезвычайно важную роль в физике взаимодействия волновых пакетов. Действительно, волновые пакеты обладают наборами спектральных компонент, сконцентрированных вблизи несущих, или центральных, частот (см. гл. II). Если условия фазового синхронизма выполнены для центральных компонент, то для других частотных компонент синхронизм, как правило, нарушается.

Таким образом, в диспергирующей среде при взаимодействии волновых пакетов различные спектральные компоненты обмениваются энергией с неодинаковой эффективностью. Это ведет к изменению формы огибающих спектров и соответственно к трансформации профилей интенсивности и фазовой модуляции волновых пакетов. Именно анализ амплитудно-фазовых и спектральных характеристик составляет главную задачу при разработке теории взаимодействующих волновых пакетов.

Нестационарные эффекты, сопровождающие взаимодействие волновых пакетов, можно рассчитывать в различных приближениях теории дисперсии. В первом приближении, оперирующем с групповыми скоростями, учитывается расстройка групповых скоростей, а во втором — дисперсионное расплывание импульсов или, напротив, их компрессия.

Эффекты группового запаздывания будут рассматриваться на наиболее характерных примерах трехволновых взаимодействий: возбуждение второй гармоники коротким импульсом, конвективная и абсолютная распадная неустойчивость волновых пакетов, «цветные» солитоны. Эти результаты без особого труда можно перенести на описание неколлинеарного взаимодействия волновых

пучков, вводя вместо расстроек групповых скоростей по модулю, фигурирующих в первом приближении теории дисперсии, расстройки векторов групповых скоростей по направлениям.

Взаимодействие импульсов во втором приближении теории дисперсии протекает аналогично взаимодействию волновых пучков при учете дифракции. Поэтому в конце главы мы рассмотрим дифракционную задачу о возбуждении второй гармоники фокусированным пучком, используя метод параболического уравнения.

§ 1. Уравнения для огибающих волновых пакетов в квадратично-нелинейной среде

Пусть в квадратично-нелинейной среде распространяются три волновых пакета, поле которых запишем в следующем виде:

$$\vec{E} = \frac{1}{2} \sum e_j A_j(t, z) \exp [i(\omega_j t - k_j z)] + \text{к. с.}, \quad (1.1)$$

где A_j — комплексные амплитуды, медленно изменяющиеся во времени и в пространстве; несущие частоты пакетов связаны соотношением $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ (см. условие (10.3.1)). Далее, подставляя (1.1) в уравнения Максвелла с учетом квадратичной по полю нелинейной части поляризации среды (10.1.1) — (10.1.6) и проводя обычную процедуру укорачивания уравнения, приходим к системе:

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{1}{v_{\text{grp } 1}} \frac{\partial A_1}{\partial t} = - \frac{i\gamma\omega_1}{cn_1} A_3 A_2^* \exp(-i\Delta kz), \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{1}{v_{\text{grp } 2}} \frac{\partial A_2}{\partial t} = - \frac{i\gamma\omega_2}{cn_2} A_3 A_1^* \exp(-i\Delta kz), \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial z} + \frac{1}{v_{\text{grp } 3}} \frac{\partial A_3}{\partial t} = - \frac{i\gamma\omega_3}{cn_3} A_1 A_2 \exp(i\Delta kz), \quad (1.4)$$

где $v_{\text{grp } j}$ — групповые скорости. Существенным отличием этих уравнений от уравнений (10.3.5) — (10.3.7), описывающих взаимодействие плоских монохроматических волн, является замена дифференциального оператора d/dz на операторы в частных производных $\partial/\partial z + v_{\text{grp } j} \partial/\partial t$, которые отвечают первому приближению теории дисперсии (см. § 8 гл. II).

В отсутствие нелинейного взаимодействия (при очень малых уровнях интенсивностей) ($\gamma = 0$) правые части в (1.2) — (1.4) исчезают и каждый волновой пакет распространяется без искажений со своей групповой скоростью

$$A_j = E_j(\tau_j), \quad \tau_j = t - z/v_{\text{grp } j}. \quad (1.5)$$

Наибольший интерес здесь представляет не сам эффект распространения импульсов, а сравнение их относительного движения с учетом разницы групповых скоростей.

Разбегание импульсов можно наглядно показать на плоскости zt , изобразив на ней характеристики $\tau_j = \text{const}$ (рис. 11.1). Для определенности мы положили $v_{\text{grp}3} > v_{\text{grp}2} > v_{\text{grp}1}$. Угловые коэффициенты характеристик, составляемые с осью z , равны обратным величинам групповых скоростей $1/v_{\text{grp}j}$. Разница в угловых

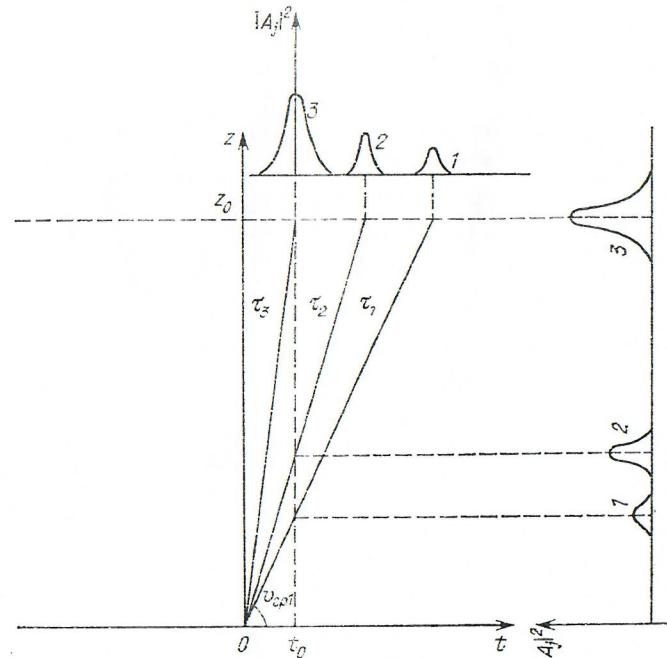


Рис. 11.1. Взаимное расположение характеристик $\tau_j = t - z/v_{\text{grp}j} = 0$ трех волновых пакетов, распространяющихся с разными групповыми скоростями, и построенные по ним положения импульсов огибающих пакетов во времени в момент времени t_0 (справа) на расстоянии z_0 (вверху) и в пространстве в момент времени t_0 (справа)

коэффициентах характеризуется величинами

$$v_{lm} = 1/v_{\text{grp}l} - 1/v_{\text{grp}m}, \quad (1.6)$$

которые называются *расстройками обратных групповых скоростей* двух импульсов с частотами ω_l и ω_m или просто *групповыми расстройками*. Так как групповые скорости фигурируют в теории дисперсии первого порядка, то групповые расстройки учитывают относительную дисперсию только первого порядка. Если рассмотреть наклоны характеристик к оси времени t , то их угловые коэффициенты равны групповым скоростям $v_{\text{grp}j}$, а групповая расстройка — их разности:

$$\delta v_{\text{grp}lm} = v_{\text{grp}l} - v_{\text{grp}m} = -v_{lm}v_{\text{grp}l}v_{\text{grp}m}. \quad (1.7)$$

Характеристическая плоскость zt удобна для установления положения волновых пакетов во времени и в пространстве. Зададим, например, при $z = 0$ три совмещенных по времени импульса. Они будут распространяться вдоль своих характеристических направлений, и время их прихода в точку z можно легко найти, проводя на рис. 11.1 горизонтальный разрез. Относительное запаздывание двух любых импульсов растет пропорционально прошедшему расстоянию: $t_3 = v_{lm}z$. Эффекты, связанные с расстройкой групповых скоростей, начинают проявляться, когда запаздывание становится сравнимым с длительностями импульсов T . Это происходит на характерной длине

$$l_{v_{lm}} = T / |v_{lm}|, \quad (1.8)$$

называемой *длиной группового запаздывания*. Вместо длительности импульсов в (1.8) может входить характеристическое время мелкомасштабной модуляции амплитудного профиля или фазы волны.

При анализе задач с начальными условиями, заданными при $t = 0$, динамику распространения волновых пакетов можно проследить, проводя на характеристической плоскости разрезы $t = t_0$. Здесь относительная дисперсия первого порядка приводит к разбеганию пакетов с пространственной протяженностью, равной a , через время группового запаздывания

$$T_{v_{lm}} = a / |v_{\text{grp}l} - v_{\text{grp}m}|. \quad (1.9)$$

Вернемся теперь к задаче о трехчастотном взаимодействии волновых пакетов. Из уравнений (1.2) — (1.4) можно вывести ряд законов сохранения. Так, энергии импульсов

$$\mathcal{E}_j = \frac{cn_j}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |A_j|^2 dt \quad (1.10)$$

подчиняются соотношениям Мэнли—Роу (см. (10.3.8)). В отсутствие диссилиации сохраняется полная энергия трех импульсов.

Взаимодействие коллимированных волновых пучков без учета дифракции описывается укороченными уравнениями

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A_1}{\partial x} = -\frac{i\gamma\omega_1}{cn_1} A_3 A_2^* \exp(-i\Delta kz), \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \beta_2 \frac{\partial A_2}{\partial x} = -\frac{i\gamma\omega_2}{cn_2} A_3 A_1^* \exp(-i\Delta kz), \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial z} + \beta_3 \frac{\partial A_3}{\partial x} = -\frac{i\gamma\omega_3}{cn_3} A_1 A_2 \exp(i\Delta kz), \quad (1.13)$$

в которых x — поперечная координата, β_j — угловой коэффициент наклона лучевого вектора по отношению к оси z . Сравнение этих уравнений с уравнениями (1.2) — (1.4) показывает их полную математическую эквивалентность друг другу. Поэтому все результаты анализа трехчастотных взаимодействий волновых па-

кетов переносятся на описание взаимодействий волновых пучков. Такая пространственно-временная аналогия широко используется в физике и теории нелинейных волн.

При согласовании групповых скоростей $v_{\text{grp}1} = v_{\text{grp}2} = v_{\text{grp}3}$ относительная дисперсия первого порядка устраняется, $v_{12} = v_{13} = 0$ и уравнения (1.2) — (1.4) приобретают в переменных z, t точно такой же вид, как при описании взаимодействия плоских монохроматических волн (см. (10.3.5) — (10.3.7)). Это случай квазистационарного взаимодействия, когда время входит в решения укороченных уравнений как параметр через сопровождающее время $\tau = t - z/v_{\text{grp}}$.

Более сложная картина взаимодействия развивается между волновыми пакетами, стремящимися разбежаться из-за разницы их групповых скоростей. Волновая нестационарность, обусловленная относительной дисперсией первого порядка, проявляется на расстояниях, больших длины группового запаздывания, или на временах, превышающих характерное время запаздывания. Она оказывает существенное влияние на энергообмен между импульсами разных частот, на изменение амплитудных профилей и фазовой модуляции пакетов. С другой стороны, сильно нелинейные взаимодействия меняют дисперсию волн, вследствие чего волновые пакеты распространяются с иными групповыми скоростями, чем в линейной среде. При полной компенсации дисперсии волн и нелинейных эффектов в среде образуются солитоны огибающей.

В дальнейшем мы рассмотрим ряд типичных примеров трехчастотного взаимодействия волновых пакетов и пучков, таких как генерация второй гармоники и параметрическое усиление при распадной неустойчивости.

§ 2. Генерация второй гармоники коротким импульсом при расстройке групповых скоростей

Генерация второй гармоники представляет важный случай трехвольнового взаимодействия, когда частоты двух волн совпадают между собой: $\omega_1 = \omega_2$, а третья частота равна удвоенной частоте первых двух: $\omega_3 = 2\omega_1$. Для упрощения дальнейшего изложения переобозначим частоты так, что $\omega_2 = 2\omega_1$, где ω_2 — частота второй гармоники, а ω_1 — частота основного излучения. Рассмотрим нестационарные волновые явления при возбуждении второй гармоники в заданном поле короткого импульса волны накачки с помощью укороченных уравнений следующего вида (ср. с (10.1.2) — (10.1.4) и с (10.2.3), (10.2.4)):

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{1}{v_{\text{grp}1}} \frac{\partial A_1}{\partial t} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{1}{v_{\text{grp}2}} \frac{\partial A_2}{\partial t} = -\frac{i\gamma\omega_1}{cn_2} A_1^2 \exp(i\Delta kz) \quad (2.2)$$

с граничными условиями на входе в нелинейную среду при $z = 0$

$$A_1 = E_1(t), \quad A_2 = 0. \quad (2.3)$$

Общее выражение для амплитуды второй гармоники, найденное как решение уравнений (2.1), (2.2) с условиями (2.3), записывается в интегральной форме:

$$A_2 = -\frac{i\gamma\omega_1}{cn_2} \int_0^z E_1^2(\tau_2 + v_{21}\xi) \exp(i\Delta k\xi) d\xi, \quad (2.4)$$

где v_{21} — групповая расстройка (см. (1.6)). При согласовании групповых скоростей ($v_{21} = 0$) амплитуда волны накачки выполняется из-под знака интеграла, и (2.4) переходит в подробно исследованное квазистационарное решение типа (10.2.11). При этом было установлено, что наибольшая эффективность удвоения частоты достигается при фазовом синхронизме $\Delta k = 0$, когда амплитуда гармоники увеличивается пропорционально пройденному расстоянию:

$$A_2(\tau_1, z) = -\frac{i\gamma\omega_1}{cn_2} E_1^2(\tau_1) z. \quad (2.5)$$

Из (2.5) видно, что если импульс волны накачки $E_1(\tau_1)$ имеет колоколообразную форму (гауссов, лоренцев и т. д.), то импульс второй гармоники становится короче основного. Энергия гармоники при групповом синхронизме растет пропорционально квадрату расстояния ($\mathcal{E}_2 \sim z^2$).

Рассогласование групповых скоростей кардинально меняет процесс удвоения частоты короткого импульса. За групповой длиной, равной $l_{v12} = T_1 / |v_{12}|$, начинается интенсивный уход энергии гармоники из области возбуждения, задаваемой импульсом накачки. В результате спуска энергии импульс гармоники уничтожается, а темп перекачки энергии замедляется. Проследим за динамикой формирования импульса второй гармоники в заданном поле колоколообразного импульса основного излучения с огибающей (рис. 11.2, штриховая кривая)

$$E_1(\tau_1) = E_{01} \operatorname{sech}(\tau_1/T_1). \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в (2.4) и полагая $\Delta k = 0$, после интегрирования находим следующее выражение для амплитуды волнового пакета на удвоенной частоте:

$$A_2 = -\frac{i\gamma\omega_1}{cn_2} E_{01}^2 l_{v12} \operatorname{sh} \frac{z}{l_{v12}} \operatorname{sech} \frac{\tau_1}{T_1} \operatorname{sech} \frac{\tau_2}{T_1}. \quad (2.7)$$

Проанализируем с помощью полученной формулы (2.7) сначала форму импульса второй гармоники $|A_2(t, z)|$ (рис. 11.2, сплошные кривые). Максимум огибающей (вершина импульса) гармоники лежит на характеристике $\tau_1 = v_{21}z/2$, откуда следует, что он распространяется со средней групповой скоростью $v_{\text{grp}} =$

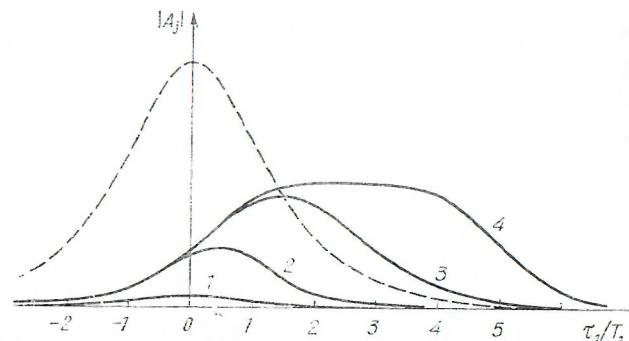


Рис. 11.2. Профили импульса второй гармоники (сплошные кривые), возбуждаемой колоколообразным импульсом накачки (штриховая кривая), на разных расстояниях: $z/l_{v12} = 0,1$ (1), 1 (2), 3 (3), 5 (4)

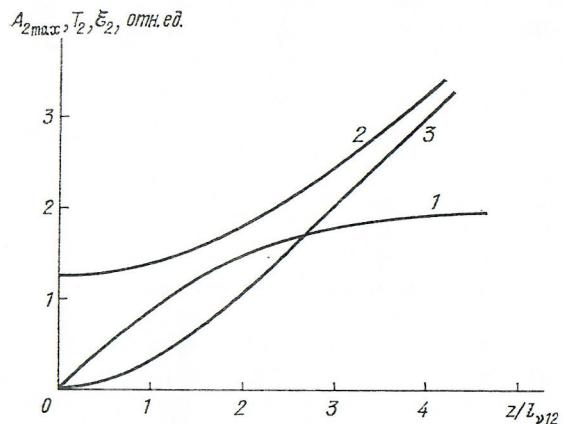


Рис. 11.3. Зависимости максимума амплитуды (1), длительности (2) и энергии (3) импульса второй гармоники, возбуждаемой коротким импульсом накачки, от расстояния, нормированного на длину группового запаздывания l_{v12}

$= 2v_{\text{гр}1}v_{\text{гр}2}/(v_{\text{гр}1} + v_{\text{гр}2})$ и изменяется с расстоянием по закону (рис. 11.3, кривая 1)

$$A_{2\max} = \frac{2\gamma\omega_1}{cn_2} E_{01}^2 l_{v12} \operatorname{th} \frac{z'}{2l_{v12}}. \quad (2.8)$$

Из-за сноса энергии за групповой длиной ($z \gg l_{v12}$) амплитуда гармоники практически не растет и насыщается на уровне

$$A_{2\text{нас}} = \frac{2\gamma\omega_1}{cn_2} E_{01}^2 l_{v12}. \quad (2.9)$$

Однако процесс преобразования энергии не прекращается и на больших расстояниях. В нестационарной области генерации им-

пульс гармоники приобретает почти прямоугольную форму (рис. 11.2, кривая 4), длительность его увеличивается пропорционально прошедшему расстоянию (рис. 11.3, кривая 2):

$$T_2(z) \sim v_{12}z. \quad (2.10)$$

Хвост импульса гармоники отстает от импульса основной частоты ($v_{\text{гр}2} < v_{\text{гр}1}$), а его фронт как бы приклеен к импульсу накачки. Это и приводит к растягиванию импульса второй гармоники (см. (2.10)).

Интегрирование квадрата модуля амплитуды гармоники, задаваемой (2.7), дает следующее выражение для энергии (рис. 11.3, кривая 3):

$$\mathcal{E}_2 = \frac{cn_2}{8\pi} A_{2\text{нас}}^2 T_1 \left[\frac{z/l_{v12}}{\operatorname{th}(z/l_{v12})} - 1 \right]. \quad (2.11)$$

В квазистационарном режиме генерации пока $z < l_{v12}$ энергия импульса гармоники растет как z^2 , а в нестационарном режиме

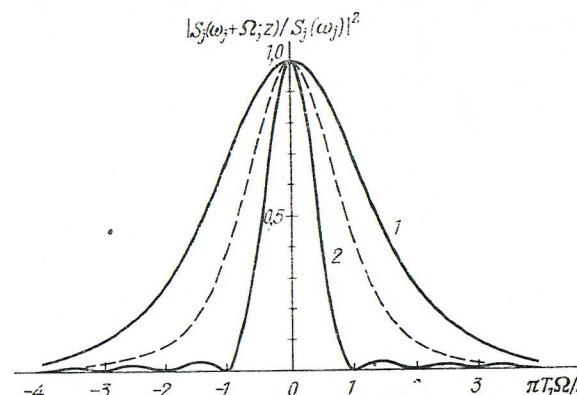


Рис. 11.4. Огибающие спектров основного излучения (штриховая кривая) и второй гармоники (сплошные кривые), возбуждаемой в квазистационарном (1) и нестационарном (2) режимах

за групповой длиной ($z \gg l_{v12}$) рост энергии поддерживается за счет увеличения длительности импульса гармоники: $\mathcal{E}_2 \sim A_{2\text{нас}}^2 T_2(z) \sim zl_{v12}$.

В различных исследованиях значительный интерес представляют и спектры волновых пакетов. Огибающая спектра волны накачки, промодулированной по закону (2.6), имеет тот же профиль, что и сам импульс (рис. 11.4, штриховая кривая):

$$S_1(\omega_1 + \Omega) \sim \operatorname{sech}(\pi T_1 \Omega / 2). \quad (2.12)$$

Преобразование Фурье от амплитуды второй гармоники (см. (2.7)) дает следующую формулу:

$$S_2(\omega_2 + \Omega) \sim \sin(v_{12}z\Omega/2)/\operatorname{sh}(\pi T_1 \Omega / 2). \quad (2.13)$$

Анализ последнего выражения показывает, что в квазистационарной области генерации спектр гармоники описывается гладкой функцией (рис. 11.4, кривая 1),

$$S_2 \sim T_1 \Omega / \text{sh}(\pi T_1 \Omega / 2). \quad (2.14)$$

Затем по мере увеличения расстояния начинают проявляться эффекты группового запаздывания, или относительной дисперсии первого порядка. Как было показано с помощью (2.7), импульс гармоники уширяется по закону (2.10), вследствие чего следует ожидать сужения спектральной линии гармоники. Действительно, полагая в (2.13) $z \gg l_{v12}$, можно сказать, что в нестационарном режиме возбуждения огибающая спектра гармоники принимает универсальную форму, не зависящую от начального спектра накачки S_1 (рис. 11.4, кривая 2).

$$S_2 \sim \text{sinc}(\Omega / \Omega_c), \quad \Omega_c = 2 / (|v_{12}| z), \quad (2.15)$$

где $\text{sinc } x = x^{-1} \sin x$. Ширина спектра Ω_c гармоники сужается обратно пропорционально координате z ; она определяет область частот, в пределах которой идет синхронная генерация гармоники. Поэтому величину Ω_c (см. (2.15)) называют *частотной шириной синхронизма* при относительной дисперсии первого порядка.

Нетрудно убедиться, что спектр (2.15) соответствует прямоугольному импульсу длительностью $T_2 = |v_{12}| z$. Именно такой импульс гармоники формируется в нестационарной области генерации (см. рис. 11.2 и формулы (2.9)–(2.10)), когда $z \gg l_{v12}$ или $\Omega_1 \ll \Omega_c$.

§ 3. Распадная неустойчивость волновых пакетов

С трехчастотным взаимодействием связана распадная неустойчивость мощной волны накачки частоты ω_3 в квадратично-нелинейной среде. За счет отбора энергии у волны накачки возникает параметрическое усиление слабых волн на частотах ω_1 и ω_2 (см. § 3 гл. X). Если считать, что энергия волнового пакета накачки практически не истощается, то огибающая основного импульса не искается, а поведение слабых волн описывается, как следует из (1.2)–(1.4), двумя параметрически связанными уравнениями:

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{1}{v_{\text{grp}1}} \frac{\partial A_1}{\partial t} = -i \frac{\gamma \omega_1}{c n_1} E_3(\tau_3) A_2^*, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{1}{v_{\text{grp}2}} \frac{\partial A_2}{\partial t} = -i \frac{\gamma \omega_2}{c n_2} E_3(\tau_3) A_1^*. \quad (3.2)$$

В эти уравнения не вошли члены, учитывающие расстройку волновых векторов Δk , и коэффициенты поглощения δ , так как их можно достаточно просто исключить из исходных уравнений путем специальной нормировки амплитуд на экспоненциальные множители (см. задачу 2).

В зависимости от постановки задачи можно интересоваться решениями системы (3.1), (3.2), нарастающими или во времени, или вдоль направления распространения. В первом варианте неустойчивость зарождается внутри объема нелинейной среды, начиная

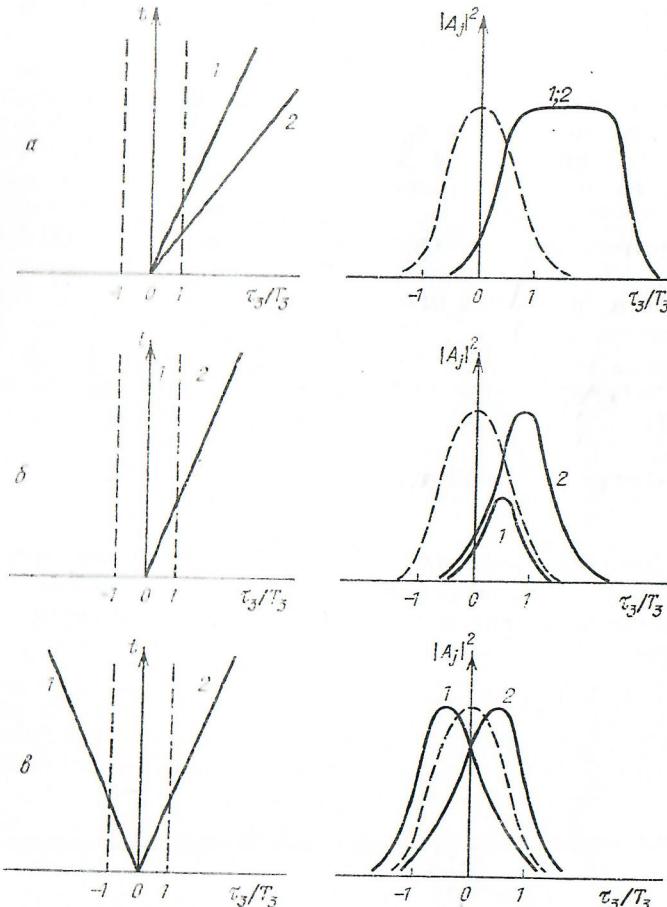


Рис. 11.5. Развитие конвективной (а, б) и абсолютной (в) неустойчивостей волнового пакета (штриховые линии). Слева — расположение характеристик $t = r_3 / (v_{\text{grp}} v_{33})$, справа — типичные профили огибающих импульсов за групповой длиной. Сплошные кривые 1 и 2 относятся к слабым волнам на частотах ω_1 и ω_2 соответственно

с некоторого момента времени. Во втором случае неустойчивость возникает после входа импульса накачки в нелинейную среду и затем развивается по мере проникновения волн в глубь среды. Для анализа распадной неустойчивости мы выберем первый ва-

риант, хотя никакого принципиального отличия (по крайней мере с точки зрения математических решений) в описании второго случая нет.

Итак, мы будем интересоваться экспоненциально нарастающими во времени решениями уравнений (3.1), (3.2). Распадную неустойчивость принято разделять на конвективную и абсолютную. При *конвективной неустойчивости* экспоненциальное усиление слабых волн наблюдается на конечном отрезке времени (или на конечном расстоянии), а при *абсолютной неустойчивости* рост амплитуд сохраняется и в сугубо нестационарной области, несмотря на уход части энергии слабых волн из области накачки.

Рассмотрим конвективную неустойчивость (рис. 11.5а) при $(v_{\text{тр}1} - v_{\text{тр}3})(v_{\text{тр}2} - v_{\text{тр}3}) > 0$. В этом случае обе слабые волны или отстают, или опережают импульс накачки. Положим для простоты $v_{\text{тр}1} = v_{\text{тр}2}$ (групповой синхронизм для слабых волн) и $v_{\text{тр}3} > v_{\text{тр}1}$. При этих условиях уравнения (3.1), (3.2) легко интегрируются, и экспоненциально нарастающее решение имеет вид

$$A_{1,2} \sim \exp[G], \quad G = \Gamma_0 v_{13}^{-1} \int_{\tau_1 v_{\text{тр}1}/v_{\text{тр}3}}^{\tau_3} \frac{E_3(\xi)}{E_{03}} d\xi. \quad (3.3)$$

Из (3.3) следует, что в поле ограниченного импульса накачки эффективное время взаимодействия сигнала с накачкой (т. е. время параметрического усиления) ограничено временем группового запаздывания

$$T_{v13} = a_3 / |v_{\text{тр}1} - v_{\text{тр}3}|, \quad (3.4)$$

где $a_3 = T_3 v_{\text{тр}3}$ — протяженность волнового пакета в пространстве, причем $T_{v13} = l_{v13}/v_{\text{тр}1}$. Коэффициент усиления уходящих волн насыщается на уровне

$$G_{\text{нac}} = \Gamma_0 |v_{13}^{-1}| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_3(t)}{E_{03}} dt, \quad (3.5)$$

который пропорционален площади амплитудного профиля импульса накачки (рис. 11.6, кривая а).

Если учесть поглощение слабых волн, из-за которого амплитуды волн испытывают тенденцию затухания, то процесс трехволнико-волнового взаимодействия может поддерживаться только при постоянном внешнем воздействии со стороны сторонних распределенных источников на частотах ω_1 и ω_2 , например, шумовой природы (конвективный режим параметрического рассеяния).

Теперь рассмотрим конвективную неустойчивость при $(v_{\text{тр}1} - v_{\text{тр}3})(v_{\text{тр}2} - v_{\text{тр}3}) = 0$ (рис. 11.5б). Если одна из слабых

волн, например, на частоте ω_1 распространяется попутно с импульсом накачки, т. е. $v_{\text{тр}1} = v_{\text{тр}3}$ (случай $v_{\text{тр}2} = v_{\text{тр}3}$ аналогичен этому), то экспоненциальное усиление сохраняется и после отрезка времени группового запаздывания (за групповой длиной).

Для коэффициента усиления G (напомним, что $A_{1,2} \sim \exp G$) с помощью модифицированного метода геометрической оптики неоднородных сред (см. гл. V) из уравнений (3.1), (3.2) можно получить следующее уравнение:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial z} + \frac{1}{v_{\text{тр}1}} \frac{\partial G}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial G}{\partial z} + \frac{1}{v_{\text{тр}2}} \frac{\partial G}{\partial t} \right) = \frac{\Gamma_0^2 E_3^2(\tau_3)}{E_{03}^2}. \quad (3.6)$$

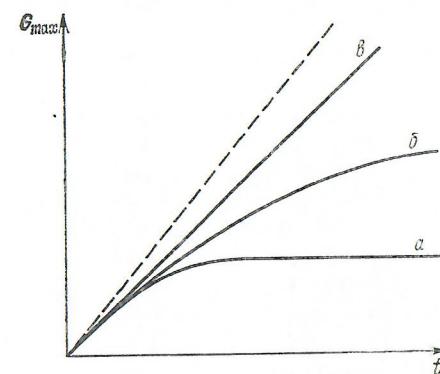


Рис. 11.6. Зависимости коэффициента параметрического усиления при конвективной (а, б) и абсолютной (в) неустойчивостях волнового пакета накачки (см. рис. 11.5). Штриховая линия — квазистационарное усиление в отсутствие дисперсии первого порядка

При групповом синхронизме по всем волнам ($v_{\text{тр}1} = v_{\text{тр}2} = v_{\text{тр}3}$) из (3.6) получаем простое выражение для коэффициента усиления:

$$G_{\text{кc}} = \Gamma_0 v_{\text{тр}1} t E_3(\tau_3) / E_{03}. \quad (3.7)$$

Этот квазистационарный режим усиления слабых волн описывает абсолютную неустойчивость волнового пакета без учета дисперсии.

В условиях относительной дисперсии первого порядка между накачкой и одной из слабых волн ($v_{\text{тр}2} < v_{\text{тр}3}$) общее решение уравнения (3.6) при $t \gg T_{v23}$ стремится к частному решению

$$G_{\text{нc}} = 2\Gamma_0 v_{23}^{-1} \left[-\frac{1}{2} \tau_2 \int_{-\infty}^{\tau_3} \frac{E_3^2(\xi)}{E_{03}^2} d\xi \right]^{1/2} \quad (3.8)$$

За промежутком времени группового запаздывания $t \gg T_{v23}$ максимум коэффициента усиления, приходящийся на хвост, равен (рис. 11.6, кривая б)

$$G_{\text{нc max}} = 2\Gamma_0 \left[t v_{\text{тр}3} v_{23}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_3^2(\xi)}{E_{03}^2} d\xi \right]^{1/2}. \quad (3.9)$$

Сравнение (3.9) с (3.7) показывает, что уход энергии одного из слабых сигналов резко замедляет темпы экспоненциального уси-

ления: $G_{\text{nc}} \sim \sqrt{t}$ вместо $G_{\text{kc}} \sim t$. Наличие диссипации приводит к прекращению роста амплитуд $A_{1,2}$, что свидетельствует о конвективной неустойчивости волнового пакета при $v_{\text{grp}1} = v_{\text{grp}3}$ и $v_{\text{grp}2} \neq v_{\text{grp}3}$.

В заключение рассмотрим абсолютную неустойчивость при $(v_{\text{grp}1} - v_{\text{grp}3})(v_{\text{grp}2} - v_{\text{grp}3}) < 0$ (рис. 11.5 ϵ). Когда скорость импульса накачки имеет промежуточное значение между групповыми скоростями двух слабых волн, например $v_{\text{grp}2} < v_{\text{grp}3} < v_{\text{grp}1}$, то снос энергии идет в противоположные стороны: энергия волны частотой ω_1 уходит через хвост импульса накачки, а энергия второй волны — через фронт. Если смотреть на этот процесс со стороны наблюдателя, перемещающегося вместе с импульсом накачки, то слабые волны идут в области усиления павстречу друг другу. В результате этого устанавливается распределенная параметрическая обратная связь между слабыми волнами, благодаря которой развивается абсолютная неустойчивость волнового пакета накачки в диспергирующей среде.

Для абсолютной неустойчивости волнового пакета характерно формирование параметрических мод слабых волн:

$$A_j = (-i)^{j-1} B_{jm}(\tau_3) \exp[i(\Gamma_m t)] \quad (j = 1, 2). \quad (3.10)$$

Моды (3.10) распространяются с той же групповой скоростью, что и импульс накачки (проявляется параметрическая дисперсия), а их амплитудные профили зависят от формы импульса огибающей и от поля накачки. Естественно, наибольший интерес представляют моды, локализованные в области накачки (при этом нет притока энергии извне): $B_{jm} \rightarrow 0$ при $|\tau_3| \rightarrow \infty$. Нахождение амплитудных профилей и инкремента параметрических мод (3.10) представляет собой задачу на собственные функции и собственные значения для уравнений, следующих из (3.1), (3.2) после подстановки в них (3.10):

$$\begin{aligned} \Gamma_m B_{1m} + \left(1 - \frac{v_{\text{grp}1}}{v_{\text{grp}3}}\right) \frac{dB_{1m}}{d\tau_3} &= \frac{\gamma\omega_1}{cn_1} v_{\text{grp}1} E_3(\tau_3) B_{2m}, \\ \Gamma_m B_{2m} + \left(1 - \frac{v_{\text{grp}2}}{v_{\text{grp}3}}\right) \frac{dB_{2m}}{d\tau_3} &= \frac{\gamma\omega_2}{cn_2} v_{\text{grp}2} E_3(\tau_3) B_{1m}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Рассмотрим в качестве примера абсолютную неустойчивость колоколообразного импульса (ср. с (2.6)):

$$E_3 = E_{03} \operatorname{sech}(\tau_3/T_3). \quad (3.12)$$

Наиболее благоприятной ситуацией для роста слабых волн является симметричный снос энергии из импульса накачки, когда $v_{\text{grp}3} = (v_{\text{grp}1} + v_{\text{grp}2})/2$. Огибающие волновых пакетов на частотах ω_1 и ω_2 , соответствующие основной параметрической моде,

имеют достаточно простой вид (см. рис. 11.5 ϵ):

$$B_{1m} = B_0 \exp \frac{\tau_3}{2T_3} \operatorname{ch}^{-g} \frac{\tau_3}{T_3}, \quad B_{2m} = B_0 \exp \left(-\frac{\tau_3}{2T_3} \right) \operatorname{ch}^{-g} \frac{\tau_3}{T_3}, \quad (3.13)$$

причем ключевую роль в формировании мод играет параметр

$$g = \Gamma_0 (v_{\text{grp}1} v_{\text{grp}2})^{1/2} \quad T_{v13} = \Gamma_0 (l_{v13} l_{v23})^{1/2}, \quad (3.14)$$

имеющий прозрачный физический смысл: он равен коэффициенту усиления на длине группового запаздывания (или на отрезке времени запаздывания); Γ_0 — инкремент параметрического усиления в теории взаимодействия плоских волн (см. (10.3.16)–(10.3.17)). Основная мода (3.13) усиливается с максимальной скоростью по сравнению с другими модами высшего порядка; ее инкремент равен (рис. 11.6, кривая σ)

$$\Gamma_m = \Gamma_0 (v_{\text{grp}1} v_{\text{grp}2})^{1/2} [1 - 1/(2g)]. \quad (3.15)$$

Из последнего выражения видно, что экспоненциальный рост амплитуд слабых волн (3.10), означающий начало развития абсолютной неустойчивости, начинается при превышении определенного порога амплитудой импульса накачки ($g > g_{\text{пор}}$, $E_{03} > E_{\text{пор}}$):

$$g_{\text{пор}} = \frac{1}{2}, \quad E_{\text{пор}} = \frac{c}{2\gamma T_3} \left(\frac{n_1 n_2 v_{13} v_{23}}{\omega_1 \omega_2} \right)^{1/2}. \quad (3.16)$$

С увеличением уровня накачки (параметра g) инкремент модового усиления приближается в рассматриваемом случае симметричных групповых расстроек к инкременту квазистационарного режима усиления $\Gamma_0 (v_{\text{grp}1} v_{\text{grp}2})^{1/2}$.

Длительность стационарных огибающих слабых волн (3.13) меньше длительности импульса накачки при больших параметрах g : $T_m \approx T_3/g$, а их вершины смешены по отношению к вершине основного импульса в разные стороны на величину $\Delta T_m \approx T_3/(2g)$.

В сильном поле волнового пакета накачки могут возбуждаться высшие параметрические моды, имеющие меньший инкремент и негладкие профили огибающих импульсов B_{jm} (число нулей растет пропорционально номеру моды). Усиление параметрических мод меньше при несимметричных групповых расстройках ($|v_{13}| \neq |v_{23}|$), чем в рассмотренном выше случае симметричного сноса энергии слабых волн.

§ 4. Связанные трехчастотные солитоны огибающих

Солитонами огибающих называются волновые пакеты, сохраняющие свои амплитудно-фазовые профили при распространении в диспергирующей среде благодаря компенсирующему действию нелинейных эффектов. В квадратично-нелинейной среде могут

сформироваться трехчастотные, параметрически связанные солитоны («трехцветные» солитоны). Связанные солитоны огибающих распространяются с некоторой общей групповой скоростью $v_{\text{grp},c}$:

$$A_j = (-i)^{j-1} B_{jc}(\tau_c), \quad \tau_c = t - z/v_{\text{grp},c}. \quad (4.1)$$

Так как между солитонами разных частот не происходит обмена энергией, то взаимодействие носит чисто реактивный характер: проявляется кооперативное самовоздействие в квадратично-нелинейной среде. В результате захвата волновых пакетов в связанные солитоны подавляется дисперсия волн. В среде с относительной дисперсией первого порядка исчезают эффекты группового запаздывания и разбегания импульсов, дисперсионные явления второго порядка не приводят больше к расплыванию огибающих солитонов.

Профили солитонов можно найти, если искать квазистационарные решения связанных укороченных уравнений (4.2)–(4.4) при $\Delta k = 0$ в виде (4.1). В итоге мы приходим к следующим уравнениям для солитонов огибающих:

$$v_{c1} \frac{dB_{1c}}{d\tau_c} = -\frac{\gamma \omega_1}{cn_1} B_{3c} B_{2c}, \quad (4.2)$$

$$v_{c2} \frac{dB_{2c}}{d\tau_c} = -\frac{\gamma \omega_2}{cn_2} B_{3c} B_{1c}, \quad (4.3)$$

$$v_{c3} \frac{dB_{3c}}{d\tau_c} = \frac{\gamma \omega_3}{cn_3} B_{1c} B_{2c}. \quad (4.4)$$

Одним из решений уравнений (4.2)–(4.4) является следующая совокупность квазистационарных профилей:

$$B_{1c} = E_{01} \operatorname{sech}(\tau_c/T_c), \quad (4.5)$$

$$B_{2c} = E_{02} \operatorname{sech}(\tau_c/T_c), \quad (4.6)$$

$$B_{3c} = E_{03} \operatorname{th}(\tau_c/T_c), \quad (4.7)$$

причем амплитуды огибающих, их длительность и групповая скорость связаны соотношениями

$$v_{jc} E_{0j}^2 = \frac{\gamma \omega_j}{cn_j} T_c E_{01} E_{02} E_{03} \quad (j = 1, 2, 3). \quad (4.8)$$

Очевидно, что скорость связанных солитонов зависит от их амплитуд. Поэтому солитоны с разными уровнями интенсивности распространяются с разными скоростями и могут сталкиваться друг с другом.

Из (4.5)–(4.7) следует, что параметрически связанными оказываются два светлых солитона на частотах ω_1 и ω_2 и один темный солитон на частоте ω_3 (рис. 11.7, соответственно кривые 1, 2, 3). Чтобы лучше понять структуру темного солитона, выпишем его

профиль интенсивности

$$B_{3c}^2 = E_{03}^2 \operatorname{th}^2(\tau_c/T_c) = E_{03}^2 - E_{03}^2 \operatorname{sech}^2(\tau_c/T_c). \quad (4.9)$$

Видно, что на частоте ω_3 на фоне волны постоянной интенсивности E_{03}^2 бежит темный солитон, имеющий такой же профиль, что и светлый, только опрокинутый относительно уровня E_{03}^2 .

Нетрудно убедиться, что возможны и другие решения уравнений (4.2)–(4.4), в которых темный солитон имеет частоту или ω_1 , или ω_2 . Таким образом, в среде с квадратичной нелинейностью и с дисперсией первого порядка образуются параметрически связанные светлые и темные солитоны, имеющие разные частоты (по оптической терминологии — «окрашенные в разные цвета»).

Как показывает точное решение уравнений для огибающих волновых пакетов (1.2)–(1.4), полученное методом обратной задачи теории рассеяния, произвольные сигналы распадаются в процессе трехчастотного взаимодействия при определенных условиях на совокупность связанных солитонов.

Солитоны огибающих светлого типа на всех трех частотах могут сформироваться в среде с относительной дисперсией первого порядка (при расстройке групповых скоростей) при учете помимо квадратичной нелинейности еще и кубической нелинейности или в квадратично-нелинейной среде при учете дисперсии второго порядка. Остановимся кратко на последнем типе трехчастотного взаимодействия, который описывается системой параболических

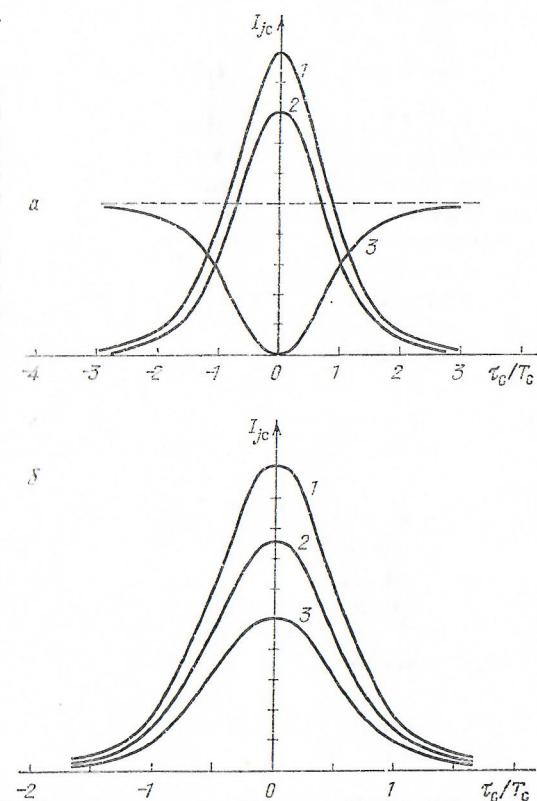


Рис. 11.7. Связанные трехчастотные солитоны огибающих в квадратично-нелинейной среде при относительной дисперсии первого порядка (а) и при дисперсии второго порядка (б)

уравнений для медленно изменяющихся амплитуд (ср. с (1.2)–(1.4)):

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} - iD_1 \frac{\partial^2 A_1}{\partial \tau^2} = -i \frac{\gamma \omega_1}{cn_1} A_3 A_2^* e^{-i\Delta k z}, \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} - iD_2 \frac{\partial^2 A_2}{\partial \tau^2} = -i \frac{\gamma \omega_2}{cn_2} A_3 A_1^* e^{-i\Delta k z}, \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial z} - iD_3 \frac{\partial^2 A_3}{\partial \tau^2} = -i \frac{\gamma \omega_3}{cn_3} A_1 A_2 e^{i\Delta k z}, \quad (4.12)$$

где $D_j = (1/2)\partial^2 k / \partial \omega^2$ — коэффициент диффузии комплексной амплитуды волнового пакета в диспергирующей среде. Для существования солитонов необходимо, чтобы все коэффициенты диффузии были одного знака — положительными или отрицательными.

Приведем простой, но характерный пример параметрически связанных световых солитонов в среде с дисперсией $D_3 = D_1 + D_2$ при согласовании фазовых и групповых скоростей ($\Delta k = 0$) $v_{\text{grp1}} = v_{\text{grp2}} = v_{\text{grp3}}$.

Огибающие таких солитонов имеют одинаковый профиль

$$A_{j\text{c}} = \frac{6c}{\gamma T_c^2} \left(\frac{n_1 n_2 n_3 \omega_j D_1 D_2 D_3}{n_j \omega_1 \omega_2 \omega_3 D_j} \right)^{1/2} \text{ch}^{-2} \frac{\tau}{T_c} \exp(-iq_{jc}z). \quad (4.13)$$

Здесь $q_{jc} = 4D_j/T_c^2$ — нелинейная добавка к волновому числу (фазовой скорости). Чем больше амплитуда солитонов (4.13), тем меньше их длительность.

При произвольном соотношении между коэффициентами диффузии D_j форма огибающих солитонов отличается от (4.13). Если же имеется расстройка групповых скоростей, то в общем случае у солитонов появляется фазовая модуляция.

§ 5. Дифракционные эффекты при возбуждении второй гармоники

Возбуждение гармоники коллимированным пучком в условиях, когда лучевые векторы основного излучения и гармоники не параллельны друг другу, протекает аналогично генерации гармоники коротким импульсом накачки при расстройке групповых скоростей (см. § 2). Такое же положение сохраняется и при переходе к последующим приближениям в теории взаимодействия волновых пакетов и пучков. Согласно пространственно-временной аналогии второму приближению теории дисперсии, описывающему расплывание и компрессию импульсов, ставится в соответствие квазиоптическая теория дифракции волновых пучков. В обоих случаях поведение медленно изменяющихся амплитуд взаимодействующих волн подчиняется уравнениям параболического типа с миними коэффициентами диффузии (см., например, (4.10)–(4.12)).

В данном параграфе мы проанализируем закономерности генерации второй гармоники волновым пучком с учетом дифракции при касательном синхронизме (лучевые векторы на основной и удвоенной частотах параллельны друг другу). В нелинейной оптике этот случай реализуется при распространении волн перпендикулярно главной оптической оси в односоставном кристалле. Как и в § 2, ограничимся приближением заданного поля накачки. Для описания дифракционных эффектов заменим в (2.1) и (2.2) стоящие в левых частях операторы первого приближения теории дисперсии $\partial/\partial z + v_{\text{grp}}^{-1} \partial/\partial t$ на дифференциальные операторы квазиоптической теории дифракции $\partial/\partial z + (i/2k_j) \Delta_\perp$. В итоге приходим к уравнениям

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{i}{2k_1} \Delta_\perp A_1 = 0, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{i}{2k_2} \Delta_\perp A_2 = -\frac{i\gamma\omega_1}{cn_2} A_1^2 e^{i\Delta k z}. \quad (5.2)$$

Рассмотрим генерацию второй гармоники гауссовым пучком, который сохраняет свой амплитудный профиль в процессе дифракции:

$$A_1 = \frac{E_{01}}{\psi(z)} \exp \left[-\frac{r^2}{a_1^2 \psi(z)} \right], \quad (5.3)$$

где комплексная функция

$$\psi(z) = 1 - i \cdot 2z/b \quad (5.4)$$

описывает изменение поперечного радиуса пучка и кривизну волнового фронта (см. (4.13), (4.14) гл. VII); величина $b = k_1 a_1^2$ — конфокальный параметр основного пучка.

Подставляя (5.3) в (5.2), можно найти следующее выражение для амплитуды гармоники:

$$A_2 = -\frac{i\gamma\omega_1}{cn_2} E_{01}^2 \exp \left[-\frac{2r^2}{a_1^2 \psi(z)} \right] \psi^{-1}(z) h(z), \quad (5.5)$$

где функция

$$h(z) = \int_{-z_n}^z \frac{\exp(i\Delta k \xi)}{\psi(\xi)} d\xi \quad (5.6)$$

описывает изменение амплитуды гармоники из-за притока энергии от основного пучка (5.3): z_n — положение перетяжки в среде.

Замечательной особенностью данного процесса является то, что волновой пучок гармоники (5.5) имеет, как и основной пучок, гауссов профиль интенсивности. Этому можно дать следующее объяснение. Ширина пучка гармоники в $\sqrt{2}$ раз меньше, а вол-

новое число в два раза больше, чем у основного пучка: $a_2 = a_1/\sqrt{2}$, $k_2 = 2k_1$. Поэтому их конфокальные параметры в точности равны друг другу ($b_2 = k_2 a_2^2 = k_1 a_1^2 = b_1$), а, значит, темпы дифракции обоих пучков одинаковы. Именно это обстоятельство и обеспечивает гауссову форму профиля пучка гармоники.

Угловая расходимость гармоники в $\sqrt{2}$ раз меньше по сравнению с основным пучком, так как $\alpha_2 = (2/k_2 a_2) = \sqrt{2}/(k_1 a_1) = \alpha_1/\sqrt{2}$. Таким образом, пучок гармоники как бы вложен внутрь пучка основного излучения (рис. 11.8).

В подынтегральное выражение функции $h(z)$ (см. (5.6)) входят экспонента, содержащая расстройку волновых векторов в плоскостном приближении Δk , и комплексная функция $\psi(z)$, характеризующая дифракцию гауссова пучка (см. (5.3)–(5.4)). Модуль $|\psi|$ описывает, в частности, падение интенсивности основного пучка при отходе от перетяжки вдоль оси: $|A_2(0, z)|^2 = E_{01}^2 / |\psi|^2$. Поэтому область эффективной генерации второй гармоники ограничена протяженностю порядка конфокального параметра пучка b .

Далее, фаза функции ψ^{-1} , равная

$$(5.7)$$

$$\varphi_{1d} = \arctg(z/2b).$$

представляет собой дополнительный набег фазы гауссова пучка при его дифракции. Такой же дифракционный набег фазы имеет свободная волна гармоники ($\varphi_{2d} = \Phi_{1d}$), так как конфокальные параметры b_1 и b_2 одинаковы. В результате появляется дифракционная расстройка фазовых соотношений между второй гармоникой и вынуждающей силой, роль которой играет, как видно из (5.2), квадрат амплитуды основной волны A_1^2 :

$$(5.8)$$

$$\Delta\varphi_d = 2\varphi_{1d} - \varphi_{2d} = \Phi_{1d}.$$

Дифракционная расстройка (5.8) приводит к некогерентности взаимодействия частоты и как результат этого к снижению эффективности возбуждения гармоники. Именно такая фазовая расстройка (5.8) входит в подынтегральное выражение функции h (см. (5.6)) через фазу, равную Φ_{1d} .

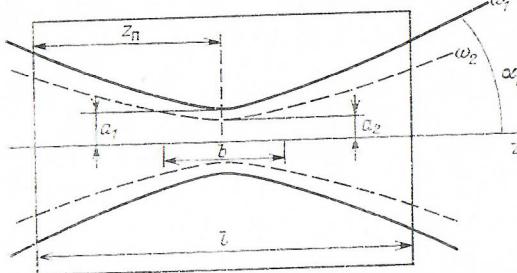


Рис. 11.8. Схема возбуждения второй гармоники при фокусировке гауссова пучка основного излучения вдоль квадратично-нелинейной среды (z_n — положение перетяжки пучка)

Рассмотрим характер изменения амплитуды второй гармоники на оси ($r = 0$), (перетяжка основного пучка расположена на передней грани нелинейной среды ($z_n = 0$)). На расстояниях, меньших конфокального параметра (дифракционной длины пучка),

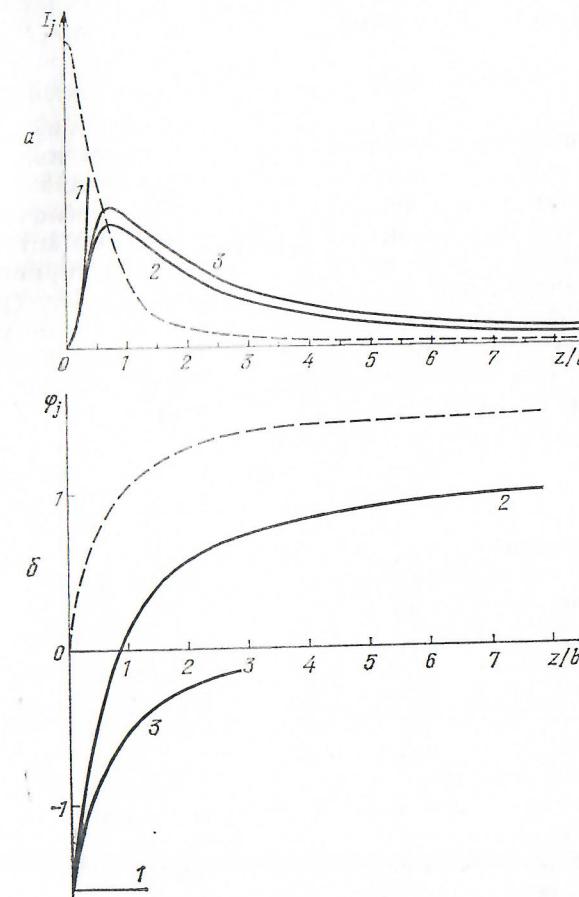


Рис. 11.9. Зависимость от расстояния z амплитуды второй гармоники на оси гауссова пучка ($r = 0$) в приближении геометрической оптики (кривая 1), при учете дифракции в условиях синхронизма плоских волн $\Delta k = 0$ (кривая 2) и при компенсации дифракционной расстройки $\Delta k \approx -(1/2)b$ (кривая 3). Штриховая кривая — свободная дифракция гауссова пучка

формулы (5.5)–(5.6) переходят в выражение типа (10.2.11), полученное для плоских волн. При этом оптимальная волновая расстройка практически равна нулю ($\Delta k = 0$) и интенсивность гармоники растет пропорционально квадрату расстояния: $I_1 \sim |A_2|^2 \sim E_{01}^2 z^2$ (рис. 11.9а кривая 1). На расстояниях, превы-

шающих дифракционную длину $l_d = b/2$, начинают сказываться изменение ширины пучка, падение его интенсивности и дифракционный сбой фаз. Если в среде выполняется синхронизм для плоских волн, то из (5.6) нетрудно найти

$$h(z) = 2b \operatorname{arctg} \frac{z}{2b} + ib \ln \left[1 + \left(\frac{z}{2b} \right)^2 \right]. \quad (5.9)$$

В области $z \gg b$ интенсивность гармоники меняется по закону $I_2 \sim [E_{01}^2 b^2 \ln(z/2b)/z]^2$ (рис. 11.9а, кривая 2). Дифракционная расходимость основного пучка приводит к замене квадратичного роста интенсивности гармоники на логарифмический рост; одновременно с этим ее интенсивность падает из-за увеличения поперечного сечения пучка второй гармоники. В итоге интенсивность гармоники падает, хотя полная энергия волн гармоники продолжает увеличиваться по логарифмическому закону (рис. 11.9а кривая 3). Эффективность генерации гармоники можно улучшить, если частично устраниТЬ дифракционную некогерентность. Для этого надо ввести волновую расстройку $\Delta k \approx -1/(2b)$ (в области $0 < z < b$ $\Phi_{1d} = \operatorname{arctg}(z/2b) \approx z/2b$), при этом из (5.5), (5.6) находим

$$h(z) = 2b \ln \left[\frac{z}{2b} + \left(1 + \frac{z^2}{4b^2} \right)^{1/2} \right]. \quad (5.10)$$

График интенсивности $I_2 = |A_2|^2$, построенный с учетом (5.5), (5.10), лежит выше кривой, рассчитанной по (5.9) при $\Delta k = 0$, что говорит об улучшении когерентности процесса удвоения частоты.

Определенный интерес представляет дифракционный набег фаз гармоник (рис. 11.9б). Основной пучок меняет свою фазу на оси за счет дифракции по закону (5.7) (штриховая кривая). Вторая гармоника в процессе взаимодействия подтягивает свою фазу к фазе пучка накачки (кривая 2) при синхронизме плоских волн $\Delta k = 0$, а при оптимальной расстройке волновых векторов на достаточно больших расстояниях $\Phi_2 = \Phi_1 - \pi/2$.

С помощью (5.5), (5.6) можно решить важную задачу об оптимизации генерации второй гармоники в слое квадратично-нелинейной среды конечной толщины l . Суть оптимизации заключается в том, что существует оптимальная фокусировка пучка накачки, при которой мощность гармоники достигает максимальной величины. При слабой фокусировке пучка накачки ($l \ll b$) его ширина почти не меняется по длине среды, и в процессе преобразования энергии используется вся толщина нелинейной среды l . Однако при этом концентрация поля относительно слабая и возбуждение гармоники недостаточно эффективно. В другом крайнем случае сильной фокусировки ($l \ll b$) концентрация поля велика, но, по существу, используется только часть нелинейной среды, имеющая продольный

ЗАДАЧИ

размер конфокального параметра b . Оптимальным для генерации гармоники является промежуточный случай, когда конфокальный параметр примерно равен длине нелинейной среды. Эти соображения подтверждаются точными расчетами.

При выполнении условия фазового синхронизма для плоских волн $\Delta k = 0$ мощность второй гармоники, как следует из (5.5), (5.6), равна

$$P_2 = K_2 P_1^2 (l/\lambda_1) \xi^{-1} \operatorname{arctg}^2 \xi, \quad \xi = l/b. \quad (5.11)$$

При условии $\xi = \xi_{\text{опт}} = 1,4$ ($l = 2,8b$) достигается максимум мощности гармоники $P_2 = 0,64 K_2 P_1^2 l/\lambda_1$, где K_2 — некоторая константа, пропорциональная коэффициенту нелинейности среды. Введение оптимальной расстройки $\Delta k_{\text{опт}} = -3,2l$ и небольшое изменение оптимальной фокусировки $\xi_{\text{опт}} = 2,84$ позволяют увеличить мощность гармоники примерно на 40% (за счет компенсации дифракционной расстройки (5.8)).

Принцип оптимальной фокусировки широко используется, например, в нелинейной оптике для эффективного преобразования частоты лазерного излучения, в первую очередь маломощного.

ЗАДАЧИ

1. Определить длину группового запаздывания двух импульсов длительностью $T = 1$ пс, распространяющихся со скоростями $v_{\text{тр1}} = 2 \cdot 10^{10}$ см/с и $v_{\text{тр2}} = 1,99 \cdot 10^{10}$ см/с.

Ответ. Длина группового запаздывания равна $l_{v_{12}} = T / |v_{12}| = 2$ см. 2. В уравнения распадной неустойчивости волнового пакета (3.1), (3.2) в общем случае должны входить члены, учитывающие расстройку фазовых скоростей Δk и коэффициенты поглощения δ . Предложить замену переменных (амплитуд), с помощью которой можно исключить Δk и δ из укороченных уравнений, приведя их к виду (3.1), (3.2).

Решение. Обобщенные укороченные уравнения распадной неустойчивости с учетом расстройки и поглощения волн имеют вид (ср. с (3.1), (3.2))

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{1}{v_{\text{тр1}}} \frac{\partial A_1}{\partial t} = -i \frac{\gamma \omega_1}{cn_1} E_3(\tau_3) A_2^* e^{-i\Delta kz} - \delta_1 A_1, \quad (1)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{1}{v_{\text{тр2}}} \frac{\partial A_2}{\partial t} = -i \frac{\gamma \omega_1}{cn_2} E_3(\tau_3) A_1^* e^{-i\Delta kz} - \delta_2 A_2. \quad (2)$$

Перейдем от прежних амплитуд A_j к новым $A_{j\text{п}}$ с помощью замены $A_j = A_{j\text{п}} \exp[\beta_1(\tau_1 + \tau_2) - \beta_2 z]$.

Подставляя (3) в (1), (2) и требуя, чтобы в уравнениях не было членов с Δk и δ_j , находим

$$\beta_1 = (\delta_1 - \delta_2 - i\Delta k)/2v_{21}, \quad \beta_2 = (\delta_1 + \delta_2 + i\Delta k)/2. \quad (4)$$

Для новых амплитуд в итоге этой процедуры получаем уравнения (3.1), (3.2). 3. Определить общее выражение для порога абсолютной неустойчивости волнового пакета с произвольной амплитудной модуляцией, полагая для простоты $\Delta k = 0$ и $\delta_j = 0$.