

чале, $A_{01}(0) = A_{02}(0) = 0$, $C = -A_{03}^2(0)$, то процесс распада волны без начального возмущения не идет.

Взрывная неустойчивость может наблюдаться в пограничном слое гидродинамических течений, а также в неравновесной плазме.

§ 5. Самовоздействие волн. Нелинейная дисперсия и нелинейное поглощение

На нечетных нелинейностях (третьего, пятого и высшего порядков) происходит самовоздействие волн. Если в материальном уравнении просуммировать все нелинейные члены, ответственные за самовоздействие, например, электромагнитных волн, можно ввести нелинейную диэлектрическую проницаемость (см. (1.24))

$$\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_{\text{нл}}(|E|^2), \quad (5.1)$$

где ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость линейной среды при $|E| \rightarrow 0$, $\epsilon_{\text{нл}}$ — нелинейная добавка, зависящая от интенсивности поля и являющаяся, вообще говоря, комплексной величиной: $\epsilon_{\text{нл}} = \epsilon'_{\text{нл}} - i\epsilon''_{\text{нл}}$.

На нечетных нелинейностях будут возбуждаться нечетные гармоники, однако при отсутствии фазового синхронизма они, как мы видели на примере генерации второй гармоники в § 2, будут слабыми, и ими можно пренебречь.

Если среда слабо нелинейная ($|\epsilon_{\text{нл}}| \ll |\epsilon_0|$) и слабо поглощающая ($|\epsilon''| \ll |\epsilon'|$), то для описания самовоздействия плоских монохроматических волн можно воспользоваться методом медленно изменяющихся амплитуд, который приводит к укороченному уравнению

$$\frac{dA}{dz} = -\frac{ik(\epsilon_{\text{нл}} + \epsilon'')}{2\epsilon_0} A, \quad k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0}. \quad (5.2)$$

Перейдем от комплексной амплитуды к действительной амплитуде и фазе

$$A = A_0 \exp(-ik\psi). \quad (5.3)$$

Здесь ψ — добавка к эйконалу плоской волны из-за нелинейности среды. Подставляя (5.3) в (5.2) и разделяя мнимую и действительную части, имеем

$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{\epsilon'_{\text{нл}}(A_0^2)}{2\epsilon_0}, \quad (5.4)$$

$$\frac{dA_0}{dz} = -\alpha A_0, \quad \alpha = \alpha_{\text{л}} + \alpha_{\text{нл}}, \quad (5.5)$$

где α — коэффициент линейного и нелинейного поглощения,

$$\alpha_{\text{л}} = k\epsilon''_0/2\epsilon_0, \quad \alpha_{\text{нл}} = k\epsilon''_{\text{нл}}(A_0^2)/2\epsilon_0. \quad (5.6)$$

Рассмотрим эффекты, связанные с действительной и мнимой частями нелинейной диэлектрической проницаемости.

Нелинейная дисперсия. Пусть затухание волны мало, так что можно положить $\alpha \approx 0$. Тогда из (5.5) следует, что $A_0 = E_0 = \text{const}$, а из (5.4) находим

$$\Psi = \epsilon'_{\text{нл}}(E_0^2)z/2\epsilon'_0, \quad (5.7)$$

и полное волновое поле можно записать в виде

$$E = \frac{1}{2}E_0 \exp[i(\omega t - k_{\text{нл}}z)] + \text{к.ч.}, \quad (5.8)$$

где $k_{\text{нл}} = k(1 + \epsilon'_{\text{нл}}/2\epsilon'_0)$.

Из (5.8) видно, что вследствие нелинейности действительной части диэлектрической проницаемости $\epsilon'_{\text{нл}}(E_0^2)$ изменились волновое число, а следовательно, и фазовая скорость

$$v_{\text{нл}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0(1 + \epsilon'_{\text{нл}}/2\epsilon'_0)}} \approx c \left(1 - \frac{\epsilon'_{\text{нл}}}{2\epsilon'_0}\right), \quad (5.9)$$

причем в среде с $\epsilon'_{\text{нл}} > 0$ волна замедляется, а в среде с $\epsilon'_{\text{нл}} < 0$ убывает по сравнению со случаем линейной среды. Так как нелинейная часть диэлектрической проницаемости может зависеть от частоты по-другому, чем ее линейная часть, то при изменении амплитуды волны меняются дисперсионные свойства нелинейной среды.

Нелинейное поглощение. Рассмотрим противоположный случай, когда поглощение в среде велико. Тогда в первую очередь необходимо проанализировать характер затухания амплитуды на основе решения уравнения (5.5) с учетом (5.6). В линейной среде ($\epsilon'_{\text{нл}} = 0$) волна затухает экспоненциально:

$$A_0 = E_0 \exp(-\alpha_{\text{л}}z). \quad (5.10)$$

Предположим теперь, что линейное поглощение мало ($\alpha_{\text{л}} \approx 0$), а при описании нелинейного поглощения учтем только первый член разложения $\epsilon''_{\text{нл}}$ по полю, т. е. положим $\epsilon''_{\text{нл}} = \epsilon''_2 A_0^2$ и

$$\alpha_{\text{нл}} = k\epsilon''_2 A_0^2/(2\epsilon_0). \quad (5.11)$$

Решая уравнение (5.5) при $\alpha_{\text{л}} \approx 0$ и $\alpha_{\text{нл}}$ из (5.11), находим

$$A_0^2 = \frac{E_0^2}{1 + \epsilon''_2 E_0^2 kz/\epsilon'_0}. \quad (5.12)$$

Отсюда видно, что в среде с нелинейным поглощением волна с большей амплитудой затухает быстрее. Интересно отметить, что на расстояниях $z > \epsilon'_0/(\epsilon''_2 E_0^2 k)$, т. е. в зоне поглощения, амплитуда не зависит от поля на границе: $A_0^2 \approx \epsilon'_0/(\epsilon''_2 kz)$. Таким образом, достаточно толстая нелинейно-поглощающая пластина может быть

использована как ограничитель интенсивности волн, проходящих через пластину.

Нелинейное просветление среды. При определенных условиях поглощение некоторых сред может уменьшаться под действием распространяющейся волны. Например, в туманах и облаках капли воды могут испаряться вследствие их нагревания при поглощении энергии электромагнитной волны, а уменьшение размеров капель ведет к ослаблению поглощения. В результате этого происходит просветление облачной среды. Эффект индуцированного просветления может наблюдаться также при прохождении оптического излучения через газы, полупроводники и т. д. В этих и других подобных случаях в качестве простейшей модели можно взять следующий дифференциальный закон уменьшения поглощения среды под действием поля волны:

$$\frac{d\alpha}{dt} + \gamma\alpha A_0^2 = 0. \quad (5.13)$$

Здесь γ — параметр нелинейного взаимодействия волны со средой. Согласно (5.13) коэффициент поглощения α уменьшается экспоненциально:

$$\alpha = \alpha_0 \exp[-\gamma W(t)], \quad (5.14)$$

где $W(t) = \int_0^t A_0^2(t_1, z) dt_1$ — объемная плотность энергии, прошедшей через данную точку к моменту времени t . Так как волна первоначально входит в сильно поглощающую среду, то плотность энергии различна в разных местах и просветление идет сначала более эффективно вблизи границы поглощающей среды. Затем область просветления будет продвигаться в глубь среды. Чтобы проанализировать процесс просветления среды, необходимо решить совместно уравнения (5.5) и (5.13) при естественных граничных и начальных условиях:

$$A_0(0, t) = E_0(t), \alpha(z, 0) = \alpha_0. \quad (5.15)$$

Оказывается, что данная задача имеет точное решение:

$$A_0^2 = \frac{E_0^2(t)}{1 + [\exp(2\alpha_0 z) - 1] \exp(-\gamma W_0)}, \quad (5.16)$$

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + [\exp(\gamma W_0) - 1] \exp(-2\alpha_0 z)}, \quad W_0 = \int_0^t E_0^2(t_1) dt_1.$$

Естественно, наиболее интересной является область $\alpha_0 z \gg 1$, где волна первоначально сильно затухает. Если начальная энергия волны достаточно велика, так что $\gamma W_0 \gg \alpha_0 z \gg 1$, то происходит просветление среды: $\alpha \ll \alpha_0$ и волна практически не испытывает

затухания $A_0 \approx E_0$ в области $z > \alpha_0^{-1}$ (рис. 10.5). Уравнение

$$2\alpha_0 z_{\text{пр}} = \gamma W_0(t) \quad (5.17)$$

определяет, по существу, протяженность зоны просветления $z_{\text{пр}}$ в каждый момент времени. Дифференцируя это соотношение по времени, можно найти скорость перемещения фронта просветления $u_{\text{пр}} = dz_{\text{пр}}/dt$:

$$u_{\text{пр}} = \gamma E_0^2(t)/2\alpha_0. \quad (5.18)$$

Чем выше входная интенсивность волны E_0^2 и параметр нелинейности среды γ и чем меньше начальное поглощение α_0 , тем быстрее просветляется среда.

Если на среду падает прямоугольный импульс ($E_0 = \text{const}$), то скорость движения фронта просветления постоянна и в зоне $\alpha_0 z \gg 1$ формируется стационарная волна просветления:

$$A_0^2 = \frac{E_0^2}{1 + \exp[2\alpha_0(z - u_{\text{пр}}t)]}, \quad (5.19)$$

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + \exp[-2\alpha_0(z - u_{\text{пр}}t)]}. \quad (5.20)$$

Интересно отметить, что эти выражения являются точными решениями уравнений (5.5) и (5.13). При конечной длительности импульса излучения $0 \leq t \leq T$ и протяженность области просветления также конечна:

$$z_{\text{пр}} \approx u_{\text{пр}} T \approx \gamma W_0 / 2\alpha_0.$$

Зная закон затухания амплитуды, можно найти изменение фазы путем решения уравнения для эйконала (5.4).

ЗАДАЧИ

1. В одноосном отрицательном кристалле KDP, обладающем квадратичной нелинейностью, световая волна ($\lambda_1 = 1,06 \text{ мкм}$) обыкновенной поляризации возбуждает необыкновенную волну второй гармоники ($\lambda_2 = 0,53 \text{ мкм}$). Компоненты тензора показателя преломления на частоте ω_1 равны $n_{\perp} = 1,496$ и $n_{\parallel} = 1,461$, а на частоте ω_2 $n_{\perp} = 1,515$ и $n_{\parallel} = 1,472$. Найти направление фазового синхронизма.

Решение. В одноосном кристалле (см. рис. 10.2) показатель преломления обыкновенной волны не зависит от направления распространения (см. (3.3.4)):

$$n_1^0 = n_{\perp}. \quad (1)$$

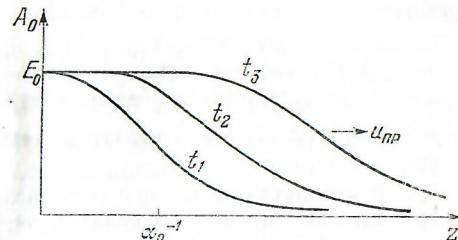


Рис. 10.5. Зависимость амплитуды волны от расстояния при просветлении среды в различные моменты времени $t_1 < t_2 < t_3$