

Билет 30

1. Первое и второе начала термодинамики

Первое начало термодинамики

Это закон сохранения и превращения энергии в самом общем его виде, т.е. учитывающий любые формы движения материи. Это утверждение о невозможности существования двигателя первого рода, т.е. устройства, которое, воспроизводя своё первоначальное состояние, совершало бы полезную работу не требуя при этом никаких энергетических затрат.

Форма баланса энергии: бесконечно малое изменение внутренней энергии dE в т.д. системе происходит за счёт поглощения теплоты δQ и совершения работы δW

$$dE = \delta Q - \delta W. \quad (1)$$

Если число частиц N в системе меняется, то:

$$dE = \delta Q - \delta W + \mu dN \quad (2)$$

μ - изменение внутренней энергии, связанное с добавлением 1 частицы в систему, когда эта частица не совершает работу и не получает тепла:

$$\mu = \left(\frac{\partial E}{\partial N} \right)_{\delta W=0, \delta Q=0}. \quad (3)$$

Второе начало термодинамики

Аксиоматическая формулировка Клаузиуса

Для любой равновесной ТД системы существует однозначная аддитивная функция состояния именуемая энтропией S , такая, что её полный дифференциал:

$$dS = \frac{\delta Q}{\theta}, \quad (4)$$

где θ - температура.

Статистическое определение энтропии:

$$S = k \ln(\Omega), \quad (5)$$

где константа $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К - постоянная Больцмана, а Ω — статистический вес состояния, является числом возможных микросостояний (способов), с помощью которых можно составить данное макроскопическое состояние.

Постулат Клаузиуса:

Невозможен переход тепла от более нагретого тела к менее нагретому тела без каких-либо других изменений в системе.

Формулировка Томпсона:

Невозможен вечный двигатель второго рода: тепловая машина совершающая в круговом процессе положительную работу за счёт изменения состояния ("охлаждения") только одного тела ("нагревателя").

Теорема Карно, как следствие: КПД замкнутого цикла, составленного из двух изотерм $\theta_1 > \theta_2$, пересекаемых двумя адиабатам, называемого циклом Карно, зависит только от температур нагревателя θ_1 и холодильника θ_2 и совершенно не зависит от природы рабочего тела:

$$\eta = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1}. \quad (6)$$

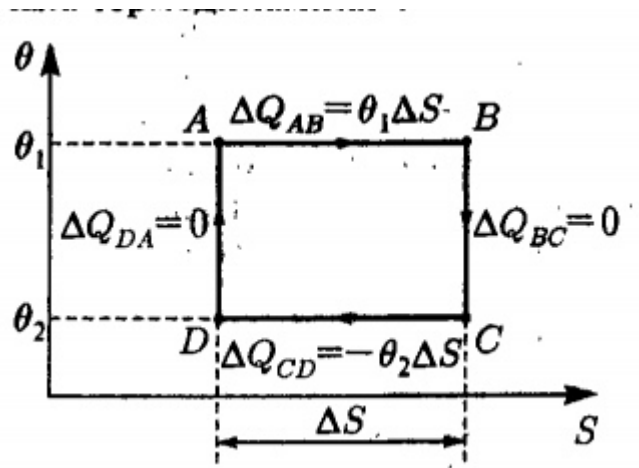


Рис. 1: Цикл Карно

2. Описание эволюции квантовомеханических систем. Уравнения Гейзенберга и Шрёдингера. Стационарные состояния.

Существует два способа описания квантовомеханических явлений: картина Гейзенберга и картина Шрёдингера. Почему именно два? Потому что есть два варианта ввести зависимость от времени: либо только вектор состояния, либо только операторы.

Картина Гейзенберга

Это один из способов описания квантовомеханических явлений, в котором эволюция системы описывается уравнением Гейзенберга и определяется только развитием операторов во времени, но не вектора состояния. Иными словами динамическими переменными являются наблюдаемые величины.

Уравнение Гейзенберга:

$$\frac{d}{dt} \hat{L}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \hat{L}(t) + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{L}(t)], \quad (7)$$

где $\hat{L}(t)$ — линейный самосопряженный оператор наблюдаемой величины, а \hat{H} — гамильтониан системы.

Картина Шрёдингера

Здесь наоборот: вектор состояния меняется во времени, а операторы наблюдаемых постоянны.

Уравнение Шрёдингера:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_S(t)\rangle = \hat{H} |\psi_S(t)\rangle, \quad (8)$$

где $|\psi_S(t)\rangle$ — вектор состояния.

Стационарные состояния

Состояния, в которых имеет энергия определённые значения, называются стационарными состояниями системы. Они описываются векторами $|\psi_S\rangle_n$, являющимися собственными векторами оператора Гамильтона. Для них верно $\hat{H}|\psi_S\rangle_n = E_n|\psi_S\rangle_n$, где E_n — собственные значения энергии. Соответствующее этому, волновое уравнение 8 для вектора $|\psi_S\rangle_n$:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_S(t)\rangle_n = E_n |\psi_S(t)\rangle_n, \quad (9)$$

при интегрировании по времени даст

$$|\psi_S(t)\rangle_n = e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} |\psi_S\rangle_n, \quad (10)$$

где $|\psi_S\rangle_n$ зависит только от координат. Так определяется зависимость волновых функций или волнового вектора от координат.

Чистое состояние — это полностью указанное квантовое состояние. Если данный квантовый объект (например, какая-то элементарная частица) находится в чистом состоянии, это означает, что у нас есть вся информация о ней. Только чистые состояния полностью можно описать волновыми функциями.

Состояния, для полного описания которых не достаточно задания одного вектора состояния, называются смешанными состояниями. Они описываются матрицами плотностей:

$$\hat{\rho} = \hat{P}_\psi = \langle \psi_S | \psi_S \rangle. \quad (11)$$

Пример: прямоугольная яма

представляющее собой суперпозицию двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях вдоль оси x .

Постоянные A и B находятся из граничных условий (2)

$$A + B = 0 \text{ при } x = 0 \text{ т.е. } B = -A. \quad (8)$$

Следовательно

$$\Psi(x) = A(e^{+iax} - e^{-iax}) = 2iA \sin ax. \quad (9)$$

Условие $\Psi(L) = 0$ дает

$$2ia \sin aL = 0. \quad (10)$$

Отсюда

$$aL = n\pi, \text{ Следовательно и } a = n\pi/L, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

Подставляя полученное значение a в соотношение (6), получим соотношение для энергии частицы в бесконечной прямоугольной яме

$$E_n = \hbar^2 a^2 / 2m = n^2 \pi^2 \hbar^2 / 2mL^2, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

Волновые функции (9) имеют вид

$$\begin{aligned} \Psi_n(x) &= 2iA \sin(n\pi x/L). \\ \Psi_n^*(x) &= -2iA \sin(n\pi x/L). \end{aligned} \quad (13)$$

Константу A можно получить из условия

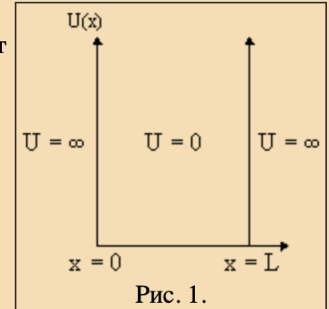
$$\begin{aligned} \int_0^L \Psi_n^*(x) \Psi_n(x) dx &= \int_0^L 4A^2 \sin^2\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx = \\ &= 2A^2 \left[x - \frac{L}{2\pi n} \sin\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) \right]_0^L = 2A^2 L = 1. \end{aligned}$$

Частица массы m находится в одномерной потенциальной яме бесконечной глубины (рис. 1). Потенциальная энергия U удовлетворяет следующим граничным условиям

$$U(x) = \begin{cases} \infty & x < 0, x > L \\ 0 & 0 \leq x \leq L \end{cases} \quad (1)$$

При таких граничных условиях частица находится внутри потенциальной ямы $0 \leq x \leq L$ и не может выйти за ее пределы, т.е.

$$\Psi(x) = 0 \quad x < 0, x > L \quad (2)$$



Условие нормировки

$$\int_0^L \Psi^* \Psi dx = 1. \quad (3)$$

Используя стационарное уравнение Шредингера для случая $U = 0$, получим

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi}{dx^2} = E \Psi \quad (4)$$

или

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + a^2 \Psi = 0, \quad (5)$$

где

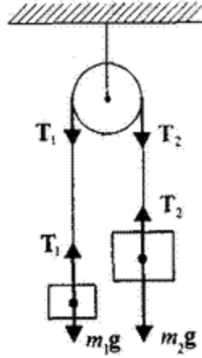
$$a^2 = 2mE/\hbar^2. \quad (6)$$

Уравнение (5) описывает положение частицы внутри потенциальной ямы. Оно имеет решение

$$\Psi(x) = A e^{+iax} + B e^{-iax}, \quad (7)$$

3. Через блок радиуса R , имеющий момент инерции J , перекинута невесомая, нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы с массами m_1 и m_2 . Проскальзывание между нитью и блоком отсутствует. Определить ускорение грузов.

Пусть первый груз движется вниз, а ось OY направлена вниз, тогда запишем систему уравнений в проекции на эту ось:



$$\begin{cases} m_1g - T_1 = m_1a & \text{— второй закон Ньютона для первого груза,} \\ m_2g - T_2 = -m_2a & \text{— второй закон Ньютона для второго груза,} \\ J\varepsilon = RT_1 - RT_2 & \text{— второй закон Ньютона для вращательного движения,} \\ a = \varepsilon R & \text{— кинетическая связь.} \end{cases}$$

T_1, T_2 - силы натяжения нитей для первого и второго грузов соответственно. Вычтем из второго уравнения системы первое и выразим $T_1 - T_2$:

$$T_1 - T_2 = -a(m_1 + m_2) + g(m_1 - m_2). \quad (12)$$

Подставляем это в третье уравнение, выражаем ε . Затем подставляем полученное ε в четвертое уравнение и выражаем a :

$$a = \frac{(m_1 - m_2)R^2g}{(m_1 + m_2)R^2 + J}. \quad (13)$$