# Билет №24

① Функция Лагранжа и уравнения Лагранжа системы материальных точек. Интегралы движения.

Пусть имеется система из $N$ материальных точек и $K$ идеальных голономных связей. Тогда в этой системе $S = 3N - K$ степеней свободы

$\{q_1, \dots, q_s\}$ – обобщённые координаты

$\vec{r}_a = \vec{r}_a(q_1, \dots, q_s)$ – радиус-вектор $a$-й точки, $a = \overline{1, N}$

$T(\dot{q}, q, t) = \sum_{a=1}^{N} m_a \frac{\dot{\vec{r}}_a^{\,2}}{2}$ ; $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$ , где $Q_i = \left(\vec{F}_a, \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i}\right)$ – обобщённая сила

$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + Q_i^d$ ← обобщённая диссипативная сила ; $U$ – потенциальная энергия системы материальных точек: $U = U(q, t)$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = Q_i^d, \quad i = \overline{1, S}}$$ ← система уравнений Лагранжа

$\mathcal{L} = T - U$ – функция Лагранжа

Интеграл движения – функция обобщённых скоростей, координат и времени, сохраняющая своё значение неизменным при движении системы

$$f(\dot{q}(t), q(t), t) = const \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt} f(\dot{q}(t), q(t), t) = 0$$

Интеграл движения находится по виду функции Лагранжа, а его существование является следствием уравнений Лагранжа. Решение системы интегралов движения равносильно решению ур-й Лагранжа

1) Обобщённый импульс $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = p_i(q, \dot{q}, t)$

Обобщённый импульс является интегралом движения, если отсутствует диссипация и $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$ ($q_i$ – циклическая координата)

2) Обобщённая энергия $E = \sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L} = E(q, \dot{q}, t)$

Обобщённая энергия является интегралом движения, если нет диссипации и $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ (Лагранжиан не зависит явно от времени)

② Спонтанные и вынужденные переходы. Принцип работы лазера

Пусть плоская электромагнитная волна проходит через слой вещества, представляющего собой двухуровневую систему с уровнями $E_1$ и $E_2$ ($E_2 > E_1$), где $\omega_{12} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$ – частота перехода

Резонансное поглощение фотонов: атомы переходят с $E_1$ на $E_2$

$$\frac{dN_{1\,пог}}{dt} = B_{12} N_1 \rho_\nu$$ , где $B_{12}$ – вероятность вынужденного перехода, отнесённая к единице времени

Спонтанное излучение фотонов: самопроизвольный переход атомов из возбуждённого состояния $E_2$ на уровень $E_1$

$$\frac{dN_{2\,сп}}{dt} = A_{21} N_2$$ , где $A_{21}$ – вероятность спонтанных переходов в единицу времени

Вынужденное или индуцированное излучение фотонов: переход атомов из $E_2$ в $E_1$ под действием внешнего светового поля

$$\frac{dN_{2\,вын}}{dt} = B_{21} N_2 \rho_\nu$$ , где $B_{21}$ – вероятность вынужденного перехода в единицу времени

Связь коэффициентов $A_{21}, B_{12}, B_{21}$: $B_{12} = B_{21}$; $A_{21} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} B_{21}$

LASER - Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation – – усиление света путем вынужденного излучения

Принципиальная схема

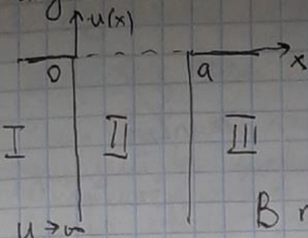

Активное вещество/среда — рабочая среда с инверсией заселённости уровней

Источник накачки — источник энергии для создания и поддержания активной среды

Зеркала — обратная связь для генерации

При подаче излучения опр. частоты устройством накачки в активной среде возникает избыток возбуждённых атомов. Спонтанные фотоны, возникающие внутри активной среды взаимодействуют с возбуждёнными атомами и в конечном счете инициируют мощную лавину вынужденных фотонов, которая и образует лазерный луч. За счет отражения от зеркал оптического резонатора увеличивается плотность вынужденного излучения и формируется его направление. Лазерный луч выходит в виде параллельного пучка света из резонатора через выходное окно/зеркало, частично пропускающее световое излучение

③ Найдите стационарные состояния частицы массой m в бесконечно глубокой потенциальной яме шириной a.




Используем стационарное уравнение Шредингера

$$\hat{H}\psi = E\psi \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + U(x)\cdot\psi(x) = E\psi(x)$$

В пределах ямы: $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi + k^2\psi = 0$, где $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

$$\Downarrow$$

$\psi = A\sin(kx+\alpha)$, где $A, \alpha$ – произв. постоянные

Полученная $\psi(x)$ однозначна и конечна, также она должна быть непрерывна (за пределами ямы частица быть не может $\Rightarrow \psi(x) = 0$)

Тогда при $x=0$ и $x=a$: $A\sin\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

$A\sin ka = 0 \Rightarrow ka = \pm\pi n$

Тогда $\boxed{E_n = \frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{2ma^2}}$, $n = 1, 2, 3$ — собственные значения энергии

Найдем теперь ~~их~~ собственные функции, соотв. собственным зн-ям

Из условия нормировки: $A^2\int_0^a \sin\frac{\pi n x}{a}dx = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{a}}$

$$\boxed{\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)}$$