Билет №35

1. Идеальные бозе- и ферми-газы

~~Бозе-газ~~ ~~Если~~ Рассмотрим квантовую систему со многими электронами. Если выбрать произвольный набор ~~эл~~ одноэлектронных волновых функций, то волновую ф-ю многоэлектронной системы можно характеризовать набором индексов одноэлектронных функций. Можно считать, что некоторые из одноэлектронных состояний заполнены, а другие — нет. Приписывая заполненным состояниям число 1, а незаполненным — 0, можно построить бесконечную цепочку единиц и нулей, характеризующую состояние электронной системы. Такая цепочка называется представлением чисел заполнения N_p

Бозе-газ: N_p — не ограничено

Статистика Бозе-Эйнштейна: $n_p = \dfrac{1}{\exp\left(-\frac{E_p-\mu}{\theta}\right)-1}$

Частицы — бозоны; у бозонов — целый спин (0, 1, 2, ...)

При низких температурах идеальный бозе-газ образует конденсированное состояние — конденсат Бозе-Эйнштейна

Ферми-газ: $N_p = 0, 1$

Статистика Ферми-Дирака: $n_p = \dfrac{1}{\exp\left(+\frac{E_p-\mu}{\theta}\right)+1}$

Частицы — фермионы, у фермионов — полуцелый спин ($\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$)

Принцип Паули (действует для фермионов, не действует для бозонов): два и более тождественных фермиона не могут одновременно находиться в одном и том же квантовом состоянии)

В идеальном ферми-газе в пределе низких температур

$\mu = E_F$

энергия Ферми

② Стационарная теория возмущений в отсутствие и при наличии вырождения. Эффекты Зеемана и Штарка

$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$

$\hat{H}_0 \psi^{(0)} = E^{(0)} \psi^{(0)}$; $\hat{H}\psi = (\hat{H}_0 + \hat{V})\psi = E\psi$; $\psi = \psi^{(0)} + \psi^{(1)} + \dots$

Вырождение — одному значению энергии соответствует несколько собств. функций

1) Пусть уровни невырождены, спектры дискретны

$\psi = \sum_m C_m \psi_m^{(0)} \Rightarrow \sum_m C_m E \psi_m^{(0)}$

$V_{km} = \int \psi_k^{(0)} \hat{V} \psi_m^{(0)} dq = \langle k|\hat{V}|m\rangle$

Поправка 1-го приближения к собственному значению

$E_m^{(1)} = V_{nn} = \int \psi_n^{(0)} \hat{V} \psi_n^{(0)} dq = \langle n|\hat{V}|n\rangle$

Поправка 1-го приближения к собственной функции

$$\psi_n^{(1)} = \sum_m \frac{V_{mn}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \psi_m^{(0)}$$

2) Пусть уровни вырождены

$E_1 C_n^{(0)} = \sum_{n'} V_{nn'} C_{n'}^{(0)} \Rightarrow |V_{nn'} - E^{(1)} \delta_{nn'}| = 0$ — секулярное уравнение

Оно имеет s-вещественных корней, которые представляют собой искомые поправки 1-го приближения к СЗ

S - число функций, соотв. собств. значению

3) Эффект Зеемана: внешнее магнитное поле расщепляет атомные уровни, снимая вырождение по направлениям полного момента

Вид оператора возмущения: $\hat{V} = \mu_B(\hat{\vec{L}} + 2\hat{\vec{S}})\vec{H} + \frac{e^2}{8mc^2}\sum_a [\vec{H}\vec{r}_a]$

Энергия расщепления: $\Delta E = \mu_B g M_J H$, где $g = 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)}$

множитель Ланде

4) Эффект Штарка — смещение и расщепление атомных уровней во внешнем электрическом поле

$\hat{V} = -\hat{\vec{d}}\vec{E}$ — вид оператора возмущения

$\Delta E_n = -\frac{E^2}{2}\left\{\alpha_n + 2\beta_n\left[M_J^2 - \frac{1}{3}J(J+1)\right]\right\}$ α_n, β_n находятся из собственных значений тензора α_{ik}

$\alpha_{ik}^{(n)} = \alpha_n \delta_{ik} + \beta_n\left(\hat{J}_i \hat{J}_k + \hat{J}_k \hat{J}_i - \frac{2}{3}\delta_{ik}\hat{J}^2\right)$

(3) По прямому проводнику кругового сечения радиуса R течет ток I, равномерно распределенный по поперечному сечению. Найти магнитное поле, создаваемое током, внутри и вне проводника

Воспользуемся теоремой о циркуляции магнитного поля

~~$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \frac{4\pi}{c} \int \vec{j}\, \vec{ds}$~~ $\oint \vec{B}\, \vec{dl} = \mu_0 \int \vec{j}\, \vec{ds}$

Внутри проводника ($r \leq R$)

$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \pi r^2 j$, где $j = \frac{I}{\pi R^2}$ => $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$

Снаружи проводника ($r > R$)

$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \pi r^2 j$, где $j = \frac{I}{\pi r^2}$ => $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

На границе проводника ($r = R$) => $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$