

Лекция 22

Нелинейная оптика

Основные эффекты нелинейной оптики. Механизмы оптической нелинейности. Нарушение принципа суперпозиции для сильных световых волн в среде. Математическое уравнение нелинейной среды. Нелинейная поляризация. Нелинейная восприимчивость. Классическая модель нелинейной среды — ансамбль нелинейных осцилляторов. Оптическое детектирование.

Лекция посвящена физике взаимодействия мощного лазерного излучения с веществом. Рассматриваются основные эффекты нелинейной оптики, излагаются основы теории, обсуждаются применения нелинейно-оптических явлений.

Основные эффекты нелинейной оптики. Механизмы оптической нелинейности. Нелинейная оптика изучает процессы взаимодействия света и вещества, характер протекания которых зависит от интенсивности света. Это такие явления, как генерация оптических гармоник, "выпрямление" света, вынужденное рассеяние света, самофокусировка световых пучков и самомодуляция импульсов, двухфотонное или многофотонное поглощение света, оптический пробой среды и т. п. Рассмотрим некоторые из этих явлений.

Генерация второй оптической гармоники. Это явление состоит в удвоении частоты света при распространении мощного лазерного пучка в кристалле. Механизм процесса связан с нелинейностью элементарного атомного осциллятора.

Удвоение частоты света в кристалле было первым нелинейно-оптическим эффектом, обнаруженным вскоре после создания лазера. Схема опыта Франкена, в котором наблюдался этот эффект, показана на рис. 22.1. Излучение рубинового лазера, имеющее длину волны $\lambda_1 = 6943 \text{ \AA}$, фокусировалось в кристалле кварца. Излучение, выходящее из кристалла, разворачивалось в спектр с помощью дисперсионной призмы и фокусировалось на фотопластинку. Опыт показал, что помимо света на частоте лазера из кристалла выходит свет на удвоенной частоте ("вторая гармоника"), имеющий длину волны $\lambda_2 = \lambda_1/2 = 3471,5 \text{ \AA}$. Несмотря на то, что излучение второй гармоники в опыте Франкена было чрезвычайно слабым, этот опыт сыграл принципиальную роль, положив начало развитию нелинейной оптики.

Последующие опыты показали, что при использовании других кристаллов эффективность генерации второй гармоники может быть резко повышена. К настоящему времени разработаны методы, позволяющие преобразовывать в гармонику значительную долю лазерного излучения; в некоторых случаях удается получить КПД генерации близкий к 100%.

На лекции демонстрируется генерация второй гармоники излучения неодимового лазера в кристалле ниобата лития или KDP. Схема опыта подобна показанной на рис. 22.1. Лазерное излучение имеет длину волны 1,06 мкм, вторая гармоника — 0,53 мкм. На белом экране в затемненной аудитории наблюдаются яркие вспышки зеленого цвета (вторая гармоника). Эффективность генерации гармоники в этом опыте превышает 10%. Опыт показывает, что мощность гармоники максимальна при некотором определенном положении кристалла. Поворот кристалла относительно этого положения резко уменьшает эффективность генерации. Следует отметить также, что гармоника генерируется лишь

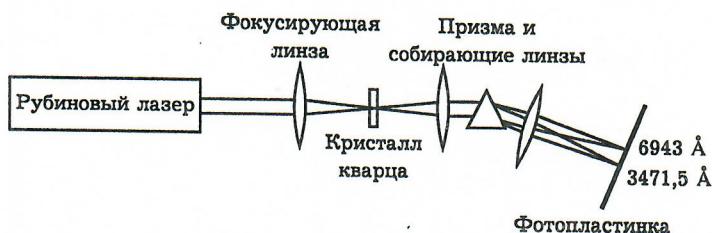


Рис. 22.1. Схема опыта Франкена по генерации второй оптической гармоники

при достаточно высокой интенсивности лазерного излучения, достигаемой за счет фокусировки лазерного пучка в кристалле.

Генерация второй оптической гармоники была впервые продемонстрирована в 1961 г. В настоящее время этот эффект широко применяется для преобразования частоты лазерного излучения.

Вынужденное комбинационное рассеяние света. Этот эффект состоит в том, что в поле мощного лазерного пучка среда генерирует интенсивное излучение, сдвинутое по частоте относительно лазера на величину, равную частоте молекулярных колебаний. Механизм процесса тот же, что при спонтанном рассеянии — модуляции света молекулярными колебаниями. Однако в отличие от спонтанного рассеяния, которое является очень слабым и направлено во все стороны, вынужденное рассеяние напоминает лазерную генерацию. Мощность и направленность вынужденного рассеяния соизмеримы с аналогичными параметрами лазерного пучка. Причина этого состоит в том, что вынужденное рассеяние происходит не на хаотических тепловых молекулярных колебаниях, а на колебаниях, возбужденных и синхронизированных светом в большом объеме среды. Переход спонтанного рассеяния в вынужденное происходит при превышении интенсивностью возбуждающего света некоторой определенной величины, называемой *порогом ВКР*.

Впервые вынужденное комбинационное рассеяние наблюдали Вудбери и Нг (1962) при изучении режима модуляции добротности рубинового лазера с помощью керровской ячейки с нитробензолом. Они обнаружили появление в излучении лазера инфракрасной компоненты, частота которой была на 1345 см^{-1} меньше частоты основного излучения лазера. Поскольку частотный сдвиг совпадал с одной из собственных частот колебаний молекулы нитробензола, было высказано предположение, что появление инфракрасной компоненты связано с комбинационным рассеянием света в нитробензоле, а большая интенсивность излучения обусловлена вынужденным характером процесса, при котором молекулярные колебания сильно раскачиваются светом. Это предположение было подтверждено в последующих опытах с различными жидкостями, а также с газами и твердыми телами.

На лекции демонстрируется вынужденное комбинационное рассеяние света в жидком азоте. Схема опыта показана на рис. 22.2. Излучение второй гармоники неодимового лазера с длиной волны 0,53 мкм фокусируется в кювету с жидким азотом. Излучение, выходящее из кюветы, через призму направляется на экран. Во время лазерного импульса на экране появляются пятна зеленого и оранжевого цвета. Зеленое пятно соответствует второй гармонике лазера, а оранжевое пятно — излучению вынужденного комбинационного рассеяния с



Рис. 22.2. Демонстрация вынужденного комбинационного рассеяния света в жидком азоте

длиной волны 0,61 мкм. Частотный сдвиг между этими волнами равен частоте молекулярных колебаний в жидким азоте и составляет 2326 см^{-1} . Опыт показывает, что вынужденное комбинационное рассеяние наблюдается лишь при достаточно высокой интенсивности света, достигаемой с помощью фокусировки пучка в кювету. В отличие от процесса спонтанного комбинационного рассеяния, характеризуемого очень малой интенсивностью, вынужденное рассеяние имеет высокую интенсивность, соизмеримую с интенсивностью лазерного луча. Это обстоятельство позволяет создавать эффективные преобразователи лазерного излучения на основе процесса ВКР. В настоящее время такие преобразователи используются как для преобразования частоты излучения, так и для улучшения пространственной когерентности света, а также для компрессии (сокращения длительности и увеличения мощности) лазерных импульсов. Кроме того, на основе процесса ВКР можно осуществлять когерентное суммирование излучений нескольких лазерных модулей.

Возбуждение когерентных молекулярных колебаний с помощью пары световых волн (*метод бигармонической накачки*) используется в спектроскопии когерентного антистоксова рассеяния света (КАРС).

Самофокусировка света. Эффект состоит в том, что в поле мощного лазерного пучка среда приобретает фокусирующие (линзовые) свойства. В результате световой пучок "склоняется", превращаясь в тонкую светящуюся нить, или распадается на несколько таких нитей.

Механизм самофокусировки связан с изменением показателя преломления среды под действием мощной световой волны. Причины этого могут быть разными. Например, электрострикция в световом поле приводит к появлению давления, изменяющего плотность среды в области, занятой световым пучком, а следовательно, и показатель преломления среды. В жидкости сильное световое поле приводит к ориентации анизотропно поляризующихся молекул за счет взаимодействия света с наведенным дипольным моментом, при этом среда становится анизотропной, а средний показатель преломления для ориентирующего поля возрастает. Этот эффект принято называть высокочастотным эффектом Керра; изменение показателя преломления здесь, как и в хорошо известном статическом эффекте Керра, происходит за счет "выстраивания" молекул по полю. Зависящая от интенсивности световой волны добавка к показателю преломления может быть связана также с нелинейностью электронной поляризации. Наконец, изменение плотности, а следовательно и показателя преломления, может быть связано с нагревом среды, вызванным диссипацией энергии мощной световой волны.

Самофокусировка света была теоретически предсказана Аскарьяном в 1962 г., а экспериментально впервые наблюдалась Пилипецким и Рустамовым в 1965 г. В их опытах были фотографически зарегистрированы узкие светящиеся нити в органических жидкостях, облучаемых сфокусированным пучком рубинового лазера.



Рис. 22.3. Самофокусировка света в толуоле [4]

На рис. 22.3 показана фотография одномодового лазерного пучка на выходном окне кюветы с толуолом при различных длинах кюветы. Рис. 22.3, а соответствует короткой кювете, в которой пучок не успел сфокусироваться (диаметр пучка 700 мкм). На рис. 22.3, б длина кюветы близка к длине самофокусировки, диаметр пучка составляет примерно одну десятую от первоначального значения (50 мкм). На рис. 22.3, в длина кюветы достаточна для наступления самофокусировки, пучок имеет вид нити с предельным значением диаметра 10 мкм. На рис. 22.4 показана фотография испытавшего самофокусировку многомодового лазерного пучка на выходном окне кюветы с сероуглеродом.

На лекции демонстрируется тепловое самовоздействие излучения аргонового лазера в слабопоглощающей жидкости. Схема опыта показана на рис. 22.5. Лазерный луч проходит через кювету, заполненную спиртом, и направляется на экран. Для увеличения эффекта в спирт добавляют поглощающий лазерный свет краситель, например фуксин. В режиме малой мощности лазера на экране наблюдается пятно, размер которого определяется обычной дифракционной расходимостью лазерного пучка. При переключении лазера на полную мощность расходимость пучка и размер пятна на экране резко возрастают, что обусловлено действием тепловой (в данном случае дефокусирующей) линзы, наведенной в жидкости лазерным пучком. Самодефокусировка света вызвана тем, что поглощающая свет жидкость сильнее нагревается вблизи оси лазерного пучка, где интенсивность света максимальна. Нагревание приводит к

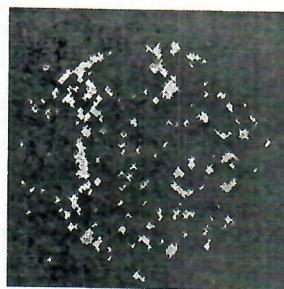


Рис. 22.4. Самофокусировка многомодового лазерного пучка в сероуглероде

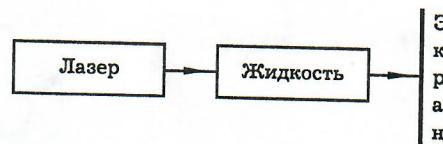


Рис. 22.5. Демонстрация тепловой самодефокусировки света в жидкости

тепловому расширению жидкости, уменьшению ее плотности и показателя преломления n , в конечном счете, формирует тепловую дефокусирующую линзу, увеличивающую угловую расходимость лазерного пучка. Механизм эффекта поясняет рис. 22.6.

Те же самые механизмы обусловливают и другой эффект нелинейного самоиздействия света — самомодуляцию светового импульса. При самомодуляции импульса, которая может происходить, например, в оптическом волокне, резко расширяется частотный спектр импульса, что дает возможность путем последующей компрессии получать предельно короткие световые импульсы. Данный эффект используется в системах генерации фемтосекундных лазерных импульсов.

Нелинейный материал, помещенный в оптический резонатор, демонстрирует свойства бистабильного элемента и может быть использован как элемент оптического компьютера (см. рис. 8.7). Нелинейный элемент в системе с двумерной обратной связью позволяет генерировать структуры светового поля типа спиральных волн, вращающихся волн, а также наблюдать "оптическую турбулентность". Адаптивные нелинейно-оптические системы используют в настоящее время для моделирования динамики нейронных сетей (рис. 22.7, 22.8, см. также дополнение 17). Краткая сводка основных эффектов нелинейной опти-

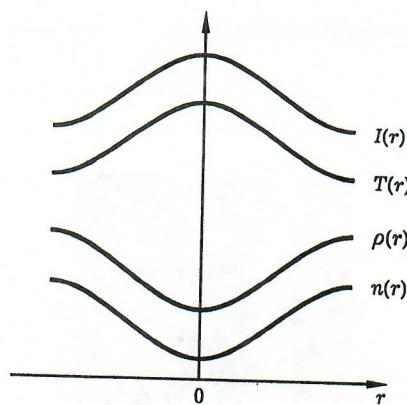


Рис. 22.6. Механизм тепловой самодефокусировки света в слабопоглощающей свет жидкости: r — координата в поперечном сечении светового пучка, I — интенсивность света, T — температура среды, ρ — плотность среды, n — показатель преломления среды

Таблица 22.1

Основные эффекты нелинейной оптики и их применение

| Эффект | Материал | Механизм | Применение |
|---|--|---|---|
| Генерация оптических гармоник. Параметрическая генерация света. | Кристаллы, полупроводники, инертные газы, пары металлов. | Нелинейность атомного осциллятора. | Преобразование частоты лазерного излучения. Плавная перестройка частоты лазера. Генерация когерентного излучения в ИК, УФ и рентгеновском диапазонах. Визуализация ИК изображения. Диагностика поверхности полупроводников. |
| Вынужденное рассеяние света. | Газы, жидкости, кристаллы, пары металлов, оптическое волокно. | Нелинейность атомного или молекулярного осциллятора. Рассеяние света на электронных, молекулярных, звуковых или других колебаниях. Возбуждение колебаний среды световыми волнами. | Преобразование частоты лазерного излучения. Компрессия лазерных импульсов. Обращение волнового фронта излучения. Коррекция волнового фронта. Улучшение пространственной когерентности лазеров. Когерентное суммирование излучения нескольких лазерных модулей. Нелинейная спектроскопия, в частности, спектроскопия когерентного антистоксова рассеяния света (КАРС). |
| Самовоздействие света. | Жидкости, газы, кристаллы, жидкие кристаллы, оптическое волокно. | Нелинейность атомного осциллятора. Ориентация анизотропных молекул световой волной. Электрострикция. Нагрев среды. | Самомодуляция световых импульсов. Генерация фемтосекундных лазерных импульсов. Бистабильные оптические элементы. Элементы оптического компьютера. Моделирование нейронных сетей. |

ки и их применений дана в табл. 22.1. Отметим, что нелинейная оптика, прошедшая уже почти 40-летний путь развития, продолжает прогрессировать, а область ее приложений непрерывно растет.

Нарушение принципа суперпозиции для сильных световых волн в среде. При всем многообразии нелинейно-оптических явлений можно выделить некоторые общие черты, присущие каждому из них. Во-первых, это сильная зависимость от интенсивности света. Как правило, нелинейно-оптический эффект становится заметным лишь при достаточно большой интенсивности света. Не случайно поэтому, что нелинейная оптика появилась лишь после создания лазера. Нелинейная оптика — это оптика сильных световых полей, оптика мощных лазерных пучков. Во-вторых, для нелинейных эффектов характерно нарушение принципа суперпозиции. Принцип суперпозиции состоит в том,

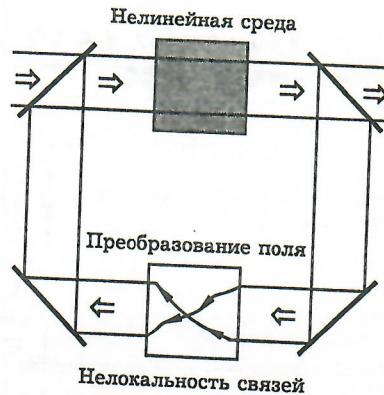


Рис. 22.7. Нелинейный резонатор с двумерной обратной связью

что различные световые волны, отличающиеся частотой, направлением распространения, поляризацией, распространяются и взаимодействуют со средой независимо друг от друга. В нелинейной оптике это не так. Как мы видели, в нелинейно-оптических процессах возникают новые спектральные компоненты поля, различные световые волны сильно взаимодействуют между собой, происходит энергообмен между ними вплоть до полного преобразования одной волны в другую. Типичный пример такого рода — генерация второй оптической гармоники. Итак, в нелинейно-оптических процессах мы сталкиваемся с нарушением принципа суперпозиции. Можно сделать и обратное утверждение: нарушение принципа суперпозиции так или иначе связано с нелинейным эффектом.

Материальное уравнение нелинейной среды. Теория нелинейно-оптических явлений строится на основе материальных уравнений и уравнений Максвелла. Уравнения Максвелла для диэлектрической нейтральной немагнитной среды имеют вид

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{D} = 0, \quad \text{div } \vec{H} = 0,$$

где

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}.$$

Из уравнений Максвелла вытекает волновое уравнение

$$\text{rot rot } \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}, \quad (22.1)$$

которое в случае изотропной среды принимает вид

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}. \quad (22.2)$$

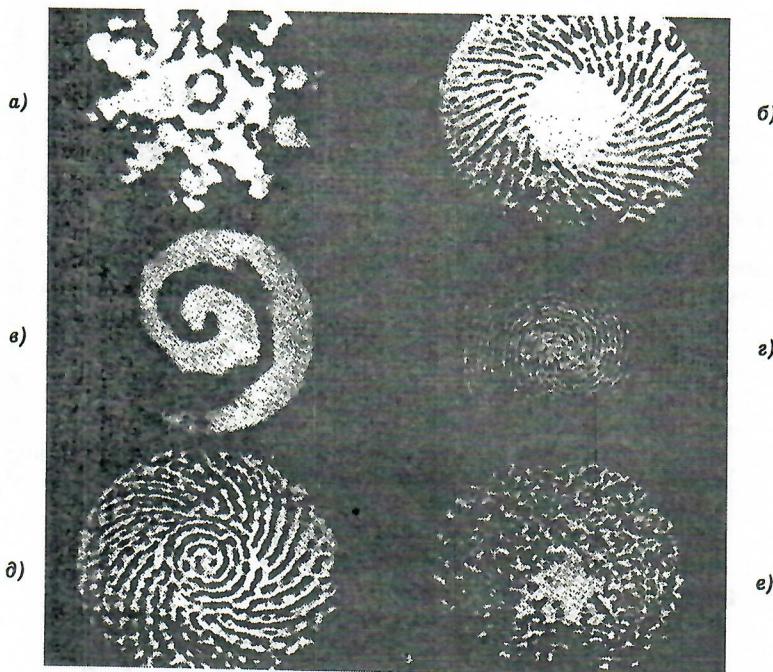


Рис. 22.8. Структуры светового поля, наблюдаемые в нелинейном резонаторе с двумерной обратной связью: вращающиеся волны (оптические ревербераторы) (а, б), спиральные волны (в, г) (случаю г соответствует меньший коэффициент диффузии), существование структур (д), оптическая турбулентность (е) [14]

В уравнениях (22.1), (22.2) \vec{E} — напряженность электрического поля световой волны, \vec{P} — поляризация среды. Уравнения (22.1) и (22.2) справедливы в равной мере как для линейных, так и для нелинейных сред. Согласно этим уравнениям, поляризация среды есть источник светового поля.

Поляризация среды, в свою очередь, возникает под действием падающей световой волны. Наведение поляризации световым полем описывается материальным уравнением

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{E}),$$

которое отражает структуру и свойства среды. Простейшее материальное уравнение нелинейной среды имеет вид

$$P = \varkappa E + \chi^{(2)} E^2 + \chi^{(3)} E^3 + \dots \quad (22.3)$$

Согласно этому уравнению поляризация среды есть *нелинейная функция* напряженности светового поля. С математической точки зрения именно это обстоятельство (нелинейность материального уравнения) является причиной нарушения принципа суперпозиции для световых волн в нелинейной среде. Из уравнений (22.1)–(22.3) непосредственно вытекает возможность генерации оптических гармоник и других нелинейно-оптических эффектов. Заметим, что отно-

сительная величина нелинейных слагаемых в (22.3) возрастает с увеличением напряженности светового поля, т. е. с увеличением интенсивности световой волны. Это объясняет тот факт, что нелинейные эффекты наблюдаются прежде всего в сильных световых полях.

Коэффициенты χ , $\chi^{(2)}$, $\chi^{(3)}$,... зависят от свойств среды и называются *оптическими восприимчивостями*. В частности, χ — линейная оптическая восприимчивость, $\chi^{(2)}$ — нелинейная восприимчивость второго порядка, $\chi^{(3)}$ — нелинейная восприимчивость третьего порядка и т. д.

Нелинейная поляризация. Часть поляризации среды, нелинейно зависящая от напряженности светового поля, называется *нелинейной поляризацией*. Выделяя в поляризации среды линейную и нелинейную компоненты, можно записать:

$$\vec{P} = \vec{P}_{\text{л}} + \vec{P}_{\text{нл}}. \quad (22.4)$$

Подставив (22.4) в (22.1), (22.2), получим волновые уравнения в форме

$$\text{rot rot } \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}_{\text{л}}}{\partial t^2} = - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}_{\text{нл}}}{\partial t^2} \quad (22.5)$$

для нелинейной анизотропной среды и

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}_{\text{л}}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}_{\text{нл}}}{\partial t^2} \quad (22.6)$$

для нелинейной изотропной среды. Из (22.3)–(22.6) видно, что нелинейная поляризация среды является источником новых спектральных компонент поля (оптических гармоник, комбинационных частот и т. п.).

Материальное уравнение вида (22.3) описывает изотропную нелинейную среду с безынерционным локальным откликом на световое поле. Аналогичное уравнение для анизотропной нелинейной диспергирующей среды имеет вид

$$\begin{aligned} P_{\alpha}(t) = & \int_0^{\infty} \chi_{\alpha\beta}(\tau) E_{\beta}(t-\tau) d\tau + \\ & + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(\tau_1, \tau_2) E_{\beta}(t-\tau_1) E_{\gamma}(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ & + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \times \\ & \times E_{\beta}(t-\tau_1) E_{\gamma}(t-\tau_2) E_{\delta}(t-\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dots \end{aligned} \quad (22.7)$$

Здесь индексы $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ пробегают значения, нумерующие декартовы оси координат. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Функции

$$\chi_{\alpha\beta}(\tau), \quad \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(\tau_1, \tau_2), \quad \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3), \dots$$

имеют смысл тензорных функций Грина, характеризующих линейный и нелинейный отклик среды на импульсное воздействие.

Для сред с *нелокальным откликом* функции Грина зависят не только от времени, но и от координат:

$$\varkappa_{\alpha\beta} = \varkappa_{\alpha\beta}(\tau; \vec{r}), \quad \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} = \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(\tau_1, \tau_2; \vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

и т. д. В этом случае в материальное уравнение (22.7) следует добавить интегрирование по пространственным переменным. Учет нелокальности важен в тех случаях, когда элементарные осцилляторы среды, расположенные в различных точках пространства, связаны и взаимодействуют между собой. Среды, обладающие таким свойством, называют средами с *пространственной дисперсией*. К их числу относятся некоторые типы кристаллов, а также плазма.

Нелинейная восприимчивость. Материальное уравнение (22.7) представляет собой обобщение уравнения (21.19) на случай нелинейной среды. Обобщая формулу (21.20б)

$$\varkappa_{\alpha\beta}(\omega) = \int_0^\infty \varkappa_{\alpha\beta}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (22.8)$$

определенную линейную оптическую восприимчивость $\varkappa_{\alpha\beta}(\omega)$, введем *нелинейные восприимчивости среды*

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(\tau_1, \tau_2) \exp[-i(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2, \\ \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \times \\ &\quad \times \exp[-i(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2 + \omega_3\tau_3)] d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \end{aligned} \quad (22.9)$$

и т. д. Аналогичные величины для сред с пространственной дисперсией зависят не только от частот, но и от волновых векторов \vec{k} , \vec{k}_1 , \vec{k}_2 и т. д. Заметим, что восприимчивости среды, определенные формулами (22.8), (22.9), имеют ту же размерность, что и восприимчивости в формуле (22.3).

Зависящий от интенсивности света показатель преломления. Обычно в изотропных нелинейных средах низшей нелинейностью, отличной от нуля, является кубическая нелинейность. В приближении безынерционного отклика материальное уравнение такой среды имеет вид

$$P = \varkappa E + \chi^{(3)} E^3. \quad (22.10)$$

В этом же приближении показатель преломления среды n определяется формулами $D = E + 4\pi P = \varepsilon E = n^2 E$, откуда

$$n = \sqrt{1 + 4\pi P/E}. \quad (22.11)$$

Подставив (22.10) в (22.11) и учитывая относительную малость нелинейного слагаемого, получим

$$n = n_0 + \frac{2\pi}{n_0} \chi^{(3)} E^2, \quad (22.12)$$

где

$$n_0 = \sqrt{1 + 4\pi\nu}. \quad (22.13)$$

Выразим квадрат напряженности электрического поля через интенсивность I световой волны. Пользуясь формулой $I = cE^2/8\pi$, получим

$$n = n_0 + n_2 I, \quad (22.14)$$

где

$$n_2 = \frac{16\pi^2}{n_0 c} \chi^{(3)}; \quad (22.15)$$

здесь n_0 — линейный показатель преломления среды, c — скорость света.

Формула (22.14) показывает, что в средах с кубичной нелинейностью показатель преломления зависит от интенсивности света. Этот эффект приводит к самовоздействию световых волн, в частности, к таким эффектам как самофокусировка светового пучка, фазовая самомодуляция импульса, бистабильность резонатора, заполненного нелинейной средой и т. п. Величина n_2 , имеющая размерность обратной интенсивности света, является удобной характеристикой кубичной нелинейности среды. Например, для кристалла кварца $n_2 = 3 \times 10^{-16} \text{ см}^2/\text{Вт}$.

Конкретный механизм, приводящий к нелинейности типа (22.14), может быть связан, например, с поворотом анизотропных молекул жидкости в поле мощной поляризованной световой волны. Поскольку такой же механизм лежит в основе двойного лучепреломления света, наведенного постоянным электрическим полем ("эффект Керра"), зависимость показателя преломления от интенсивности света называют *высокочастотным эффектом Керра*, а нелинейность (22.14) — *нелинейностью керровского типа*.

Оценки. Оценим линейную и нелинейные оптические восприимчивости среды, например кристалла. Линейная оптическая восприимчивость ν связана с показателем преломления среды n формулой $n^2 = 1 + 4\pi\nu$. Типичное значение показателя преломления для кристалла составляет $n = 1,5$. Исходя из этой цифры, получаем оценку

$$\nu = 0,1. \quad (22.16)$$

Для оценки квадратичной восприимчивости $\chi^{(2)}$ воспользуемся материальным уравнением (22.3). Согласно этому уравнению, размерность $\chi^{(2)}$ определяется формулой

$$\chi^{(2)} = \nu/E. \quad (22.17)$$

Воспользуемся формулой (22.17) для количественной оценки. Поскольку восприимчивость есть характеристика вещества, в качестве напряженности электрического поля E в (22.17) следует подставить некоторую величину, характерную для среды. Характерным масштабом поля в среде является напряженность внутриатомного электрического поля, которую можно оценить по формуле

$$E_{\text{ат}} = e/a^2, \quad (22.18)$$

Таблица 22.2
Нелинейно-оптические восприимчивости третьего порядка [31]

| Материал | n_2 , см 2 /Вт | $\chi^{(3)\Phi}(-\omega; \omega, \omega, -\omega)$, см 3 /эрг | T , К | Примечания |
|-----------------|------------------------|--|---------|---|
| CS ₂ | 3×10^{-14} | 10^{-12} | 300 | Нерезонансная |
| Кварц | 3×10^{-16} | 10^{-14} | 300 | Нерезонансная |
| Si | 10^{-10} | 10^{-8} | 300 | Нерезонансная |
| ЖК | 10^{-4} | 10^{-3} | 300 | Ориентированная мезофаза НЖК, очень медленная (секунды) |
| InSb | 3×10^{-3} | 1 | 77 | Резонансное усиление |
| AlGaAs | 2×10^{-4} | 6×10^{-2} | 300 | Резонансное усиление, квантово-размерные структуры |

где e — заряд электрона, a — размер атома. Полагая $e = 4,8 \times 10^{-10}$ СГСЭ, $a = 0,5 \times 10^{-8}$ см (боровский радиус), получим

$$E_{\text{ат}} = 2 \times 10^7 \text{ СГСЭ}. \quad (22.19)$$

Если теперь подставить (22.19) в (22.17), то получим

$$\chi^{(2)} = 5 \times 10^{-9} \text{ СГСЭ}. \quad (22.20)$$

Полученная оценка правильно указывает порядок величины квадратичной нелинейной восприимчивости кристалла. Например, для кристалла KDP, широко применяемого в нелинейной оптике, $\chi^{(2)} = 3 \times 10^{-9}$ СГСЭ. Как видно из (22.17), размерность $\chi^{(2)}$ обратна размерности напряженности электрического поля. Следовательно,

$$[\chi^{(2)}] = \text{г}^{-1/2} \cdot \text{см}^{1/2} \cdot \text{с} = \text{эрг}^{-1/2} \cdot \text{см}^{3/2}. \quad (22.21)$$

Аналогичным образом можно оценить кубическую нелинейную восприимчивость $\chi^{(3)}$. Используя материальное уравнение (22.3) и полагая $E = E_{\text{ат}}$, получим

$$\chi^{(3)} = \varkappa / E_{\text{ат}}^2. \quad (22.22)$$

Численная оценка по формулам (22.22), (22.16), (22.19) дает

$$\chi^{(3)} = 2,5 \times 10^{-16} \text{ СГСЭ} = 2,5 \times 10^{-16} \text{ см}^3/\text{эрг}. \quad (22.23)$$

Реальная величина $\chi^{(3)}$, например для кристалла кварца, равна 10^{-14} см 3 /эрг. Имеются, однако, материалы, обладающие значительно более высокой кубической восприимчивостью. Данные о некоторых из них представлены в табл. 22.2.

Представляет интерес сравнить между собой величины линейной и нелинейной поляризации среды. Например, ограничиваясь нелинейностью второго порядка, можно записать

$$P = P_{\text{л}} + P_{\text{нл}}^{(2)} = \varkappa E + \chi^{(2)} E^2$$

и

$$\frac{P_{\text{нл}}^{(2)}}{P_{\text{л}}} = \frac{\chi^{(2)} E^2}{\varkappa E} = \frac{\chi^{(2)} E}{\varkappa}.$$

Если теперь использовать для оценки формулу

$$\chi^{(2)} = \varkappa / E_{\text{ат}}, \quad (22.24)$$

то получим

$$P_{\text{нл}}^{(2)} / P_{\text{л}} = E / E_{\text{ат}}. \quad (22.25)$$

Таким образом, отношение квадратичной поляризации среды к линейной равно отношению напряженности электрического поля световой волны к напряженности внутриатомного поля. Аналогичным образом получаем

$$P_{\text{нл}}^{(3)} / P_{\text{л}} = (E / E_{\text{ат}})^2 \quad (22.26)$$

и т. д. Оценим величину $E / E_{\text{ат}}$. Интенсивность света I связана с напряженностью поля E световой волны формулой $I = cE^2 / 8\pi$. Отсюда $E = \sqrt{8\pi I / c}$. Полагая $I = 10^9 \text{ Вт/см}^2 = 10^{16} \text{ СГСЭ}$, $c = 3 \times 10^{10} \text{ см/с}$, получим $E = 3 \times 10^3 \text{ СГСЭ}$. Отсюда, используя (22.19), получаем

$$E / E_{\text{ат}} = 10^{-4}. \quad (22.27)$$

Таким образом, для данной интенсивности света (10^9 Вт/см^2) относительная величина нелинейной поляризации оказывается весьма мала. Тем не менее, нелинейный эффект может быть сильным благодаря тому, что он может накапливаться в процессе распространения световой волны.

Классическая модель нелинейной среды — ансамбль нелинейных осцилляторов. Механизмы оптической нелинейности весьма разнообразны (см. табл. 22.1). Однако наиболее универсальным из них можно, по-видимому, считать механизм, связанный с нелинейностью элементарного осциллятора среды — атома или молекулы. Вычислим нелинейную поляризацию и нелинейную восприимчивость среды, рассматривая ее как ансамбль нелинейных осцилляторов.

Нелинейный осциллятор. Используя второй закон Ньютона, уравнение движения осциллятора запишем в виде

$$m\ddot{x} = F_{\text{возвр}} + eE. \quad (22.28)$$

Здесь m — масса электрона, e — заряд электрона, x — смещение центра электронного облака относительно атомного ядра (рис. 22.9), E — напряженность электрического поля световой волны, $F_{\text{возвр}}$ — возвращающая сила, обусловленная притяжением электрона к ядру и связанная с потенциальной энергией $U(x)$ электрона в поле ядра соотношением



Рис. 22.9. Классическая модель атома

24)

$$F_{\text{возвр}} = -\frac{\partial U}{\partial x}. \quad (22.29)$$

.25)

В окрестности положения равновесия электрона ($x = 0$) потенциальную энергию $U(x)$ можно представить в виде разложения по степеням x :

вно-

чен-

.26)

ио-

ула-

СЭ.

$$U(x) = \frac{1}{2}\alpha x^2 + \frac{1}{3}\beta x^3 + \dots \quad (22.30)$$

График зависимости потенциальной энергии от электронной координаты схематически показан на рис. 22.10. Первое слагаемое в (22.30) соответствует параболическому приближению (пунктир на рис. 22.10). Остальные слагаемые описывают отличие формы реальной потенциальной ямы от параболической. Учет этих слагаемых важен, если амплитуда колебаний электрона достаточно велика. Последнее может иметь место в поле световой волны большой интенсивности. Подставив (22.30) в (22.29), получим

.27)

$$F_{\text{возвр}} = -\alpha x - \beta x^2 + \dots \quad (22.31)$$

.ная

нее,

ака-

зых

изы

ому,

спре-

ную

пля-

вне-

.28)

лек-

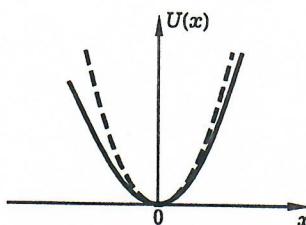
ость

'сло-

гий

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma x^2 = \frac{e}{m} E, \quad (22.32)$$

где $\omega_0^2 = \alpha/m$ — собственная частота колебаний осциллятора, $\gamma = \beta/m$ — параметр нелинейности. Добавим в левую часть уравнения (22.32) слагаемое $\Gamma \dot{x}$, описывающее затухание электронных колебаний. В итоге получим уравнение

Рис. 22.10. График потенциальной энергии нелинейного осциллятора (сплошная кри-
вая) и линейное приближение (пунктир)

$$\ddot{x} + \Gamma \dot{x} + \omega_0^2 x + \gamma x^2 = \frac{e}{m} E. \quad (22.33)$$

Итак, уравнение (22.33) описывает колебания атомного осциллятора под действием поля световой волны. Данное уравнение учитывает нелинейность осциллятора, которая становится существенной, если амплитуда колебаний достаточно велика. Ангармонизм элементарного осциллятора приводит к появлению нелинейной поляризации среды.

Поляризация среды. Поляризация среды P определяется как дипольный момент единицы объема. Считая среду однородной, запишем

$$P = Np, \quad (22.34)$$

где N — число атомов в единице объема,

$$p = ex, \quad (22.35)$$

p — дипольный момент элементарного осциллятора (атома), e — заряд электрона, x — смещение электрона относительно положения равновесия, определяемое уравнением (22.33). Таким образом, для вычисления поляризации среды необходимо решить уравнение (22.33).

Точное решение этого уравнения неизвестно. Здесь мы сталкиваемся с типичной для нелинейной оптики ситуацией, когда уравнение, описывающее нелинейный эффект, не имеет точного решения или это решение настолько сложно, что практически им трудно воспользоваться. В этих условиях приходится прибегать к различным приближенным методам, причем выбор конкретного метода для каждой задачи, вообще говоря, индивидуален.

Метод возмущений. Одним из наиболее универсальных методов анализа нелинейных систем является метод возмущений. Основная идея этого метода состоит в том, чтобы сначала описать движение системы в *линейном приближении*, а затем рассмотреть нелинейный эффект как *малую поправку*.

Предположим, что амплитуда колебаний осциллятора настолько мала, что в любой момент времени нелинейный член в уравнении (22.33) много меньше линейных слагаемых, в частности,

$$|\gamma x^2| \ll |\omega_0^2 x|, \quad (22.36)$$

или

$$|\gamma x| \ll \omega_0^2. \quad (22.37)$$

Тогда решение уравнения (22.33) можно представить в виде

$$x = x_{\text{л}} + x_{\text{нл}}, \quad (22.38)$$

где $x_{\text{л}}$ — решение линейного уравнения

$$\ddot{x}_{\text{л}} + \Gamma \dot{x}_{\text{л}} + \omega_0^2 x_{\text{л}} = \frac{e}{m} E, \quad (22.39)$$

а $x_{\text{нл}}$ — нелинейная поправка, малая по сравнению с $x_{\text{л}}$:

$$|x_{\text{нл}}| \ll |x_{\text{л}}|. \quad (22.40)$$

Линейное приближение. Запишем световое поле в виде плоской монохроматической волны

$$E = \frac{1}{2} \mathcal{E} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} + \text{к. с.} \quad (22.41)$$

и подставим (22.41) в (22.39). Решение уравнения (22.39) ищем в виде

$$x_{\text{л}} = \frac{1}{2} \tilde{x}_{\text{л}} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} + \text{к. с.} \quad (22.42)$$

Подставив (22.42) в (22.39), находим

$$\tilde{x}_{\text{л}} = \frac{e}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma} \mathcal{E}, \quad (22.43)$$

или

$$\tilde{x}_{\text{л}} = \alpha(\omega) \mathcal{E}, \quad (22.44)$$

где введена величина

$$\alpha(\omega) = \frac{e}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma}, \quad (22.45)$$

которая называется *линейной поляризуемостью атома*. Тем самым задача в линейном приближении решена.

Расчет нелинейной поправки. Подставив (22.38) в (22.33), получим уравнение

$$\ddot{x}_{\text{л}} + \ddot{x}_{\text{нл}} + \Gamma \dot{x}_{\text{л}} + \Gamma \dot{x}_{\text{нл}} + \omega_0^2 x_{\text{л}} + \omega_0^2 x_{\text{нл}} + \gamma(x_{\text{л}}^2 + x_{\text{нл}}^2 + 2x_{\text{л}}x_{\text{нл}}) = \frac{e}{m} E. \quad (22.46)$$

В силу уравнения (22.39) часть членов в этом уравнении сокращается и оно приобретает вид

$$\ddot{x}_{\text{нл}} + \Gamma \dot{x}_{\text{нл}} + \omega_0^2 x_{\text{нл}} + \gamma(x_{\text{л}}^2 + x_{\text{нл}}^2 + 2x_{\text{л}}x_{\text{нл}}) = 0. \quad (22.47)$$

Среди оставшихся членов выделим члены низшего порядка малости, а остальными пренебрежем. В силу (22.40)

$$x_{\text{л}}^2 + x_{\text{нл}}^2 \approx x_{\text{л}}^2. \quad (22.48)$$

В силу (22.37)

$$\omega_0^2 x_{\text{нл}} + 2\gamma x_{\text{л}} x_{\text{нл}} = (\omega_0^2 + 2\gamma x_{\text{л}}) x_{\text{нл}} \approx \omega_0^2 x_{\text{нл}}. \quad (22.49)$$

В итоге получаем уравнение

$$\ddot{x}_{\text{нл}} + \Gamma \dot{x}_{\text{нл}} + \omega_0^2 x_{\text{нл}} = -\gamma x_{\text{л}}^2. \quad (22.50)$$

Таким образом мы произвели линеаризацию исходного нелинейного уравнения (22.33) по малому параметру $x_{\text{нл}}$.

Уравнение (22.50) представляет собой линейное уравнение вынужденных колебаний, в котором роль вынуждающей силы играет член $\gamma x_{\text{л}}^2$, определяемый решением уравнения движения электрона в линейном приближении. Найдем решение уравнения (22.50). Согласно (22.42)

$$x_{nl}^2 = \frac{1}{4} \tilde{x}_{nl}^2 e^{i(2\omega t - 2\vec{k}\vec{r})} + \frac{1}{4} |\tilde{x}_{nl}|^2 + \text{к. с.} \quad (22.51)$$

Таким образом, вынуждающая сила содержит постоянную составляющую и переменную компоненту, осциллирующую на частоте второй гармоники 2ω . В силу линейности уравнения (22.50), такую же структуру будет иметь и величина x_{nl} . Поэтому ищем решение в виде

$$x_{nl}(t) = \frac{1}{2} x_2 e^{i(2\omega t - 2\vec{k}\vec{r})} + \frac{1}{2} x_0 + \text{к. с.} \quad (22.52)$$

Подставив (22.51), (22.52) в (22.50), получим уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\omega_0^2 - 4\omega^2 + 2i\omega\Gamma) x_2 e^{i(2\omega t - 2\vec{k}\vec{r})} + \frac{1}{2} \omega_0^2 x_0 + \text{к. с.} = \\ & = -\frac{1}{4} \gamma \tilde{x}_{nl}^2 e^{i(2\omega t - 2\vec{k}\vec{r})} - \frac{1}{4} \gamma |\tilde{x}_{nl}|^2 + \text{к. с.} \end{aligned} \quad (22.53)$$

Приравнивая коэффициенты при экспонентах, а также постоянные слагаемые, находим

$$x_0 = -\frac{\gamma}{2\omega_0^2} |\tilde{x}_{nl}|^2, \quad x_2 = -\frac{\gamma}{2(\omega_0^2 - 4\omega^2 + 2i\omega\Gamma)} \tilde{x}_{nl}^2. \quad (22.54)$$

Таким образом, нелинейная поправка вычислена.

Итак, приближенное решение уравнения (22.33) получено. Теперь нетрудно вычислить поляризацию среды. Подставив (22.38), (22.42), (22.52) в (22.34), получим

$$P = P_{nl} + P_{nll}, \quad (22.55)$$

где

$$P_{nl} = \frac{1}{2} \mathcal{P}_{nl} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} + \text{к. с.}, \quad (22.56)$$

P_{nl} — линейная поляризация,

$$P_{nll} = \frac{1}{2} \mathcal{P}_{2l} e^{i(2\omega t - 2\vec{k}\vec{r})} + \frac{1}{2} \mathcal{P}_0 + \text{к. с.}, \quad (22.57)$$

P_{nll} — нелинейная поляризация, а величины \mathcal{P}_{nl} , \mathcal{P}_2 , \mathcal{P}_0 определяются формулами

$$\mathcal{P}_{nl} = Ne\tilde{x}_{nl}, \quad \mathcal{P}_2 = Nxe_2, \quad \mathcal{P}_0 = Nxe_0 \quad (22.58)$$

или, в силу (22.44), (22.54),

$$\mathcal{P}_{nl} = Ne\alpha(\omega)\mathcal{E},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2 &= -\frac{1}{2} \gamma Ne \frac{\alpha^2(\omega)}{\omega_0^2 - 4\omega^2 + 2i\omega\Gamma} \mathcal{E}^2, \\ \mathcal{P}_0 &= -\frac{1}{2} \gamma Ne \frac{|\alpha(\omega)|^2}{\omega_0^2} |\mathcal{E}|^2, \end{aligned} \quad (22.59)$$

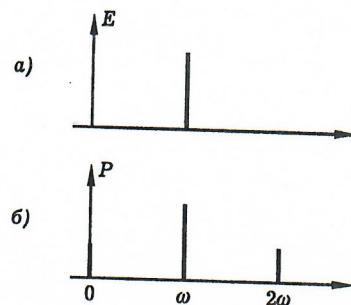


Рис. 22.11. Спектр возбуждающей световой волны (а) и спектр поляризации (б) в квадратично-нелинейной среде

где $\alpha(\omega)$ — линейная поляризуемость атома, определяемая формулой (22.45). Формулы (22.55)–(22.59) показывают, что поляризация рассматриваемой нелинейной среды содержит три спектральные компоненты: компоненту на частоте возбуждающей световой волны (линейная поляризация), компоненту на частоте 2ω и постоянную составляющую (рис. 22.11). Компонента поляризации на частоте 2ω ответственна за генерацию второй оптической гармоники.

Оптические восприимчивости. Линейная оптическая восприимчивость среды $\chi(\omega)$ вводится как коэффициент пропорциональности между комплексными амплитудами поля и поляризации на частоте ω :

$$\mathcal{P}_n = \chi(\omega)\mathcal{E}. \quad (22.60)$$

Введем квадратичную нелинейную восприимчивость среды на частоте второй гармоники $\chi^{(2)}(2\omega)$, определив ее как коэффициент пропорциональности между комплексной амплитудой поляризации среды на этой частоте \mathcal{P}_2 и квадратом комплексной амплитуды поля:

$$\mathcal{P}_2 = \chi^{(2)}(2\omega)\mathcal{E}^2. \quad (22.61)$$

Наконец, квадратичную нелинейную восприимчивость среды на нулевой частоте $\chi^{(2)}(0)$ определим формулой

$$\mathcal{P}_0 = \chi^{(2)}(0)|\mathcal{E}|^2. \quad (22.62)$$

Из (22.59)–(22.62) следует, что

$$\chi(\omega) = N\alpha(\omega),$$

$$\chi^{(2)}(2\omega) = -\frac{1}{2}\gamma Ne \frac{\alpha^2(\omega)}{\omega_0^2 - 4\omega^2 + 2i\omega\Gamma}, \quad (22.63)$$

$$\chi^{(2)}(0) = -\frac{1}{2}\gamma Ne \frac{|\alpha(\omega)|^2}{\omega_0^2},$$

где

$$\alpha(\omega) = \frac{e}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma}, \quad (22.64)$$

$\alpha(\omega)$ — линейная оптическая поляризуемость атома.

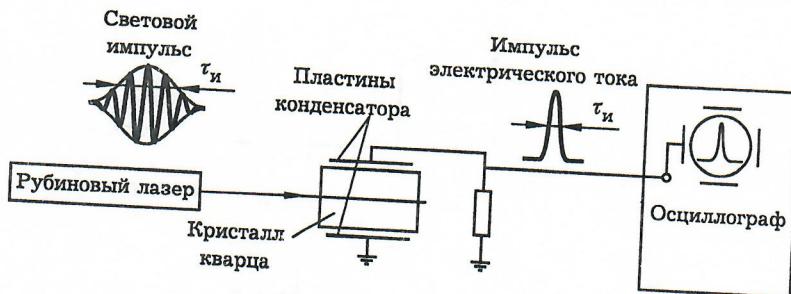


Рис. 22.12. Схема опыта по наблюдению оптического детектирования. Световой пучок из рубинового лазера пронизывает кристалл кварца, помещенный в электрический конденсатор. Вследствие детектирования световой импульс лазера возбуждает импульс электрического тока в цепи конденсатора

Итак, мы вычислили линейную и нелинейные оптические восприимчивости для модельной нелинейной среды, представляющей собой ансамбль нелинейных классических осцилляторов. Полученные формулы (22.63) показывают, что нелинейная восприимчивость среды зависит, во-первых, от ангармоничности элементарного осциллятора, характеризуемой параметром γ , а во-вторых, от линейной поляризуемости атома $\alpha(\omega)$. Поэтому нелинейные среды нужно искать, прежде всего, среди сред с большими показателями преломления (жидкости, кристаллы). Кроме того, из (22.63), (22.64) следует, что нелинейная восприимчивость среды возрастает в *резонансных условиях*, когда частота возбуждающей световой волны ω либо частота второй гармоники 2ω близка к собственной частоте колебаний элементарного осциллятора ω_0 .

Оптическое детектирование. Наш расчет показывает, что под действием мощной световой волны в квадратично-нелинейной среде должна возникать постоянная поляризация, величина которой пропорциональна интенсивности света. Этот эффект называется *оптическим детектированием* или *выпрямлением света*. Постоянная поляризация, в свою очередь, приводит к появлению постоянного электрического поля в среде, которое может быть зарегистрировано и измерено.

На рис. 22.12 показана схема опыта по наблюдению оптического детектирования в кристалле кварца. Световой пучок рубинового лазера пронизывает кристалл кварца, помещенный в электрический конденсатор. Вследствие эффекта детектирования световой импульс лазера возбуждает импульс электрического тока в цепи конденсатора. Заметим, что подобные опыты можно использовать для измерения квадратичной оптической нелинейности различных сред.

Литература

1. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. — М.: Изд-во АН СССР, 1965.
2. Бломберген Н. Нелинейная оптика. — М.: Мир, 1966.
3. Квантовая электроника. Маленькая энциклопедия/Под ред. М. Е. Жаботинского. — М.: Советская Энциклопедия, 1969.
4. Шен И. Р. Принципы нелинейной оптики. — М.: Наука, 1989.

5. Физическая энциклопедия/Под ред. А. М. Прохорова. — М.: Советская Энциклопедия, 1988.
6. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. — М.: Наука, 1979.
7. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В. Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде//УФН. 1967, Т. 93. С. 19.
8. Ахманов С. А., Выслouch В. А., Чиркин А. С. Самовоздействие волновых пакетов в нелинейной среде и генерация фемтосекундных лазерных импульсов//УФН, 1986. Т. 149. С. 449.
9. Цернике Ф., Мидвинтер Дж. Прикладная нелинейная оптика. — М.: Мир, 1976.
10. Нелинейная спектроскопия/Под. ред. Н. Бломбергена. — М.: Мир, 1979.
11. Ахманов С. А., Коротеев Н. И. Методы нелинейной оптики в спектроскопии рассеяния света. — М.: Наука, 1981.
12. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1981.
13. Ахманов С. А., Выслouch В. А., Чиркин А. С. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. — М.: Наука, 1988.
14. Новые физические принципы оптической обработки информации/Под ред. С. А. Ахманова и М. А. Воронцова. — М.: Наука, 1990.
15. Ярие А., Юх П. Оптические волны в кристаллах. — М.: Мир, 1987.
16. Райнтжес Дж. Нелинейные оптические параметрические процессы в жидкостях и газах. — М.: Мир, 1987.
17. Коротеев Н. И., Шумай И. Л. Физика мощного лазерного излучения. — М.: Наука, 1991.
18. Аleshkevich B. A., Kiseliov D. F., Korchajskin B. B. Лазеры в лекционном эксперименте. — М.: Изд-во МГУ, 1985.
19. Зельдович Б. Я., Пилипецкий Н. Ф., Шкунов В. В. Обращение волнового фронта. — М.: Наука, 1985.
20. Бесталов В. И., Пасманик Г. А. Нелинейная оптика и адаптивные лазерные системы. — М.: Наука, 1986.
21. Архипкин В. Г., Попов А. К. Нелинейное преобразование света в газах. — Новосибирск: Наука, 1987.
22. Делоне Н. Б., Крайнов В. П. Основы нелинейной оптики атомных газов. — М.: Наука, 1986.
23. Аллен Л., Эберли Дж. Оптический резонанс и двухуровневые атомы. — М.: Мир, 1978.
24. Ахманов С. А., Воронцов М. А., Иванов В. Ю. Крупномасштабные поперечные нелинейные взаимодействия в лазерных пучках. Новые типы нелинейных волн, возникновение "оптической турбулентности"/Письма в ЖЭТФ. 1988. Т. 47. С. 611.
25. Ахманов С. А., Емельянов В. И., Коротеев Н. И., Семиногов В. Н. Воздействие мощного лазерного излучения на поверхность полупроводников и металлов: нелинейно-оптические эффекты и нелинейно-оптическая диагностика//УФН. 1985. Т. 147. С. 675.
26. Клышико Д. Н. Физические основы квантовой электроники. — М.: Наука, 1986.
27. Клышико Д. Н. Фотоны и нелинейная оптика. — М.: Наука, 1980.
28. Приезжев А. В., Тучин В. В., Шубочкин Л. П. Лазерная диагностика в биологии и медицине. — М.: Наука, 1989.
29. Сверхкороткие световые импульсы/Под ред. С. Шапиро. — М.: Мир, 1981.
30. Тамм И. Е. Основы теории электричества. — М.: Наука, 1976.
31. Фишер Р., Мюллер Р./Квантовая электроника. 1989. Т. 16. С. 1723.
32. Ярие А. Квантовая электроника и нелинейная оптика. — М.: Сов. радио, 1973.
33. Рэди Дж. Действие мощного лазерного излучения. — М.: Мир, 1974.
34. Аскарьян Г. А./ЖЭТФ. 1962. Т. 42. С. 1567.
35. Пилипецкий Н. Ф., Рустамов А. Р./Письма в ЖЭТФ. 1965. Т. 2. С. 88.